

新高中數學課程知識增益 趣味數學

統計、概率和微積分的 有趣課題

從思考衝突中引發學習動機

最原始的悖論(詭論)

說慌者悖論 (Liar Paradox)

這框框內的語句是假的

三個例子

(一)最大自然數存在的證明（或「超級神」存在的證明）

(1) 這框框內只有一句話是真的。

(2) 沒有最大的自然數。

三個例子

(二) 約會的秘技

請問你對後面問題所給的答案會否跟這條問題的答案一樣？

你明天會跟我看電影？

三個例子

(三) 如何穩奪大獎

某地電視台競爭激烈，為爭取觀眾，各出奇謀。三色電視台舉辦了一個「送錢式」遊戲節目，參加的觀眾只須說出一命題，便可獲得獎金。規則是：命題若為真，則必獲現金五千元。命題若為假，觀眾仍可獲得現金獎，但金額絕不會是五千元。實際所得一般由主持人決定（至於參加者的樣貌會否左右主持人的決定，就不得而知了）。冷球台亦舉辦了一個類似的遊戲節目，參加的觀眾亦要說出一命題，但無論真假，一律獲發現金獎一萬元正。假如你希望從遊戲節目中獲得鉅獎，而你只可選擇參加兩個節目的其中一個。你會怎樣做？

電梯悖論(Elevator Paradox)

經常往返三樓和十二樓的阿金埋怨道：「真是倒楣，每次我要從這三樓往十二樓時，等到的電梯老是往下的；但是從那裡要下來時，等到的偏又都是往上的，真是『黑仔』。」

地鐵悖論

安安住在葵芳，她每個星期天上午都會從葵芳站乘地鐵往荃灣探望父母，她到達月台的時間總是隨機落在十時至十一時這段時間之內的。已知在這段時間內，兩個方向的列車都是每隔五分鐘一班，問題是，安安發現，經常是對面的列車先到站的，為什麼呢？

檢驗悖論(Inspection Paradox)

假設小巴在總站開出的時間是隨機的，而兩個班次之間平均間隔是10分鐘。即後一班小巴有時候是在前一班小巴開出後10分鐘或10分鐘內開出，有些時候是在前一班小巴開出後超過10分鐘才開出。假如大雄到達小巴總站的時間是隨機的，大雄等候小巴的平均時間是多少呢？

從金幣的問題到蒙地豪謎題 (Monty Hall Problem)

假如袋裡面有三枚硬幣，其中一枚兩面都是金色的，一枚則兩面都是銀色的，另一枚則一面是金色一面是銀色的。某甲從袋中隨機抽出一枚硬幣，並把它放在檯面上，已知向上的一面是金色的，問它向下的一面是銀色的概率是多少？

蒙地豪謎題 (Monty Hall Problem)

假如你參加一個電視台的遊戲節目，主持人解釋遊戲規則：「這兒有三道門，它們分別通往三個小房間，其中一個小房間裝有一輛名貴房車，另外兩個小房間都分別裝有一隻小羊，請選擇一個門開，房間裡的東西便是屬於你的了。」

你於是隨便選了中間的門。

主持人接下來說：「我們都知道剩下兩扇門至少有一扇門後面是一隻羊。好吧！讓我從剩下的兩個門中打開一扇裝有小羊的門，然後再給你一次機會去考慮是否要更改你的選擇。」主持人接著打開了右手邊的門，裡面果然裝有小羊。問題是，你要否更改你的選擇嗎？

蒙地豪謎題 (Monty Hall Problem)

1990年，Marilyn vos Savant 在 *Parade magazine* 提及電視節目 *Let's Make a Deal* 中這道問題並給出答案，引起軒然大波。(vos Savant, 1990a, 1990b, 1991, 1992)
你的答案是...?

