School Mathematics Newsletter (SMN)

Foreword

It has long been our wish to inform teachers at large the development of Mathematics Education in Hong Kong, the organisation of our section, and many of the tasks we commit, e.g., forthcoming professional development courses, the Hong Kong Mathematics Olympiad, the School Mathematics Project Competition, etc., and to share with teachers some of our professional dialogues – in the form of a booklet called the School Mathematics Newsletter (in short, the SMN).

We hope that the SMN could serve as "news" in the wider sense. Reading it could enhance our understanding of information about the development of the Mathematics curriculum, informed practical ideas as well as intellectual stimulation about mathematics, its nature, its learning, its teaching and its assessment.

The Mathematics Education Section
Curriculum Development Institute
Room 403, Kowloon Government Offices
405 Nathan Road
Yau Ma Tei
Kowloon

Organisation of Mathematics Education Section, CDI (2010/2011)

Chief Curriculum Development Officer

Mr LEE Pak-leung	(until 3 April 2011)
Mr NG Siu-kai	(from 4 April 2011)

Senior Curriculum Development Officer

Mr LEUNG Kwong-shing
Mr WAI Kwok-keung
Mr YUNG Chi-ming, William

Curriculum Development Officer

Ms AU Wing-mei
Mr CHAN Sau-tang
Mr CHAN Siu-chuen, Vincent
Mr CHENG Sze-man, Robert
Mrs CHEUNG FUNG Tak-fong
Ms CHEUNG Kit-ling
Dr FUNG Chi-yeung
Ms HO Yee-hung
Mr LEE Chun-yue, Stanley
Mr LEE Kin-sum, Gary
Ms LEUNG Kit-ying, Randy
Dr NG Yui-kin
Ms TANG Mei-yue, Christine
Ms WEI Mi-yine, Lavonne

目錄

空白頁

1. 雜談—由乘法說起

馮志揚

數學引人入勝的地方是成功解決問題之後的快樂，從而便令人對數學情有獨鍾，愛不釋手。同樣道理，能夠解決教學上的數學問題或教學策略的問題，亦帶給數學教育工作人員同樣的喜悅，令他們鍥而不捨地繼續進行數學教育的工作。教師在日常的教學中可能會遇到學生提出具挑戰性的問題或在教學過程中對某些課題感到疑惑，以下是近日教師遇到的一些數學教學問題的探究。

乘法

香港課程發展委員會在 1983 年編印的《小數課程綱要 - 數學科》(簡稱「綱要」) 頁 19 指出，乘法學習的開始，乘法的記錄方法如 $3\times2=6$ 和 $2\times3=6$ 可代表 3 個 2 是 6。換言之，2 和 3 在乘式中的位置完全與它是否 2 個 3 或 3 個 2 無關。「綱要」在同一頁的備考中，亦說出 3 倍的「3」可放在乘式的第一個數或第二個數;「綱要」在乘法學習的初始顯然已接受了整數的乘法交換性質，我們已經無須特別強調乘數和被乘數這些詞彙。

Gullberg 約於 1997 年對於乘法在這方面的處理手法亦有類似的看法：被乘數和乘數這兩個數學詞彙，已經是過時了。

> The terms *multiplicand* [被乘數] and *multiplier* [乘數] are today obsolescent, and are generally called just "factors" (Gullberg, 1997, p. 118).

利用乘法交換性質為基石，我們在學習乘法概念的初始階段便可以接受 $a \times b$ 和 $b \times a$ 同時代表 a 個 b 和 b 個 a，而無需要求第一個數 a 必定代表某數 b 的 a 倍，或第二個數 b 必定代表某數 a 的 b 倍；我們亦可將乘式 $a \times b$ 簡單讀成「a 乘 b」。

最大公因數和最小公倍數

2000 年編定的《數學教育領域數學課程指引（小一至小六）》建議學生只用列舉因數和倍數的方法先找尋兩個數的公因數和公倍數，從而選出這兩個數的最大公因數（H.C.F.）和最小公倍數（L.C.M.）（頁 36），目的是讓學生從這個過程中可以真正了解公因數和公倍數的概念，和為甚麼只有最大的和最小的公因數，及只有最小的公倍數而沒有最大的公倍數的理由。例如，要求 24 和 15 的最大公因數和最小公倍數，我們先分別列舉兩數的因數：

24 的因數是 1，24；2，12；3，8；4，6；順次為 1，2，3，4，6，8，12，24。
15 的因數是 1，15；3，5；順次為 1，3，5，15。

所以，大家都有的的因數（公因數）由小至大排列是 1，3。所以，24 和 15 的最大的公因數是 3，而最小的公因數是 1。

同理，要求 24 和 15 的最小公倍數，我們先分別列舉兩數的倍數：
24 的倍數是 24，48，72，96，120，144，168，192，216，240，264，288，……。

15 的倍數是 15，30，45，60，75，90，105，120，135，150，165，180，195，210，225，240，255，……。

由上列的數字，可見 24 和 15 的公倍數由小至大排列如下：120，240，……。
因此，24 和 15 的最小的公倍數是 120；24 和 15 卻沒有最大的公倍數。

如果有必要給學生介紹一個增潤的、「較簡單」的找尋 H.C.F. 和 L.C.M. 的技巧，我們可以利用輾轉相除法[I]，先求 H.C.F.，然後再利用公式「兩數相乘的結果亦與他們的 H.C.F. 和 L.C.M. 相乘的結果相同」[II]，計算 L.C.M.。例如，求 24 和 15 的 H.C.F. 和 L.C.M. 時，先利用輾轉相除的方法，求兩數的 H.C.F.，步驟如下：

$24 \div 15 = 1 \cdots 9$	(先將較大的一個數 24 被較小的數 15 相除)
$15 \div 9 = 1 \cdots 6$	(因餘數 9 不是零，將餘數 9 去除原來的除數 15)
$9 \div 6 = 1 \cdots 3$	(因餘數 6 不是零，將餘數 6 去除原來的除數 9)
$6 \div 3 = 2$	(因餘數 3 不是零，將餘數 3 去除原來的除數 6)
H.C.F. 是 3	(因餘數是零，除數 3 便是兩數的 H.C.F.)

現在，因為 $24 \times 15 = \text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.}$
所以，24 和 15 的 L.C.M. 是 $24 \times 15 \div 3 = 120$。

不可不知的是：我們亦可利用輾轉相除求 H.C.F. 的方法，將一個未約簡的分數，約至最簡。利用上述的兩整數 24 和 15 為例，要將分數$\frac{15}{24}$約至最簡，我們利用輾轉相除先找出 24 和 15 的 H.C.F.，即 3，然後將 3 去除 15 和 24，得$\frac{5}{8}$。無容置疑，八分之五是約至最簡的分數了。

製作三角形

要探究有沒有較簡單的方法找出兩個正整數 A 和 B 的 H.C.F. 和 L.C.M.，和引導學生了解和應用這技巧的原理，我們似乎需要做一些「研究」。同理，究竟任意的三根木棒能否首尾相連，圍成一個三角形呢？如果我們對製作三角形的有關條件未作深究，而隨意在黑板上繪圖一個三邊分別是 1 厘米，2 厘米和 3 厘米的三角形，和一個三邊分別是 2 厘米，2 厘米和 4 厘米的三角形，讓學生利用教師建議的長度的小木棒製作三角形，後果是很難想像的。原來，只要最長的一根木棒的長度少於其他兩根長度的和，這三根木棒便可以首尾相連，圍成一個三角形[(III)]。否則，利用上述的 1 厘米，2 厘米和 3 厘米木棒，或 2 厘米，2 厘米和 4 厘米的木棒，製作三角形，只是徒然。一個看似簡單的三根木棒製作三角形的課堂活動，我們亦何嘗不是要先下一番苦功，才能了解箇中的道理。

