



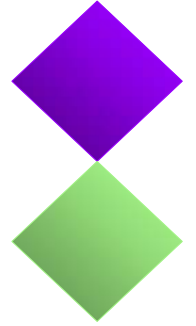
新高中數學課程學與教策略：單元一

「進階概率」

陳秀騰

2006年11月13日

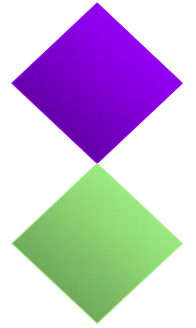
單元一中概率的運算



學習單位 4 — 進階概率

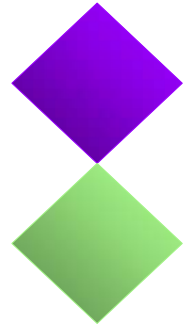
- 認識條件概率及獨立事件
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$
- $P(A | B) = P(A)$ 其中 A 、 B 為獨立事件
- 使用貝葉斯定理解決簡單問題

例子：藏有金幣的箱子

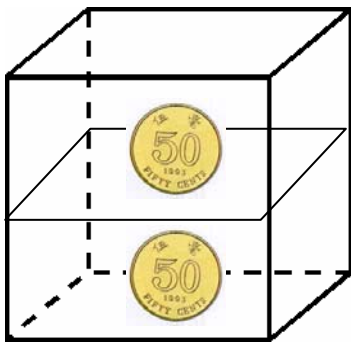


- 有三個箱子，叫做 A 、 B 、 C ，每個箱子有兩個抽屜
- 在箱子 A 的兩個抽屜裏各放置一枚金幣，在箱子 B 的兩個抽屜裏各放置一枚銀幣，在箱子 C 的兩個抽屜裏，一個放置一枚金幣，一個放置一枚銀幣

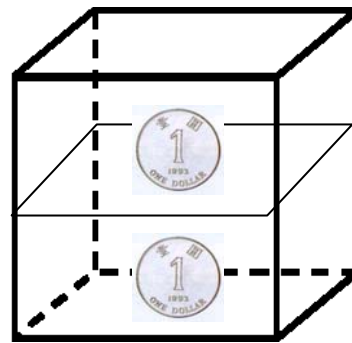
例子：藏有金幣的箱子



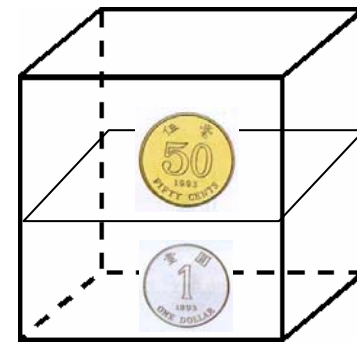
隨意選一個箱子，隨意打開箱子的一個抽屜，如果發現那裏放置了一枚金幣的話，另外那個抽屜裏也放置了一枚金幣的概率是多少呢？



A

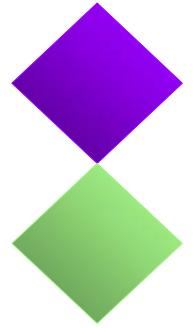


B

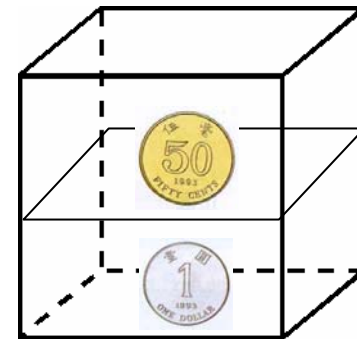
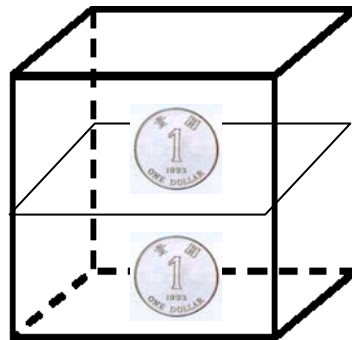
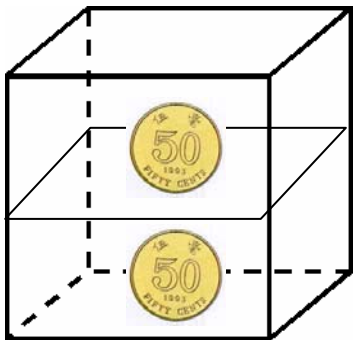


C

例子：藏有金幣的箱子



- 小明的想法：“既然發現抽屜裏放置了金幣，箱子只可能是 A 或 C 。如果是箱子 A ，另一枚必定是金幣。
- 如果是箱子 C ，另一枚必定不是金幣。因為選著 A 或 C 的機會均等，所以答案是 $\frac{1}{2}$ 。
- 你認為對不對呢？



例子：藏有金幣的箱子

- 設 E 是「另一枚是金幣」這個事件
- F 是「有一枚是金幣」這個事件
- 我們要計算的是 $P(E|F)$ 。

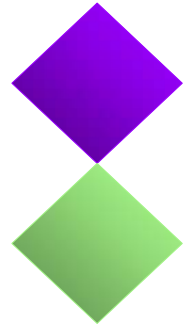
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}}$$