Marilyn 的答案是「應該更改」

$1/3 \rightarrow 2/3$

條件概率

- (A) 王先生為兩孩之父。已知王先生其中一名孩子是男孩。問王先生的另一名小孩是男孩的概率是多少？
(假設生男、生女的概率相等。)
- (B) 王先生為兩孩之父。一天你在街上看見他與一男孩同行，王先生向你介紹說男孩是他的兒子。問王先生的另一名小孩是男孩的概率是多少？
- (C) 王先生為兩孩之父，一天你在街上看見王先生與一男孩同行，王先生向你介紹說男孩是他的大孩子。問王先生的另一名小孩是男孩的概率是多少？



$$\begin{aligned} & P(BB | S_B) \\ &= \frac{P(S_B | BB)P(BB)}{P(S_B | BB)P(BB) + P(S_B | GG)P(GG) + P(S_B | BG)P(BG) + P(S_B | GB)P(GB)} \\ &= \frac{P(S_B | BB)}{P(S_B | BB) + P(S_B | GG) + P(S_B | BG) + P(S_B | GB)} \\ &= \frac{1}{1 + 0 + P(S_B | BG) + P(S_B | GB)} \\ &= ? \end{aligned}$$



條件概率

某城市只有兩種的士在路面上行走——紅的士和綠的士。紅的士佔了全部的士的 85%。

在某大霧的晚上，一的士撞倒路人後不顧而去。目擊者陳先生說該的士是一綠的士。

警方模擬當晚的環境，測試陳先生的判斷力。結果顯示，無論警方給陳先生看的是紅的士還是綠的士，他都有 80% 的時候能正確報出的士的顏色。

辛普森悖論(Simpson's Paradox)

某藥物D對某傳染病X的治癒率如下：

	康復	死亡
用藥	2百萬	4百萬
不用藥	4百萬	2百萬

你若不幸感染了傳染病X，你願意接受藥物D的治療嗎？

假如上述數字以性別再作區分的話，某藥物對某傳染病的治癒率如下：

	康復	男	女	死亡	男	女
用藥	2百萬	1百萬	1百萬	4百萬	0百萬	4百萬
不用藥	4百萬	4百萬	0百萬	2百萬	1百萬	1百萬

從你所屬性別的數據來看，你還願意接受藥物D的治療嗎？

思考題

某集團的男職員數目較多，近日有兩間子公司出現大量空缺，集團總裁為免落人口實，要求兩間公司的負責人須盡量提升女應徵者的錄取率。招聘完成後的某一天，秘書匆忙跑進總裁房間道：「總裁先生，不好了，有人在公司門外抗議我們取錄職員有性別歧視。他們說我們今年男性的錄取率是女性的兩倍」。