學生興趣

香港的小學數學教學的宗旨首要任務是引起學生對數學學習的興趣（香港課程發展議會，2000，頁 4)。數學的本質是用最經濟的語言表達抽象的概念和被確認的數學知識，要求學生用清晰無誤的乘式表達是肯定的。成功運用簡單直接的語言解答問題，與接受教師和同學的鼓勵，均能讓學生產生成就感，增強對數學學習的信心。學習較快捷有效的計算策略，無可否認，亦能引起學生的學習興趣，內在的愉快感覺更驅動學生積極的學習。要在課堂揮灑自如，靈活安排數學教學活動和熟練地讓學生愉快地建構可行的數學知識，對我們來說，確是一大挑戰。

參考資料

香港課程發展委員會（1983)。《小數課程綱要 - 數學科》。香港：香港課程發展委員會。

香港課程發展議會(2000)。《數學教育領域數學課程指引(小一至小六)》。香港：香港印務局。

Gullberg, J. (1997). *Mathematics – From the Birth of Numbers*. N.Y.: Norton.

筆記

(I)

輾轉相除法是基於以下的定理。用數學語言表達，這定理可以寫成：假設 A 和 B 是兩正整數，$A > B$，Q 和 R 分別是 B 除 A 時的商和餘數。那麼，A 和 B 的最大公因數 =B 和 R 的最大公因數。

（換言之，被除數和除數的最大公因數等於除數和餘數的最大公因數）

注意：

1. 如果 $R = 0$，因為 0 有無窮多個因數，所以，B 和 0 的最大公因數是 B。所以，A 和 B 的最大公因數 = B。

   （換言之，如果被除數 A 被除數 B 整除，被除數和除數的最大公因數等於除數 B）
2. 整個輾轉相除求最大公因數的過程，與商無關。
3. 以上定理的證明，可參考陳景潤（1978）。《初等數論》。北京：科學出版社。

在小學裏，我們並不鼓勵定理的證明；反之，學生較易理解的方法是利用簡單的、精挑細選的例子檢查、驗證、歸納定理。例如，要檢驗輾轉相除法能否讓我們找到兩正整數的最大公因數（H.C.F.），我們分別選出兩正整數，利用列舉的方法找出它們的 H.C.F.，完成下表。然後，對於表中的每對整數，進行除法的運算。第一次的運算是利用較小的整數（除數）去除較大的一個（被除數）。如果餘數不是零的話，便將這餘數去除這次運算的除數。如果經過運算後，餘數仍然

不是零的話，便再將這次運算後的餘數去除這次運算的除數，依次類推，直至餘數是零為止。這時，將最後一次除法運算中的除數記錄在表中。完成後，可讓學生比較每對正整數、它們的 H.C.F.、和最後一次除法運算中餘數是零的除數；再比較各對的結果，求同存異，去蕪存菁，猜想各數的關係。然後，學生可自擬新的一對正整數，重覆以上各步驟，檢查和證實猜想。在整個探究的過程中，學生除了鞏固列舉法求 H.C.F.的技巧、重看整數除法和餘數概念之外，亦在不知不覺間學習輾轉相除的技巧，增強創造力和批判性思考能力。

	整數	整數	H.C.F.	最後一次除法運算中餘數是零的除數
1.	8	6		
2.	6	9		
3.	10	8		
4.	11	6		
5.	7	10		
6.	6	10		
7.				
8.				

(II)

用數學語言表達，這定理可以寫成：假設 A 和 B 是兩正整數，G 和 L 分別是 A 和 B 的最大公因數和最小公倍數。那麼，$A \times B = G \times L$。

用日常的用語，我們說，兩數相乘等於最大公因數乘最小公倍數。我們亦可說，最小公倍數等於兩數相乘後除以最大公因數。

以上定理的證明，可參考陳景潤（1978）。《初等數論》。北京：科學出版社。

在小學裏，可讓學生利用列舉因數和倍數的方法，找出最大公因數（H.C.F.）和最小公倍數（L.C.M.），完成下表，初步歸納四個數的關係。然後，再讓學生設計多幾對新的整數，找出最大公因數和最小公倍數，檢查自己的猜想，作進一步的推斷和總結。

	整數	整數	H.C.F.	L.C.M.
1.	2	3		
2.	3	4		
3.	5	6		
4.	4	6		
5.	6	8		
6.	6	9		
7.				
8.				

(III)

用數學語言表達，這定理可以寫成：假設 a，b，c 是三條線段的長(長度單位相同)，$c \geq a$，$c \geq b$。如果 $c < a + b$，那麼這三條線段可圍成一個三角形。

我們可利用餘弦定理證明。

先證 $$-1 < \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < 1 \qquad (1)$$

證明

$$-1 < \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2ab < a^2 + b^2 - c^2 < 2ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < (a+b)^2 - c^2 \text{ 和 } 0 < c^2 - (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < (a+b+c)(a+b-c) & (2) \\ 0 < (c+a-b)(c-a+b) & (3) \end{cases}$$

由於線段的長必為正數，所以，$0 < a+b+c$，

同時，根據假設 $c < a+b$， 換言之，$0 < a+b-c$。所以，不等式 (2) 成立。

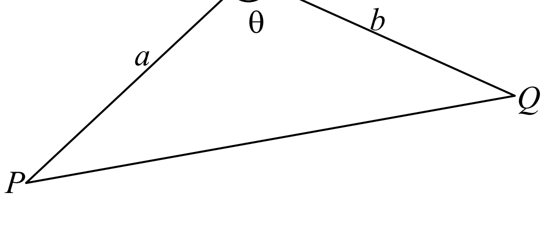
又根據線段的長必為正數和假設 $c \geq a,\ c \geq b$，所以

$$0 < (c-b) + a = c + a - b \quad \text{和} \quad 0 < (c-a) + b = c - a + b$$

即不等式 (3) 成立。因此，(1) 式 $-1 < \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < 1$ 成立。

又由三角函數餘弦的定義，我們可以找到一和唯一的角，叫做 θ，使得 $0° < \theta < 180°$ 和 $\cos\theta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

利用這角 θ，和長度分別是 a 和 b 的線段，我們可以構作一個夾角是 θ 的三角 PQC，如圖。



現在設 $PQ=k$
利用餘弦定理，

$$\begin{aligned} k^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\theta \\ &= a^2+b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right) \\ &= c^2 \\ k &= c \end{aligned}$$

即存在一個三角形，它的三邊邊長分別是 a、b、c。定理得證。

讀者亦可自行證明：假設三角形 ABC 的邊長分別是 a、b 和 c（長度單位相同）。如果 c 為最大，則 $c<a+b$ 。［提示：$C\neq 0°$，$C\neq 180°$，所以 $-1<\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<1$ 。將不等式化簡，可以得到不等式 (2) 和 (3)。］

在小學的課堂，學生可以在白紙上或方格紙上隨意選取三點，用直線連起三點，繪出一個三角形，再利用厘米單位量度三邊的（大約）長度，便可以驗證最長的一邊必定小於而不等於另兩邊的和。

