新高中數學科課程
學與教策略:

延伸部分：單元一

陳秀騰先生
數學教育組
電郵地址: stchan@emb.gov.hk

單元一及單元二　相同課題的處理深度

課題	單元一	單元二
二項展式	學習單位 1.1 不須引入二項式定理的證明	學習單位 1.3 須引入二項式定理的證明
數字 e	學習單位 1.2 採用以下一種方法引入 e $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	學習單位 1.5 採用以下兩種方法引入 e $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 及 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

單元一及單元二　相同課題的處理深度

極限	學習單位 2.1 ♦ **不須**引入不同的函數作爲連續函數和不連續函數的例子 ♦ 並**不須**要引入右方的公式	學習單位 2.1 ♦ 引入不同的函數作爲連續函數和不連續函數的例子 ♦ 須引入以下公式 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

單元一及單元二　相同課題的處理深度

函數的求導法	學習單位 2.1 學生**不須**使用基本原理求函數的導數	學習單位 2.2 學生能從基本原理求初等函數的導數
	學習單位 2.2 須引入以下公式: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	學習單位 2.2 以隱求導法求導數
	學習單位 2.2 **不須**引入右方的 6 條公式.	學習單位 2.2 須引入以下公式: • $(\sin x)'=\cos x$ • $(\cos x)'=-\sin x$ • $(\tan x)'=\sec^2 x$ • $(\cot x)'=-\csc^2 x$ • $(\sec x)'=\sec x\tan x$ • $(\operatorname{cosec} x)'=-\operatorname{cosec} x\cot x$
求導法的應用	學習單位 2.4 **不須**描繪多項式函數及有理函數的曲線	學習單位 2.3 須描繪多項式函數及有理函數的曲線

單元一及單元二
相同課題的處理深度

不定積分法	學習單位 3.1 **不須**引入右方的 6 條公式	學習單位 3.1 須引入以下公式: • $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$ • $\int \cos x\ dx = \sin x + C$ • $\int \sec^2 x\ dx = \tan x + C$ • $\int \text{cosec}^2 x\ dx = -\cot x + C$ • $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$ • $\int \text{cosec}\ x \cot x\ dx = -\text{cosec}\ x + C$
	學習單位 3.1 **不須**使用分部積分法求不定積分	學習單位 3.1 須使用分部積分法求不定積分
	學習單位 3.1 • **不須**使用三角代換法求含有 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 或 $\sqrt{a^2+x^2}$ 形式的不定積分 • **不須**介紹諸如 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ 和 $\tan^{-1}x$ 的記法，以及有關主值的概念。	學習單位 3.1 • 使用三角代換法求含有 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 或 $\sqrt{a^2+x^2}$ 形式的不定積分 • 須介紹諸如 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ 和 $\tan^{-1}x$ 的記法，以及有關主值的概念。

單元一及單元二　相同課題的處理深度

定積分法	學習單位 3.2 • 須介紹將定積分表示為曲線下矩形條的面積和的極限的定義 • **不須**使用分部積分法求定積分 • **不須**理解偶函數、奇函數及周期函數定積分的性質	學習單位 3.2 • 須介紹將定積分表示為無窮項之和的定義及由該定義求定積分的方法 • 須使用分部積分法求定積分 • 理解偶函數、奇函數及周期函數定積分的性質
定積分法的應用	學習單位 3.3 • **不須**理解如何應用定積分求沿坐標軸或平行於坐標軸的直線旋轉而成的旋轉體體積 • **不須**理解如何求空心旋轉體的體積	學習單位 3.3 • 理解如何應用定積分求沿坐標軸或平行於坐標軸的直線旋轉而成的旋轉體體積 • 須理解如何求空心旋轉體的體積

注意:　在單元一的微積分部分，學生須理解梯形法則及使用它計算定積分的近似值，
而單元二並沒有這內容。

基礎部分的學習目標

學生應能:

- 透過二項展式學習概率與統計
- 以建模、繪畫圖像及應用指數函數及對數函數解決問題
- 理解指數函數及對數函數的互逆關係，並使用它們解現實生活中的應用題

微積分的學習目標

學生應能:

- 認識極限爲微積分學的基礎
- 運用多樣的技巧求函數的導數
- 透過現實情境理解微積分的概念

統計的學習目標

學生應能:

- 認識概率，隨機變量，離散及連續概率分佈的概念
- 以二項，泊松，幾何及正態分佈理解統計推理的基礎概念
- 運用統計方法觀察及思考，作出推斷
- 發展對不確定現象的數學思維能力，並應用相關知識及技巧解難

教學建議：

- 通過實例，引出需要學習的內容
- 教學中不要只把重點放在「運算步驟」上
- 從具體到抽象的學習活動來理解統計和微積分的基礎知識，不應只追求嚴謹的形式化定義
- 澄清日常生活的一些錯誤認知：「中獎率爲 1/1000 的彩票，買1000張一定中獎。」

教學建議：

- 體會統計思想與確定思想的差異
- 注意到統計結果的隨機性，統計推斷是有可能犯錯的
- 鼓勵學生多用計算機、電腦來處理資料，進行學習活動，更好地體會概率的意義

教學建議：

- 著重應用層面，分析情況，作出判斷
- 舉例:

整體試驗的好處 — 如何用比較少的化驗次(100次) 去估計一萬人中患病者的百分比?