「有沒有弄錯，我不是好好交代過，今次取錄員工須盡量提高女應徵者的錄取率嗎？」總裁滿腹疑惑的說。

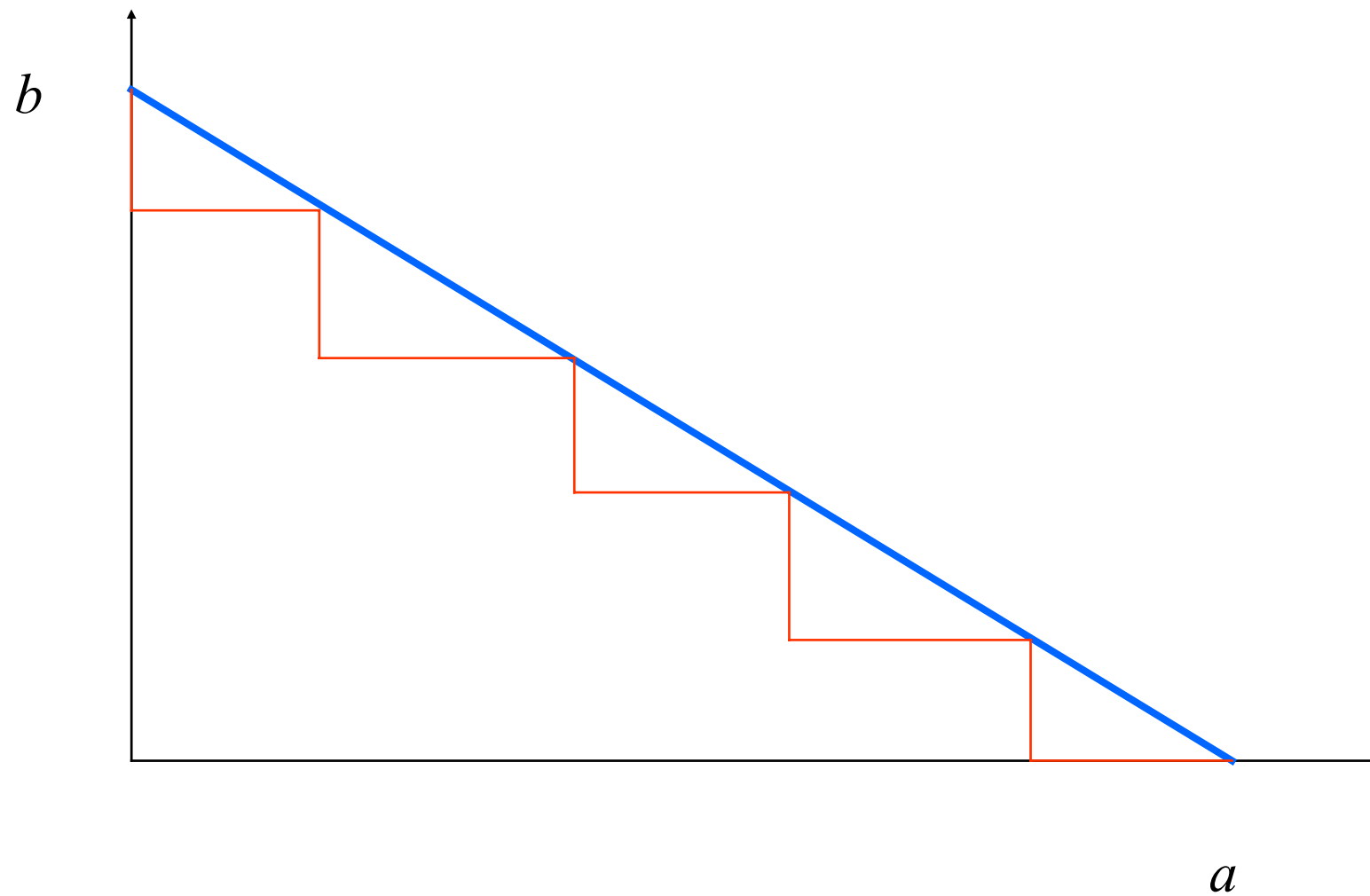
「是啊！我剛剛查過了，兩間子公司的負責人已經根據總裁指示去做了」秘書說。

你能用數據解釋這個現象嗎？

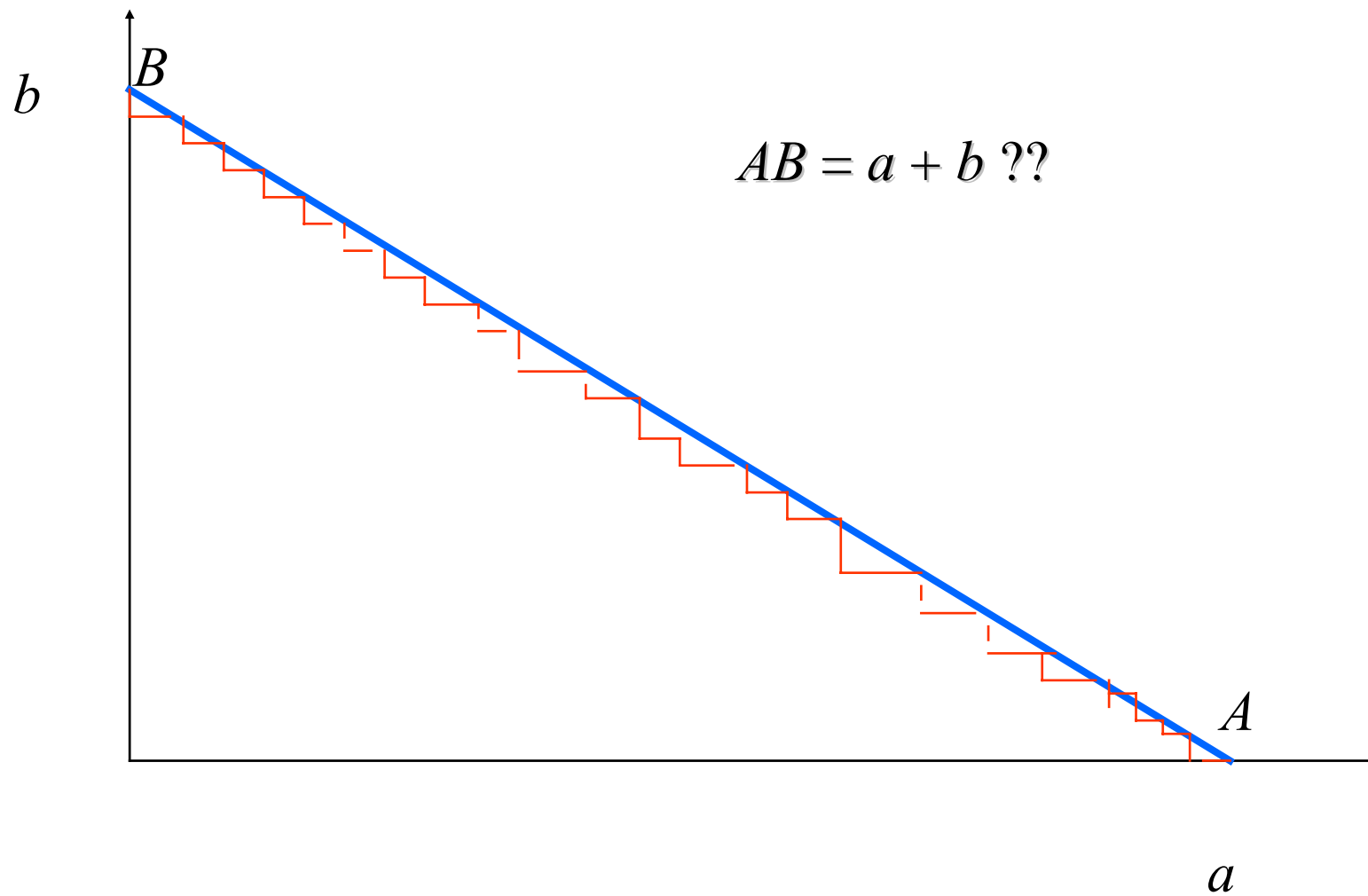
其他問題

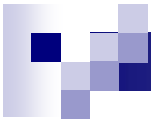
- 假設檢定(Hypothesis Testing)的邏輯謬誤
- CI 的解釋謬誤
- 貝特朗悖論 (Bertrand Paradox)
- 比豐投針問題 (Buffon's needle problem)
- 聖彼得堡悖論 St. Petersburg's paradox
- ...