要注意的是當遇到三邊相同的三角形和兩邊相同而第三邊不同的三角形，學生可能會對最長邊的定義感到困難。例如在三角形
(i) $a=b=c=2$，最長的邊是 2，而其他兩邊是 2 和 2，所以最短的兩邊的和是 $2+2=4$。在三角形 (ii) $a=b=2$，$c=3$，最長的邊是 3，而其他兩邊是 2 和 2，所以最短的兩邊的和

是 $2+2=4$。在三角形 (iii) $a=b=2$，$c=1$，最長的邊是 2，而其他兩邊是 2 和 1，所以最短的兩邊的和是 $2+1=3$。參看下表。

三角形	a	b	c	最長的一邊	其他兩邊		其他兩邊的和
(i)	2	2	2	2	2	2	4
(ii)	2	2	3	3	2	2	4
(iii)	2	2	1	2	2	1	3
(iv)							
(v)							

空白頁

2.　繡曲線—令人賞心悅目的數學

梁潔英

在大多的小學生眼中，數學就等同於數的運算，有些高小的學生甚至會覺得數學困難乏味。須知數學教學的目的除了要讓學生理解及掌握數學的計算技巧外，培養學生的「空間感」，讓他們欣賞圖形的規律及結構也同樣重要（香港課程發展議會，2000，頁 4）。

繡曲線正是讓學生體會數學的美的一個好例子。在小學而言，「繡曲線」是小六的增潤項目（6S-E1），其學習重點是讓學生欣賞及製作繡曲線圖樣（香港課程發展議會，2000，頁 49）。在小學的繡曲線一般的做法就是只須畫一組直線，便能讓直線包圍出一個曲線圖樣，如圖 1 和圖 2。

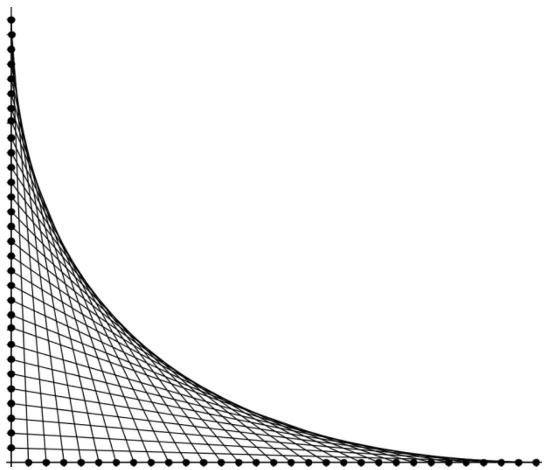


圖 1

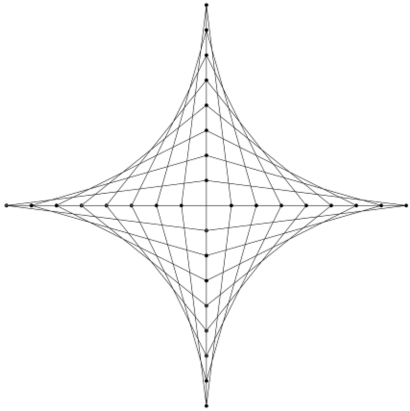


圖 2

探討的問題

我們要如何組合那些直線才可包出曲線圖樣來？究竟有沒有一些法則可遵循？在小學的教科書裏可找到的法則一般是以*整數加的組合*作聯線的指標。

小學所謂的整數是指零和正整數 1，2，3，...，而一般整數 N 的基本加的組合是指（a）N 是正整數，和（b）N 是兩個正整數的和。表一顯示整數 9 的八個基本加的組合。

1	8
2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1

表一: *整數 9 的八個基本組合*

以下說明聯線的方法（稱為*整數組合的方法*）

1. 學生根據整數 N（例如 $N = 9$）的各基本加法組合列表，如表一

2. 繪畫兩相交的直線，交點為零點（以數字 0 標示）

3. 在每線上的零點開始，在相等的距離於線上順次標示數字 1、2、3、...、$N - 1$（以 $N = 9$ 為例：標示的數字為 1、2、3、...、8）。在第一條線上連續的兩個數字的距離是無需與另一線上的兩連續數字的距離相同（如圖 3 以 $N = 9$ 為例）

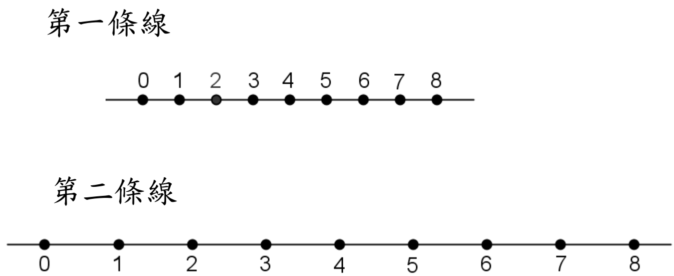


圖 3

4. 利用直線把其中一條線上的數字 1 聯到另一條線上的數字 8；2 聯到 7，3 聯到 6，如此類推，如表二所示

1	➔	8
2	➔	7
3	➔	6
4	➔	5
5	➔	4
6	➔	3
7	➔	2
8	➔	1

表二: *整數 9 的八個基本組合的聯線方法*

圖 4（兩相交的直線大約成直角）是聯線後的結果，在這幅完全只有直線的圖像中隱隱包含了一條曲線！

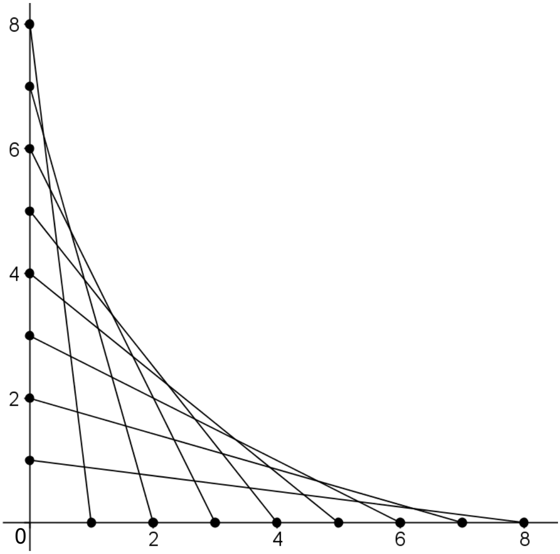


圖 4

是否利用*整數組合的方法*聯出多條直線就能包圍出曲線的樣子來？

在上一節，我們利用了*整數組合的方法*「繡了一條曲線」。值得我們探究的問題是：利用*整數加的組合方法*聯線是否必然可以繡出曲線來？又這聯線的方法是唯一的法則嗎？
圖 5 和 圖 6 均是根據表一的整數 9 的八個基本加的組合和表二的聯線方法，用直線繪出的圖樣。

