

幫助學生以有效的方法 學習分數

數學教育組

大綱

- 分數的簡單歷史回顧
- 分數的意義
- 學習分數的困難與常見的錯誤

分數的簡單歷史回顧

- 分數：拉丁文是 *fractio*，是**打破**、**斷裂**的意思。
漢語“分數”的“分”也是**分開**、**部分**的意思。
- 世界上最早的分數，見於埃及的紙草書中，當時埃及人已掌握了單分數的記法。中國大約在公元前五世紀開始出現把兩個整數相除的商看作分數。歐洲在15世紀以後，才逐漸形成現代分數的算法。

分數的簡單歷史回顧

古希臘人、羅馬人都盡量避免分數的使用。
例：他們會說一所學院的男生與女生人數的比為2比3，或男生與學院人數的比為2比5，而不說 $\frac{2}{5}$ 的學生是男生。

分數的簡單歷史回顧

古埃及人很難理解用兩個數字來表示一個量，因而將所有的分數都表示為單位分數的形式，即所有的分子都寫成：○

例， $\frac{\text{III}}{\text{IV}} = \frac{1}{4}$
 $\frac{\text{II}}{\text{XXI}} = \frac{1}{21}$

為甚麼要引進分數？

- 分物、部分
- 形如 $ax=b$ 的方程：
 $2x=4$ ，在整數範圍內有解： $x=2$ ，
但 $4x=2$ ，在整數範圍內無解，
因而需要新的數系的產生。

為甚麼要引進分數（續）？

分數改變我們看問題的方式：

阿芳和阿强看到下面的數據後，各有一番評論，你同意他們中的那一位的說法？

在1980年，小鎮A和小鎮B的人口數分別是5000和6000，到1990年，小鎮A和小鎮B的人口數分別是8000和9000人。

為甚麼要引進分數（續）？

● 分數改變我們看問題方式（續）

阿芳認為：從1980年到1990年，這兩個小鎮的人口增加量相同。

阿强認為：從1980年到1990年，小鎮A的人口增加的更多。

為甚麼要引進分數（續）？

● 分數改變我們看問題方式（續）

從兩個不同的角度看待變化：

				A鎮的變化	B鎮的變化
阿芳	減法	差	整數	3000	3000
阿强	除法	商	分數	$\frac{8000-5000}{5000}$ = $\frac{3000}{5000}$	$\frac{9000-6000}{6000}$ = $\frac{3000}{6000}$

大綱

- 簡單分數的歷史回顧
- 分數的意義
- 學習分數的困難與常見錯誤

分數是甚麼？

你認為分數是甚麼呢？

?

分數是甚麼（續）？

- A. 分數是數線上的一個點 (*a pt. on the no. line*)
- B. 分數是一個商 (*quotient*)
- C. 分數是一個算子 (*operator*)
- D. 分數是一個比 (*ratio*)
- E. 分數是部分—整體的一個關係 (*part-whole*)

分數是甚麼（續）？

- A. 分數是數線上一個點 (a pt. on the no. line)

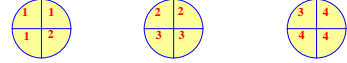
例：將 $\frac{1}{2}$ 在數線上以點表示



分數是甚麼（續）？

- B. 分數是一個商 (quotient)

例：4個孩子 平分3塊餅，每人可分得多少？

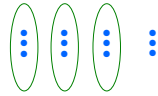


$\frac{a}{b}$ 即 a 除以 b 所得的商。

分數是甚麼（續）？

- C. 分數是一個算子 (operator)

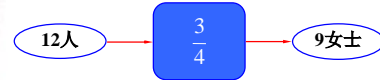
例，一次聚會中， $\frac{3}{4}$ 的參與者為女士，如果一共有 12 個人參與，其中女士有多少人？



分數是甚麼（續）？

- C. 分數是一個算子 (operator) (續)

$\frac{a}{b}$ 是一個函數機器，它能指出所給對象被多大程度的放大或縮小，例：



分數是甚麼（續）？

- D. 分數是一個比 (ratio)

例： $\frac{2}{5}$ 即 2:5 的意思。

分數是甚麼（續）？

- E. 分數是部分—整體的一種關係 (part-whole)

(1) 整體與其部分的關係


例：

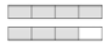
- 若 代表一整體，下面陰影部分表示這整體的 $\frac{3}{4}$ ：



分數是甚麼（續）？

● E. 分數是部分—整體的一種關係 (part-whole)