極限的謬誤



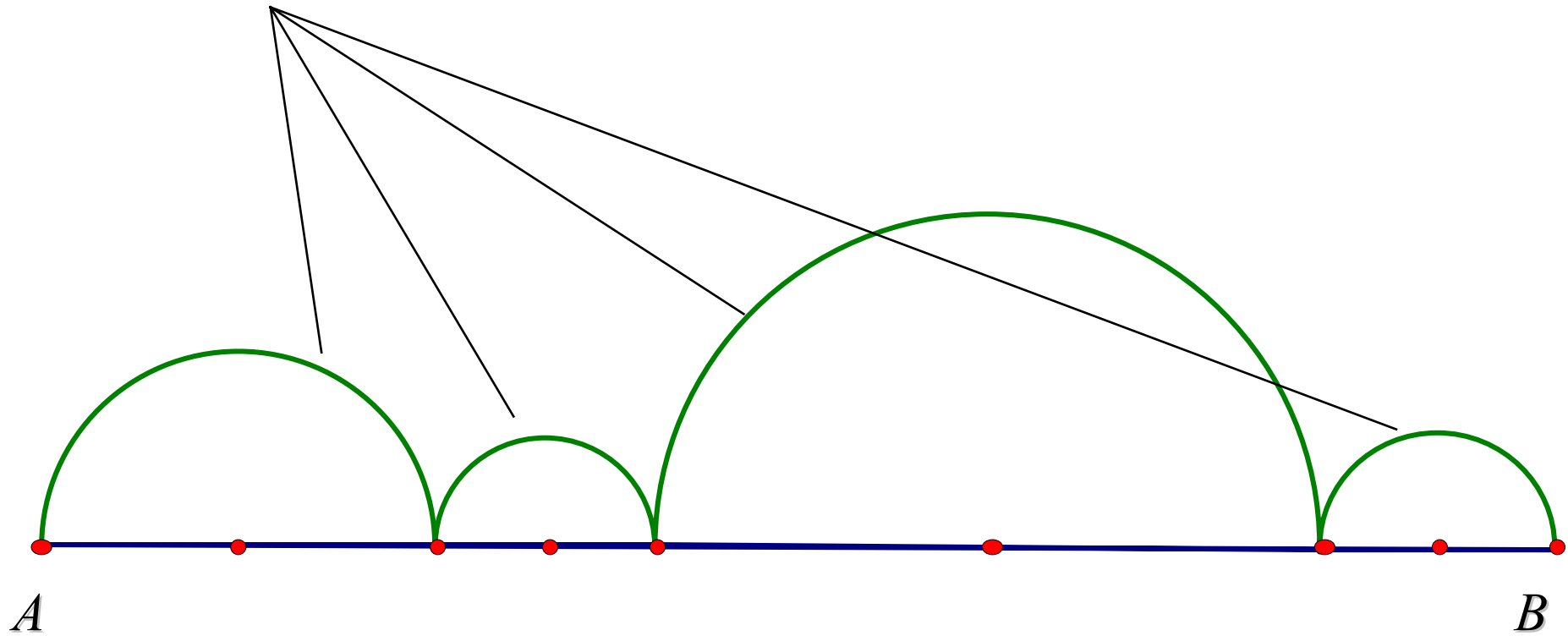
極限





$\pi AB / 2$

取其極限得： $\pi = 2 ???$



托里切利漏斗

(Torricelli's paradoxical funnel)

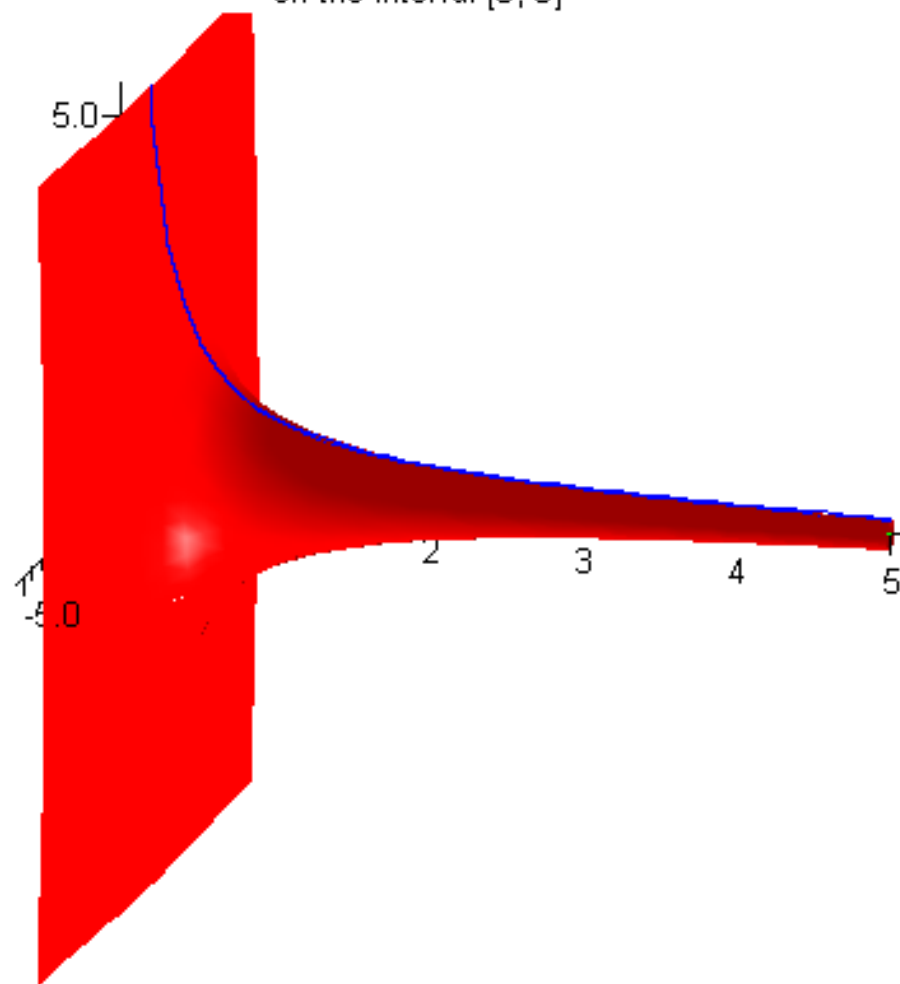
Torricelli's paradoxical funnel，只懂中學微積分的小朋友，便可好好思考一下了：