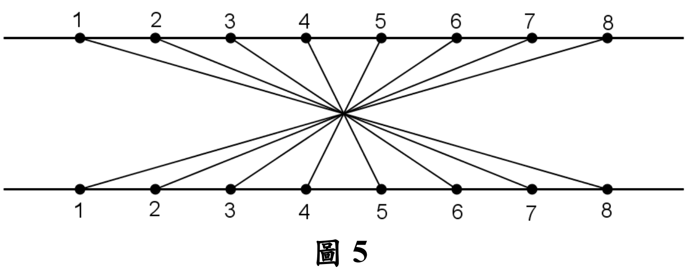


圖 5

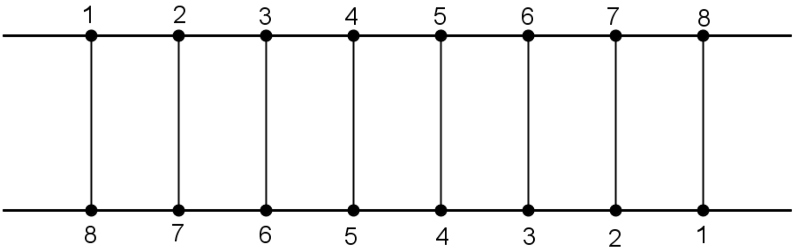


圖 6

這兩幅圖中的直線是平行的；圖 5 中的數字是由小至大、由左到右順次排列而成，圖 6 的數字卻不如圖 5 中的排列方式一樣，由左方開始，第一條線的數字由小到大，而第二條線的數字卻是由大到小。無論如何，我們仍然可以把圖 5 和 圖 6 看成是一些很有規律和美感的圖樣，但它們並不隱含一些曲線在內。由此可見，利用*整數加的組合*作聯線的方法作圖，未必一定可以繡出曲線來，只有兩條如圖 4 中的相交直線，才能繡出曲線。

當然，以上的一個繪圖結果只是一個未經反覆驗證的猜想，教師可引導學生作多角度的探究，通過不同的例子進一步檢查這結果，例如，

1. 利用不同整數的組成（若對象是小一的學生，18 以內數的組成更佳：為將來學習整數的進位加法和退位減法鋪路）

2. 改變平行線的距離（學生可利用方格紙繪畫兩條不相交的直線，而未必需要認識平行和平行線的詞彙。教師亦

可藉此釐清、鞏固學生平行線和平行線距離的概念)

3. 改變刻度間的距離(學生可利用方格紙、直尺、不同的方格數量、長度及長度單位標示數字和刻度 – 可視為學習度量概念和量度技巧的鞏固活動)

相交的數軸會包出怎樣的曲線來?

我們在上兩節察覺到當兩直線不相交時,以*整數加的組合*作聯線的方法並不能繡出曲線(圖 5 和 6),但當兩直線相交時,利用*整數組合的方法*(參考「**探討的問題**」一節)卻似乎能讓我們得心應手。以下我們更進一步,在固定的正整數值 N 下,以兩直線的不同相交角度,包括直角、比直角大及比直角小的角,探討繡出的曲線圖樣的變化。以下稱兩直線為*數軸*,相交的角為*兩數軸的夾角*。 圖 7 至圖 10 為利用不同的夾角繡出的一些曲線圖樣。

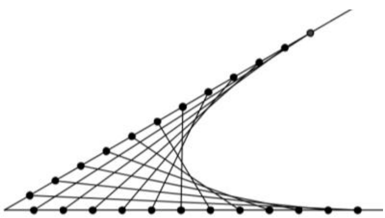


圖 7:夾角比直角小

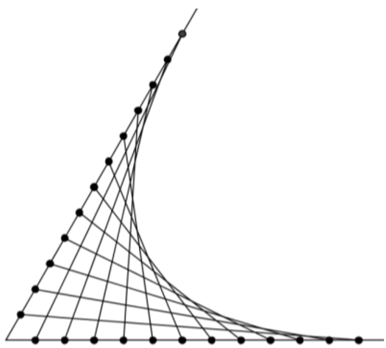


圖 8:夾角比直角小

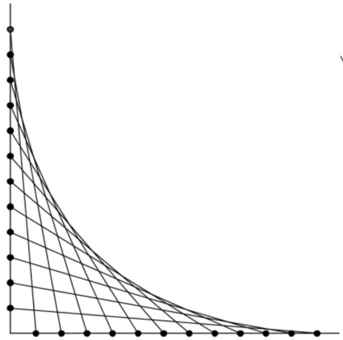


圖 9：夾角是直角

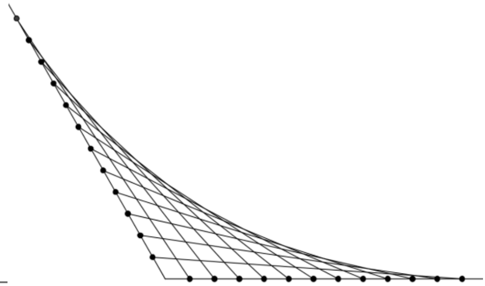


圖 10：夾角比直角大

除了觀察以上的繪圖結果，學生亦可利用改變兩數軸夾角的大小或不同整數的組合繪畫更多不同的圖像，從而歸納：夾角較小或聯出的直線愈多時，曲線就愈明顯。這樣不但可讓學生重溫不同的數的組成，更可加深他們對幾何空間概念的認識。

如何在一條直線上（兩數軸重疊）繡出曲線？

當兩*數軸*相交於 180° 時，它們便變成一條直線，若嘗試以*整數組合的方法*，它只會在這直線上不斷畫出不同長度的直線，包不出任何曲線來，但利用*在線上一點製作垂直這線的垂直線的方法*，和依隨以下的步驟（例如，Bolt, 1985, p. 68），卻能巧妙地在直線上包出了曲線：

1. 任意畫一條直線 *MN*

2. 在直線外固定一點 *A*

3. 在直線上隨意選取一點 P

4. 繪畫過 P 點垂直於 AP 的垂直線 QP（如圖 11）

5. 在直線任意選取不同位置的 20 點 P，重覆步驟 3 和 4（如圖 12）

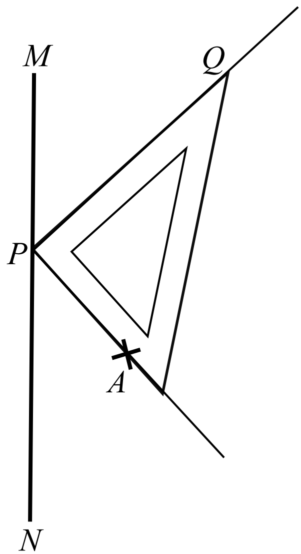


圖 11

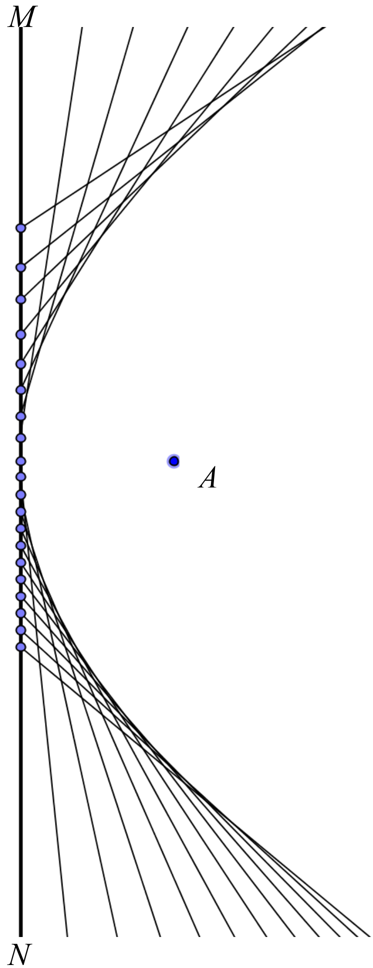


圖 12

這個在一直線上製作繡曲線的活動，既有趣，又可作為訓練學生在不同方位的直線上，繪畫過線上一點的垂直線，這有助學生日後辨認和繪畫多邊形不同邊的高。以圖 13 的平行四邊形 *ABCD* 為例，已知 *P* 和 *Q* 分別在 *AD* 和 *BC* 上。究竟 *QP* 是否平行四邊形 *ABCD* 的高呢？學生可利用剛提及的技