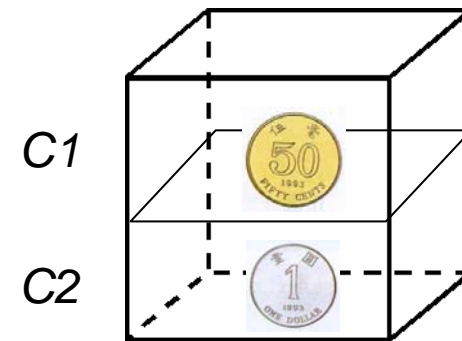
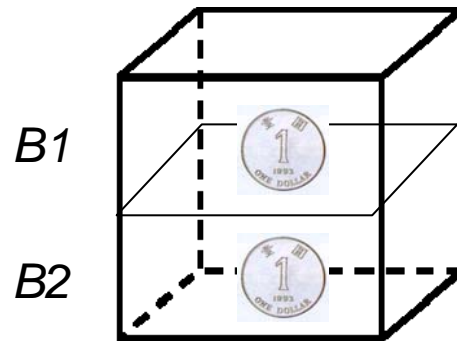
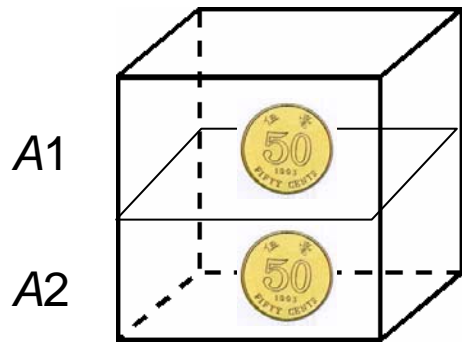
$$= \frac{2}{3}$$



例子：藏有金幣的箱子



- 不信，嘗試另一種解法：

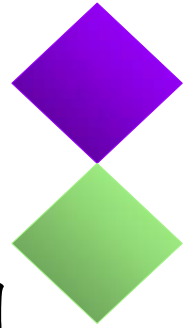


牧師的發現: 貝葉斯定理



- 1761年，聖公會牧師湯瑪斯·貝葉斯 (Thomas Bayes) 試圖使用概率定律證明上帝的存在。

貝葉斯定理



假設事件一、事件二為順序事件，在事件二發生後，利用貝葉斯定理可以求得事件一曾發生與否的條件概率。

由於

$$\text{Prob}(B) \text{Prob}(A | B) = \text{Prob}(A \cap B) = \text{Prob}(A) \text{Prob}(B | A)$$

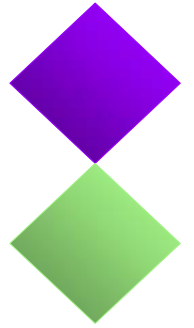
因此

$$\text{Prob}(B|A) = \frac{\text{Prob}(B) \text{Prob}(A|B)}{\text{Prob}(A)}$$

由 $\text{Prob}(A | B)$ 的結果計算 $\text{Prob}(B | A)$

囚犯問題：

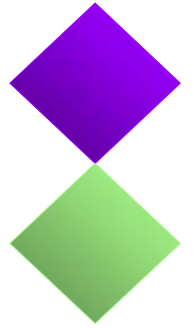
- 三名囚犯共處一間囚室。獄長告訴他們，其中一人將在早晨被處決。
- 一位囚犯問獄長：「如果我們當中有一人要被處決，那麼很明顯的另外兩位囚犯不會被處決，對吧？」，獄長說：「當然」。



囚犯問題：

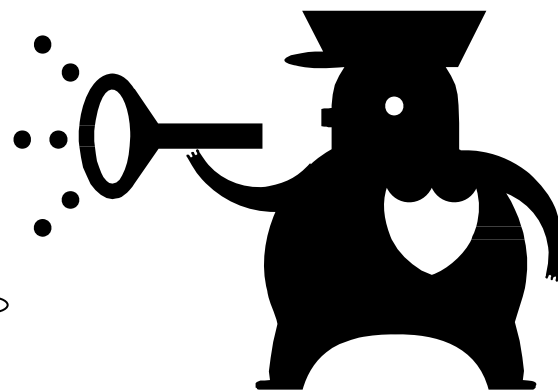
- 這位囚犯說：「好的，那請指出另外兩人明天不會被處決的其中一位。」不過獄長不願這麼做。
- 他說：「不，如果我這樣做的話，那你在明天被處決的機會，就會從現在的 $\frac{1}{3}$ 上升到 $\frac{1}{2}$ 的。」

你同意嗎？



囚犯問題：

釋放乙



甲



乙



丙

囚犯問題：

讓我們稱這位囚犯為「甲」，其他兩位為乙和丙。設

A = 甲被處決

A' = 甲生存

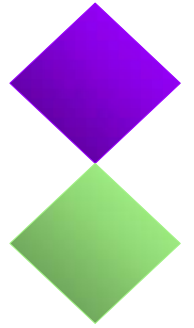
B = 乙被處決

B' = 乙生存

C = 丙被處決

C' = 丙生存

P (獄長指出乙的情況下甲被處決) = $P(A|B')$



由貝葉斯定理，我們可計算

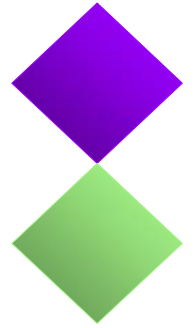


$$P(A|B') = \frac{P(B'|A)P(A)}{P(B'|A)P(A) + P(B'|B)P(B) + P(B'|C)P(C)}$$

$$P(A|B') = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$P(A|B') = \frac{1}{3}$$

囚犯問題：



- 因此，甲被處決的概率仍只有 $1/3$ ，儘管
獄長指向其他兩位其中一位
- 但丙的死亡概率(假設獄長指向乙)卻增加
到 $2/3$ 。正確嗎？