把雙曲線 ($xy = 1$) 在第一象限中從 $x = a$ (其中 a 為正數) 至無限的一段，沿 x -軸 旋轉一周所產生的曲面，我們把它叫作 Torricelli's funnel 或 Gabriel's horn。我們很容易證明得到，這個曲面的面積是無限大而它 (及 $x = 1$) 所包含的空間的體積卻是有限。問題是，我們能用有限的油漆塗滿這個曲面嗎？一方面，面積既是無限，我們便須用無限多的油漆才能把它塗滿吧。但另一方面，既然體積有限，我們把同樣體積油漆倒滿它，豈不便可把其曲面塗滿嗎？兩者看似衝突，究竟孰真孰假呢？

又名號角悖論 'The alpenhorn paradox'



The Surface of Revolution Around the Horizontal Axis of
 $f(x) = 1/x$
on the Interval $[0, 5]$





體積 $= \int_1^{\infty} \pi y^2 dx$

$$= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \pi \left(\frac{1}{x} \right) \Big|_{\infty}^1$$
$$= \pi$$

表面面積 $= \int_1^{\infty} 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx$

$$\geq 2\pi \int_1^{\infty} y dx$$
$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$
$$= 2\pi \ln x \Big|_1^{\infty}$$
$$= \infty$$

「1 = 2」的證明

明顯地， $2 + 2 = 2^2$ ， $3 + 3 + 3 = 3^2$ ， $4 + 4 + 4 + 4 = 4^2$

一般來說， $x + x + \dots + x = x^2$

兩邊求導得， $1 + 1 + \dots + 1 = 2x$

$$x = 2x$$

$$1 = 2 \text{ (Q.E.D.)}$$

不定積分與常值定理

(Indefinite Integral & Constant value theorem)

* $\int 3x^2 dx = ?$

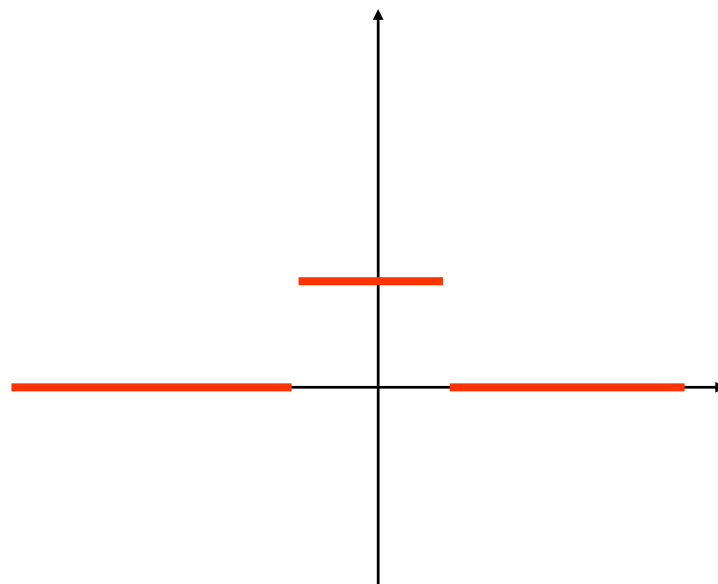
** $x^3 + C$

**是*的最一般的解?
為甚麼?

設函數 f 可導。如果 $\forall x f'(x) = 0$ ，則 f 是常值函數。

考慮函數 $f: Q \rightarrow Q$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x^2 < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$f: Q \rightarrow Q$ 可導?

$f(x) = 0 \forall x \in Q$?

反例??

設函數 $f: R \rightarrow R$ 可導。如果 $f'(x) = 0$
 $\forall x \in R$, 則 f 是常值函數。