巧在圖 13 找答案。同樣的技巧亦可應用來繪畫以 Q 為頂點的三角形 QAB 的高（圖 14）。

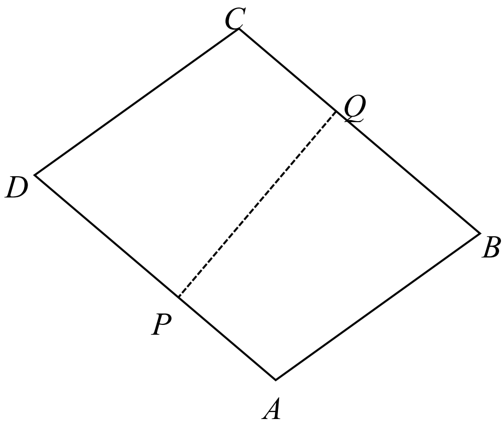


圖 13 QP 是否平行四邊形 $ABCD$ 的高？

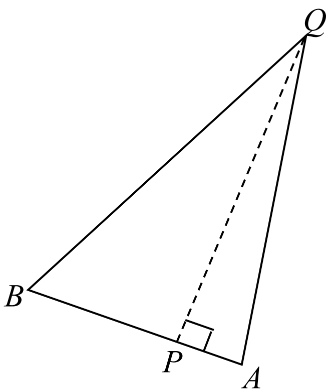


圖 14 試繪畫過 Q 點的高 QP

變化多端的繡曲線圖樣

從以上繡曲線的內容中，我們發覺可以在兩相交的直線上繡出曲線。如果把這方法推展下去，即在所有多邊形內應該也可繡出曲線，而它們繡出來的曲線圖樣又會是怎樣的呢？

例如，一個三角形有三條邊和三個角，就可以看成有三組相交的數軸，所以在三角形內可繡出幾組曲線。又若把各數軸刻度的數目變化一下，繡出來的曲線圖樣就能千變萬化。如圖 15 和 16 中的兩個全等三角形，其中一條數軸的刻度數目不同，繡出的曲線圖樣也不同。教師亦可著學生改變三個角的大小，看看繡出來的曲線圖樣有何不同。

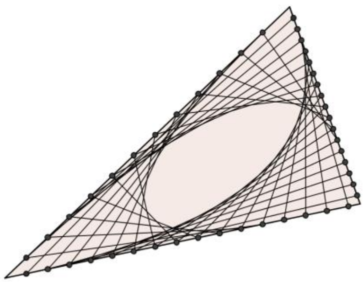


圖 15

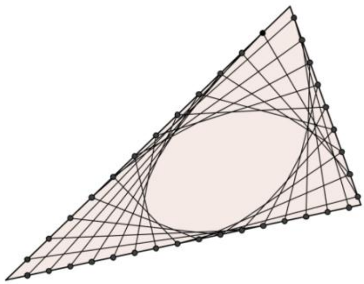


圖 16

當多邊形邊的數目增至無限多時，我們可否在圖形內包出曲線呢？我們又可以利用在直線上製作垂直線的方法，在圓內製作垂直線（例如，Bolt, 1985, p.66）：

1. 任意畫一個圓

2.　在圓裏近周邊的位置固定一點 A

3.　在圓周上隨意選取一點 P

4.　繪畫垂直於 AP 的直線 PQ（如圖 17），Q 點可以在圓周上或在圓外

4.　在圓周上任意選取不同位置的點 P，並重覆步驟 3 和 4

5.　我們可以看到這些直線能包圍出一條曲線（如圖 18）。

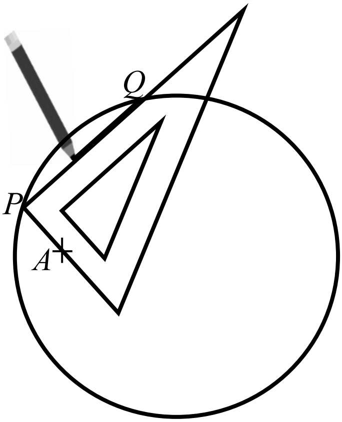


圖 17

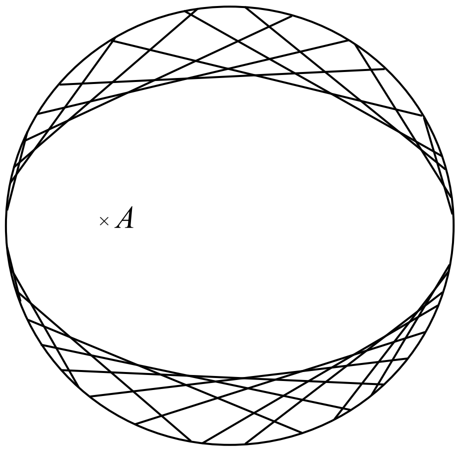


圖 18

由此可見不但是在直線上，或在曲線上，我們也能利用直線包圍出曲線來。

曲線能繡出曲線來嗎？

繡曲線所以受到我們的欣賞是因為直線可繡出曲線，但曲線可否繡出曲線呢？

看看圖 19，它是由九個不同大小的圓組成的曲線圖像 – 橢圓。

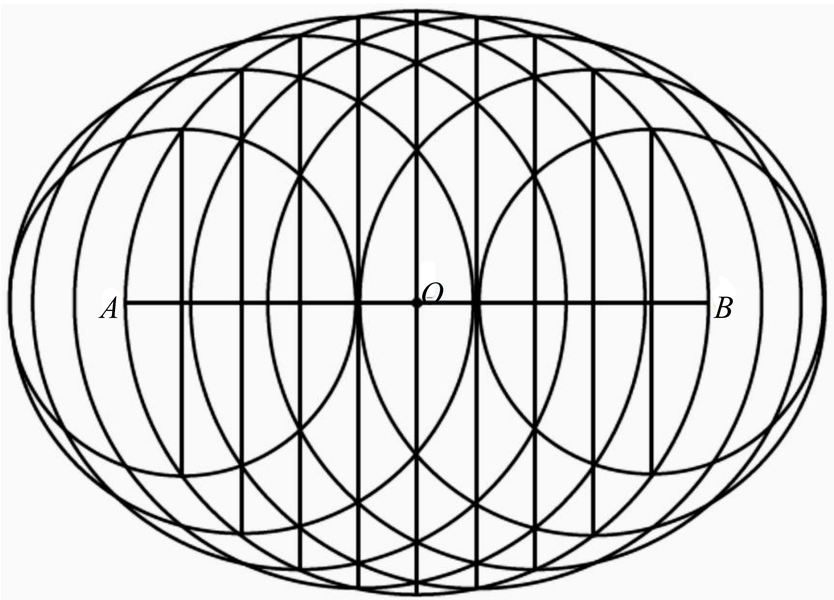


圖 19

相信六年級的學生按照以下的方法（例如，Bolt, 1985, p. 67），定能把圖像製作出來：

1. 先畫一個圓（例如半徑取 5 厘米）

2. 在圓上畫一直徑 AOB，O 為圓心

3. 以每隔 1 厘米為間隙畫出 9 條垂直於 AOB 的直線 PQ，P 和 Q 均在圓周上 (如圖 20，圖中顯示為其中一條 PQ)

4. 以 PQ 為直徑，R 為圓心，畫出一個圓 (如圖 21)