整體試驗的好處

- 只考慮甲，乙兩個人，要檢驗誰患病誰沒患病，有以下兩種方法
  1. 分別進行兩次血液樣本化驗
  2. 把樣本混合在一起化驗，如果
     - 呈陰性反應，不需再化驗
     - 呈陽性反應，再分別化驗

     有時進行一次化驗，有時進行三次化驗

究竟哪種方法較佳呢?

整體試驗的好處

- 計算每個方法的化驗次數的數學期望值
- 方法一：

  化驗次數的數學期望值＝2
- 方法二：
  - 假定每人患病的概率是 P
  - 假定每人患病與否並不影響另一人患病與否

整體試驗的好處

- 方法二:
  - 化驗次數的數學期望值

$$= 1 \times (1-P)^2 + 3 \times [1-(1-P)^2]$$

$$= 1-2P+P^2+3(2P-P^2)$$

$$= 1-2P+P^2+6P-4P^2$$

$$= 1+4P-2P^2$$

方法二較方法一好, 當

$$1+4P-2P^2 < 2$$

$$2P^2-4P+1 > 0$$

$$P < 0.2929$$

運用數學作決策

- 甲、乙兩選手比賽，假設甲勝出的概率爲0.6，乙勝出的概率爲0.4。
- 那麼採用三局兩勝制還採用五局三勝制對甲有利呢?

甲勝利的情況:

知恥近乎勇

- 三盤兩勝制:
  - 甲甲、甲乙甲、乙甲甲
  - 概率 $= 0.6\times0.6+0.6\times0.4\times0.6+0.4\times0.6\times0.6$

    $= 0.648$

- 五盤三勝制:
  - 概率 $= (0.6)^3+3(0.6)^3(0.4)+6(0.6)^3(0.4)^2$

    $= 0.683$

獨立性假設

勝利衝昏了頭腦

射擊研究

- 某射手每次擊中目標的概率是0.7。求這名射手在10次射擊中，恰有8次擊中目標的概率。

$$P(X=8)=C_{8}^{10}(0.7)^{8}(0.3)^{2}$$
$$=0.2335$$

探索與研究

- 如果某射手每次射擊擊中目標的概率是0.7，每次射擊的結果相互獨立，那麼他在10次射擊中，最有可能擊中目標幾次?

探索與研究

- $X \sim B(10,\ 0.7)$

$$P(X=k)=C_k^{10}\left(0.7\right)^k\left(0.3\right)^{10-k} \qquad 0\le k\le 10$$

- 計算每個 k 值所對應的概率，比較大小，作出判斷

探索與研究 這內容超越筆試的要求

- 比較 $P(X=k)$ 和 $P(X=k-1)$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{(10-k+1)\times 0.7}{k\times 0.3}=1+\frac{7.7-k}{0.3k}, \qquad 1\le k\le 10$$

當 $k<7.7$ 時，$P(X=k-1)<P(X=k)$

當 $k>7.7$ 時，$P(X=k-1)>P(X=k)$

- 他在10次射擊中，最有可能7次擊中目標

探索與研究

- 如果 $X \sim B(n, p)$ ，其中 $0<p<1$，那麼當 k 由 0 增大到 n 時，$P(X=k)$ 是怎樣變化的? k 取何值時， $P(X=k)$ 最大?

生活中的優化問題

圓桶的最佳尺寸:

某公司接到一批容量為 $\frac{2\pi}{3}$ m^3 無蓋的圓柱形桶的訂單。若用來做桶底的圓形鐵片每平方米價格為 3 元，做側面的鐵片每平方米價格為 2 元，按照怎樣的尺寸做桶，才能使成本最低?

生活中的優化問題

解： 設圓柱形桶的高為 h m，底面半徑為 R m, 成本為 y 元，則

$y = 3\pi R^2 + 4\pi Rh$，當中 $V = \pi R^2 h = \frac{2\pi}{3}$, $h = \frac{2}{3R^2}$

$$\therefore y = 3\pi R^2 + 4\pi R\left(\frac{2}{3R^2}\right)$$

$$\therefore y = 3\pi R^2 + \frac{8\pi}{3R}$$

$$\frac{dy}{dR} = 0, \quad R = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2y}{dR^2} \text{ at } R = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}} > 0$$

量度汽水罐的高度
與底面直徑,
看看結果如何?

現實生活中的問題

要計算河流的最大排洪量，需要計算河床橫斷面面積。做法是沿河床斷面按等距離測量各點處的水深，測量數據 (單位 m)。試計算河床斷面面積。