- 若  代表一整體，下圖陰影部分表示這整體的 $\frac{3}{4}$ ：



(2) 一組物件的部分

例：下圖陰影部分表示 12 粒珠的 $\frac{2}{4}$ ：



大綱

- 簡單分數的歷史回顧
- 分數的意義與表徵
- 學習分數的困難與常見錯誤

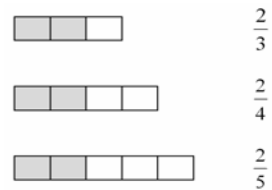
困難

- 學生未能理解及認識分數是一個數。
- 學生未能理解及掌握分數的不同意義。
- 學生對擴分、約分概念的誤解。
- 學生未能理解等分的意義。

困難

- 學生未能理解整體與部分的關係。

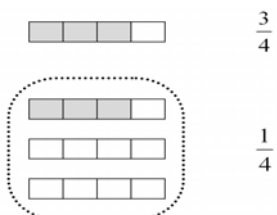
例1：



困難

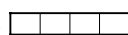
- 學生未能理解整體與部分的關係。

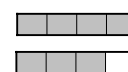
例2：



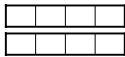
困難

- 學生未能理解整體與部分的關係。

例3. 若將  當一整體，則下圖陰影的部分應是這整體的 $\frac{7}{4}$ 而不是 $\frac{7}{8}$ 。

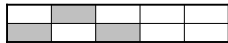


困難

例4. 但若將  當一整體，則陰影的部分應是這整體的 $\frac{7}{8}$ 。



例5. 若將下圖當一整體，則陰影的部分應是這整體的 $\frac{3}{10}$ 而不是 $\frac{3}{7}$ 。

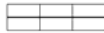


困難

● 學生對掌握整體與部分的關係往往感到十分困難，教師可透過不同類型的活動，由淺入深，讓學生理解整體與部分、部分與整體的關係。下面為一些建議的例子：


• 若  為一整體，試用分數表示以下圖形中陰影的部分。



• 若  為一整體，試用分數表示以下圖形中陰影的部分。



困難

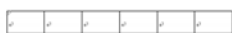
• 若  為一整體，試用分數表示以下圖形中陰影的部分。



•  左圖陰影部分佔整體的幾分之幾？

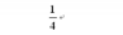
•  圖中的黑點佔整體的幾分之幾？白點佔整體的幾分之幾？

困難

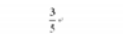
•  如左圖為一整體，畫出陰影部分以表示 $\frac{2}{3}$ 。



•  左圖只畫出了整個圖形的 $\frac{1}{4}$ ，把餘下的圖形畫上。

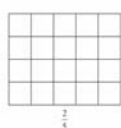
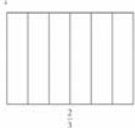


•  左圖只畫出了整個圖形的 $\frac{3}{5}$ ，把餘下的圖形畫上。



困難

• 依所給分數把圖形適當的部分填上顏色！



•  圖中蘋果的數目佔整袋蘋果數目的 $\frac{2}{5}$ ，試畫出袋內其餘的蘋果。

困難

1. 圖中 A、B 和 C 作為一個整體時：



- (a) A 佔整體的幾分之幾？
- (b) B 佔整體的幾分之幾？
- (c) C 佔整體的幾分之幾？

2. 圖中若以不同部分作為整體時：

- (a) A 佔 B 的幾分之幾？
- (b) A 佔 C 的幾分之幾？
- (c) B 佔 C 的幾分之幾？

分數加減法的常見錯誤

- 在進行分數加減運算時，最常犯的錯誤是分子與分子相加減、分母與分母相加減，而沒有適當通分。

為甚麼要通分？

5厘米+5米=? 我們需要換成同一單位再相加。

通分就是化成同一個“單位”。

分數乘法的常見錯誤

例一：

整體和分數相乘時，將整體與分母相乘。例：

$$3 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3 \times 8} = \frac{1}{24}$$

例二：

分數為帶分數時，沒有把帶分數化為假分數便直接把整數與整數相乘，分數與分數相乘。例：

$$2\frac{3}{5} \times 7\frac{4}{11} = (2 \times 7) \frac{3 \times 4}{5 \times 11} = 14\frac{12}{55}$$

分數乘法的常見錯誤

例三：

不懂得相約的法則。例如：整數和分數相乘時，將整數與分數的分子相約；或分數與分數相乘時，分子與分子相約，分母與分母相約。有時甚至不是用同一個因數相約。

例：

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{8} = 1\frac{4}{20}$$

分數除法的常見錯誤

例一：

兩分數相除時，只將乘號改為除號，而忽略將除數的分子分母顛倒。例：

$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{5}$$

例二：

兩分數相除時，將被除數的分子及分母顛倒。例：

$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{8}{3} \times \frac{2}{5}$$

分數除法的常見錯誤

例三：

整數除以分數或分數除以整數時，不懂得如何處理整數部分。例：

$$5 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad \frac{3}{8} \div 5 = \frac{3}{8} \times 5$$

例四：

當遇上帶分數時，不懂得先將帶分數化為假分數，然後再進行運算。例：

$$\frac{3}{8} \div 2\frac{4}{5} = \frac{3}{8} \times 2\frac{5}{4}$$

分數四則運算的教學建議

- 在講解分數的四則運算時，應先讓學生釐清分數的概念，然後才介紹分數運算的法則。
- 教師必須先讓學生清楚明瞭法則的推導過程，然後通過適當的練習，讓學生懂得如何應用法則，及將法則牢記於心。當學生誤用法則時，教師亦應即時加以糾正。



謝謝各位!