5. 重覆步驟 4

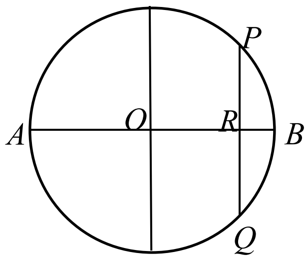


圖 20

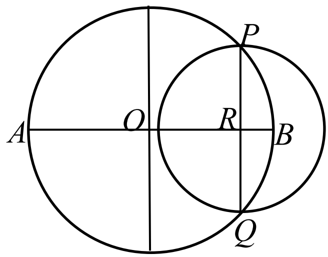


圖 21

在小學哪個年級可引入繡曲線的學習內容

繡曲線是一個很有趣的課題，它涵蓋的數學能力可由小一的數的基本組合以至高中的微積分（例如，可參考 *Penguin Dictionary of Mathematics*, envelope – 包絡 [(I)] – 的定義），所以在設計「繡曲線」的教學內容時，可配合學生的已有知識及學習內容，讓學生從學習數學中欣賞數學的美。

就小學的課程設計而言，學生在初小學習整數的基本加減組合、長度和距離、角的大小、平行和垂直等，都能結合繡曲

線的內容；而高小的學習內容中，除了多邊形和圓的認識外，只要把 $N=a+b$，改為 $N=ma+nb$（a、b、N 均是正整數，而 m 和 n 可以是整數、分數或小數；方程右方的代數式稱為 N 的*線性組合*)，便可配合高小的簡易方程了，如表三和圖 22 的例子。在這個例子中，固定 $N=12$，$m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{3}$，即 $12=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$。先由已知的 a，計算 b，然後將 a，b 連線。

a	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{3}$	b
22	11	1	3
20	10	2	6
18	9	3	9
16	8	4	12
14	7	5	15
12	6	6	18
10	5	7	21
8	4	8	24
6	3	9	27
4	2	10	30

表三：*整數 N 是 12 的線性組合* $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)$

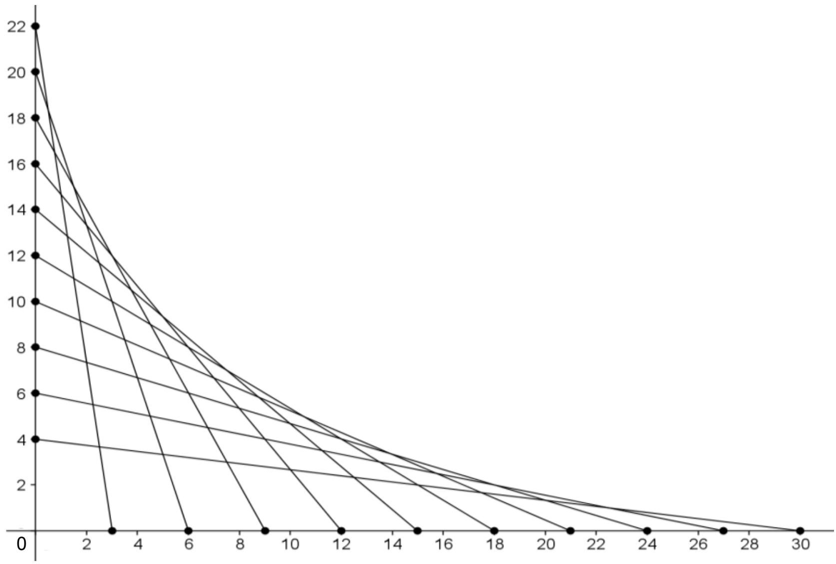


圖 22

參考資料

香港中文大學中文教材發展委員會（1986）。《中學數學科詞彙中譯》。香港：中文大學出版社。

香港課程發展議會（2000）。《數學教育學習領域 — 數學課程指引(小一至小六)》。香港: 政府物流服務署。

Bolt, B. (1985). *More Mathematical Activities: A Resource Book for Teachers*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nelson, D. (Ed.). (2008). *Penguin Dictionary of Mathematics* (4th ed.). London: Penguin Books.

筆記

(I)
《中學數學科詞彙中譯》將 “envelope” 譯作「包絡」(香港中文大學中文教材發展委員會，1986，頁 8)。

3. Similar Figures – A Definition

LEE Chun-yue

Euclidean Definitions

Mathematics textbooks used in Hong Kong junior secondary schools often define similarity either as

1. Two figures are similar if they have the same shape and different sizes; or
2. Two figures are similar if they have the same shape.

Then theorems are established only for similar triangles – theorems that include

1. Two triangles are similar if and only if their corresponding angles are equal;
2. Two triangles are similar if and only if their corresponding sides are proportional.

The theorems are also stated for comparing volumes and surface areas of similar solids.

On the other hand, Euclid and authors of old geometry books[I] defined right away similar rectilinear figures by having the two criteria of

(a) all corresponding angles equal; and
(b) all corresponding sides proportional. (1)

Mayne (1961) in fact defined *same shape* in terms of similar figures.

> Similar figures are said to have the same shape. (p. 332)

After his work on similar rectilinear figures, in book XI of his work, Euclid went on to define similar solids.

> Two solids are similar if they are formed by the same number of similar planes[(II)].

Euclid's definition of similarity has been well recognised, and it is common for textbook to introduce the definition by way of *same shapes*. But could similarity of rectilinear figures be defined in some other ways, without the use of the concept *shape*, and without the presence of the two criteria (a) and (b)? To me, these questions interest me very much. After searching for the answers for quite a while, I discover that similarity of rectilinear figures can actually be defined by means of the concept of transformation, a topic newly introduced in the Hong Kong Secondary Mathematics curriculum in 1999[(III)]. The following shows my argument.

A New Definition for Similarity

I would like to define similar rectilinear figures in the following way.

> Two figures are similar if and only if one of the figures coincides with the other figure within finite number of times of reflection, rotation, translation and/or dilation transformation.

I assume reflection, rotation and translation to have their usual meanings, but dilation is defined here as either a magnification or a contraction[IV]. Mathematically, a point A is transformed by dilation at a point O with a scaling factor k (k being a non-zero real number) to the image A' on the line OA if only if $OA : OA' = k : 1$.

Next, I want to prove that the similar figures under such a definition will have the properties that (a) the corresponding angles of similar figures are equal and (b) the sides about the equal angles are proportional.

I will not discuss reflection, rotation and translation because readers can easily verify that these transformations are rigid motions in which all lengths and angles are preserved. Instead, I will simply focus on dilation and prove the following proposition.

Proposition

In figure 1, AB is any line segment and O is a point of projection. If AB is transformed by dilation at O with scaling factor k (k can be any real number except 0 or 1) to the image $A'B'$ (i.e., for any point U on AB and U' the image of U under the dilation, OU:OU' = k : 1. In particular, OA:OA' = OB:OB' = k : 1), then

1. AB // $A'B'$, and
2. $k\,AB = A'B'$

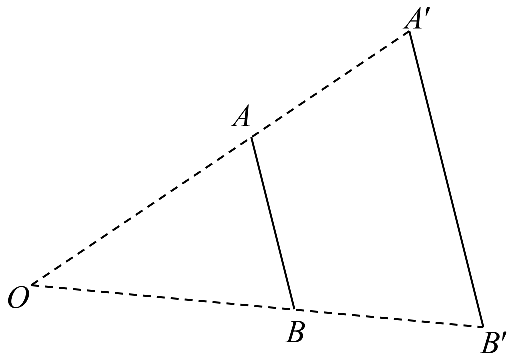


Figure 1

One should note that in usual practice, the results can easily be obtained by properties of similar triangles stated in (1). However, it will fall into "circular reasoning", since the properties of similar figures have not been derived from the definition yet. Hence, to avoid logical loopholes, I need to prove the proposition without using any knowledge of similar triangles. The next section is the proof.

Proof

1° We first prove that $AB \parallel A'B'$.

Assume the contrary, AB and $A'B'$ are not parallel but they intersect at a point X. See Figure 2.

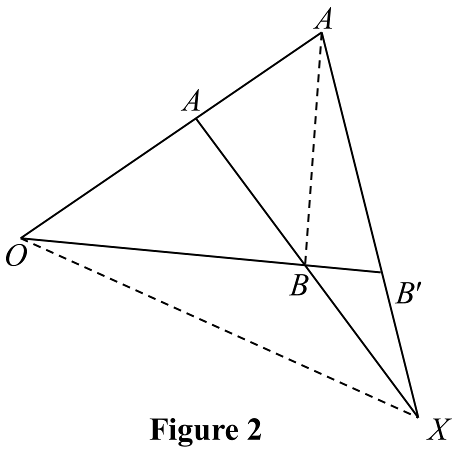


Figure 2

Join $A'B$ and OX. For convenience, we denote the area of each triangle in the figure by a small letter. For example, the area of ΔOAB is denoted by p, the area of ΔOBX by q etc. See figure 3.

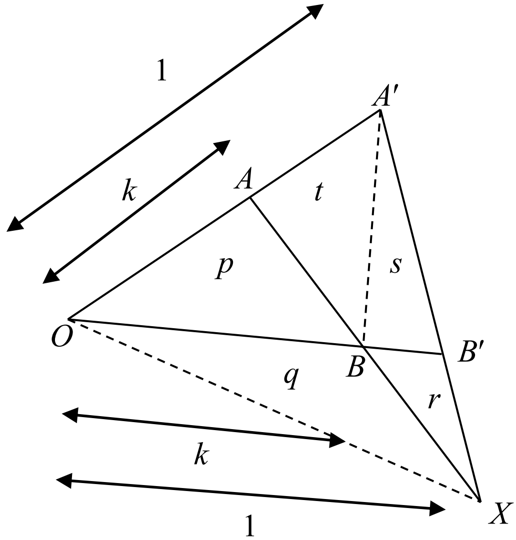


Figure 3

Claim. If $\rho = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ and $\rho = \dfrac{\alpha}{\beta}$, then $\rho = \dfrac{\gamma}{\delta}$ (1)

The proof is left to the reader as an exercise.

Now, using the theorem that areas of triangles of equal heights are proportional to their base lengths, and remembering that $OA : OA' = OB : OB' = k : 1$, we obtain

$$\frac{k}{1-k} = \frac{q+p}{r+(s+t)} \qquad (OA : OA' = k : 1-k) \qquad (2)$$

$$\frac{k}{1-k} = \frac{q}{r} \qquad (OB : OB' = k : 1-k) \qquad (3)$$

From (2) and (3) and comparing the result (1), replacing ρ, α, β, γ, δ respectively by $\dfrac{k}{1-k}$, q, r, p, and $s+t$, we get

$$\frac{k}{1-k}=\frac{p}{s+t} \qquad (4)$$

Also,

$$\frac{k}{1-k}=\frac{p}{t} \qquad (OA : OA' = k : 1-k) \qquad (5)$$

Applying result (1) again to (4) and (5), we get

$$\frac{k}{1-k}=\frac{0}{s}$$

which cannot be true because k is non-zero.

Hence, $AB \,//\, A'B'$.

2° We then go on to prove $k\,AB = A'B'$, or $A'B' : AB = k : 1$, by applying the result $AB \,//\, A'B'$ which we have just shown. Let C be a point on $A'B'$ such that $AC \,//\, BB'$. Join AB'. See figure 4.

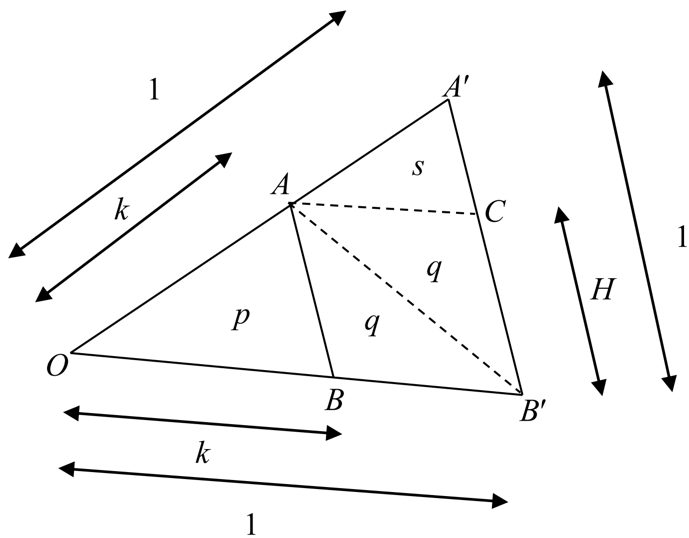


Figure 4

Clearly, $ABB'C$ is a parallelogram, $AB = CB'$.
Suppose that $AB : A'B' = CB' : A'B' = H : 1$.

It is required to show that $H = k$.

As before, we denote the area of each triangle by small letters, as shown in figure 4.

$$\frac{k}{1-k} = \frac{p+q}{q+s} \qquad (OA : OA' = k : 1) \qquad (6)$$

$$\frac{k}{1-k} = \frac{p}{q} \qquad (OB : OB' = k : 1) \qquad (7)$$

Applying result (1) to (6) and (7), we get

$$\frac{k}{1-k} = \frac{q}{s} \qquad (8)$$

But $$\frac{H}{1-H} = \frac{q}{s} \qquad (CB' : A'B' = H : 1) \qquad (9)$$

Hence, $H = k$.
Hence, $AB : A'B' = OA : OA' = OB : OB' = k : 1$.

Thus, the proof is complete.

With this proposition, one can easily conclude that the dilation transformation is angle-preserving (note the parallel property which has been proved). Moreover, given a figure, if it is transformed by dilation all corresponding lengths are proportional. As a consequence, the following statement holds.

If a figure can be transformed by a finite number of times of reflection, rotation, translation and dilation to coincide with another figure, then the corresponding angles of these two figures are equal and all the corresponding lengths of the figures are proportional.

Summary

We have seen different ways in defining similarity of rectilinear figures. Table A is a summary of the three definitions discussed.

Table A

The Three Definitions of Similarity of Rectilinear Figures

	Textbooks	Euclid	My point of view
Two Rectilinear Figures are Similar	Having the same shape	(a) All corresponding angles equal and (b) All corresponding sides proportional	Coincide after a finite number of reflection, rotation, translation and dilation

Similarity of rectilinear figures can indeed be defined by means of transformation. The next question that arouses my interests is therefore: Could similarity of figures of a higher dimension be defined by means of transformation? This is another good question that is worth studying.

Notes

(I)

Such a definition can be found in a book *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (2nd ed., Vols. 1-13), New York: Dover, written in 1925 by Heath, Sir Thomas Little. The book was in fact translated from the text of Heiberg – published in 1908.

The definition can also be found in p.332 of *The Essentials of School Geometry*, written by Mayne in 1961, and published in London by Macmillan.

Such a definition can also be found in page 142 of the book 藍紀正、朱恩寬（1992）。《歐幾里得幾何原本》。台北：九章。The book was translated from Heath's book *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (2nd ed., Vols. 1-13).

(II)

Such a definition can be found in page 463 of the book 藍紀正、朱恩寬（1992）。《歐幾里得幾何原本》。台北：九章。The book was translated from Heath's book *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (2nd ed., Vols. 1-13).

(III)

Hong Kong Curriculum Development Council. (1999). *Syllabuses for Secondary Schools – Mathematics Secondary 1-5*. Hong Kong: Printing Department.

(IV)

The *Syllabuses for Secondary Schools – Mathematics Secondary 1-5* used dilation/contraction (Hong Kong Curriculum Development Council, 1999, p. 21), but I prefer to use a single word dilation to stand for both magnification and contraction.

4. 數學的進一步應用—探索托勒密定理及其應用

韋美然

探究托勒密定理[I] 及其應用是高中數學課程必修部分「數學的進一步應用」學習單位的其中一個建議課題（香港課程發展議會與香港考試及評核局，2007, 頁 32）。同學透過探究和應用托勒密定理，在解較複雜的應用題時尋找能提供解題線索的資料，探究不同的解題策略或綜合不同數學環節的知識（香港課程發展議會與香港考試及評核局，2007, 頁 32）之外，亦可從另一角度思考初中曾學習的幾個重要課題，例如，畢氏定理，相似三角形概念，和只限於 0° 和 90° 之間的三角比的關係（香港課程發展議會，1999，頁 26），認識及欣賞他們在初中和高中所學習的不同數學知識 — 例如高中的三角形中的正弦和餘弦定理 — 的連貫性（香港課程發展議會與香港考試及評核局，2007, 頁 11）。

我們因應以上所提及的學習重點，討論托勒密定理及其應用，提供解題線索的資料，探究不同的解題策略或綜合不同數學環節的知識。

托勒密定理

在圓內接四邊形 $ABCD$ 中（圖 1），兩條對角線長度的乘積相等於兩組對邊長度的乘積之和，

即　$(AB)(CD) + (BC)(AD) = (AC)(BD)$

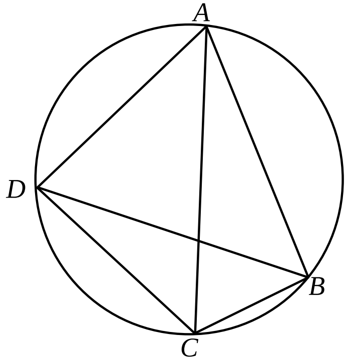


圖 1

老師可以下列方法引導學生證明托勒密定理：

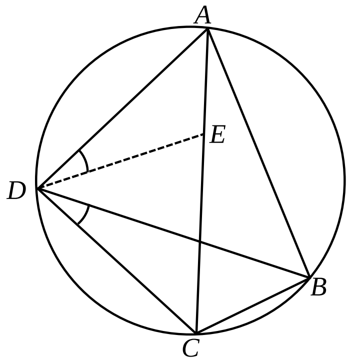


圖 2

先於對角線 AC 加上 E 點使 $\angle ADE = \angle BDC$（圖 2）。

然後，按下列步驟完成證明：

1. 證明 $\Delta ADE \sim \Delta BDC$。
2. 以 AD、BC 及 BD 表示 AE。
3. 證明 $\Delta CDE \sim \Delta BDA$。
4. 以 AB、AC、BD 及 CD 表示 AE。
5. 證明 $(AB)(CD) + (BC)(AD) = (AC)(BD)$

歸納推理

教師可讓學生分別繪畫不同大小的圓，在圓的周界上任選四點，順序標示為 A、B、C、D，如圖 1。量度各長度 AB、BC、CD、DA、AC 和 BD，然後驗證等式

$$(AB)(CD) + (BC)(AD) = (AC)(BD)$$

定理分析：充分條件

在任意的圓中，如果有一內接四邊形 $ABCD$（即四邊形 $ABCD$ 的四個頂點 A、B、C、D 都是在圓周上），那麼，以下的相等關係必定成立：

> 兩組對邊長度的乘積之和（即對邊長度相乘之後，然後相加）相等於兩條對角線長度的*乘積*（即對角線長度相乘）

換言之，結論會為一個等式：等式的一方為一個乘積；另一方為兩個乘積的和。

應用

當學生認識了托勒密定理以後，我們便可舉不同的例子幫助學生瞭解托勒密定理的實用性。教師可先讓學生嘗試解決問題和說出問題的不同解法，透過同學和教師的討論，學生作出自己的解題策略。當然，教師亦可利用例如 Polya 波利亞[II] 所建議的解決問題策略，先與學生探究未知和已

知資料的關係，設定計算或證明的步驟；教師可示範思考的方向，讓學生完成他們能做到的計算和證明。

例一：在圖中，$ABCD$ 是一圓內接四邊形。已知 $AB = 13$, $BC = 20$ 及 $AC = 21$。若 AD、BD 及 CD 的長度分別為 $2x$, $5x$ 及 $5\sqrt{13}$，求 x 的值。

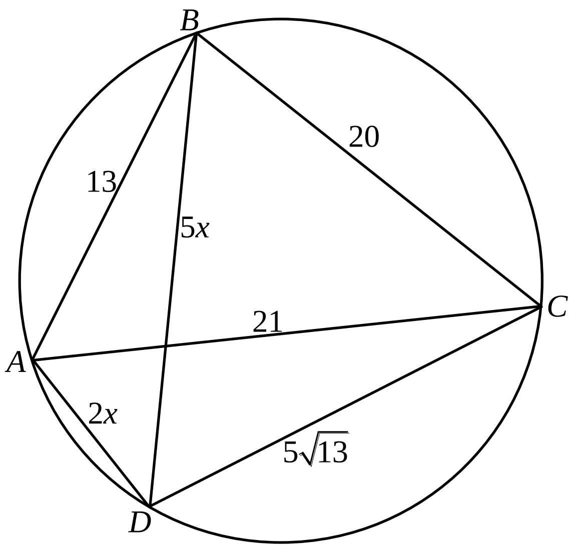


圖 3

解題思路

教師可參考下列的步驟與學生探索和討論解決問題的方向。

了解題目。圖 3 是一個圓內接四邊形，除了一邊 AD 和對角線 BD 之外，其他的邊和對角線的長度都以實數表示，是已知的數值。ΔABC 的三條邊都是以實數表示，並沒有未知數；其他的三角形都有未知數 x。現在要找出 x 的值。

看着未知數 x。學生的已有知識對解題策略有決定性的影響。

如果學生已懂得托勒密定理。兩組對邊長度的乘積之和（對邊長度相乘之後，然後相加）相等於兩條對角線長度的*乘積*（長度相乘）即時成立：

$$20(2x)+13\left(5\sqrt{13}\right)=21(5x) \qquad (1)$$

(1) 是未知數 x 的一元一次方程，問題可解決。

如果學生未懂得托勒密定理。學生卻已認識三角形中的正弦和餘弦定理，解題的思路便略有不同。

看着的未知數 x 出現在 ΔABD 的兩條邊上，而第三條邊是已知的 13。如果能夠將三條邊連起來變成一個方程，解法可能出現！

聯想已有的知識。在任意的三角形中，三條邊的關係似乎可以有兩個在高中學習的定理來表達：正弦定理和餘弦定理。利用一般的符號，我們有

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = R$ (2)

餘弦定理：$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (3)

選擇已有知識。比較 (2) 和 (3)，同時又回到圖 3 中的 ΔABD。(3) 似乎是較合適解決問題的選擇，因為 ΔABD 的三邊是 13，$2x$，和 $5x$，只要知道其中一隻角，便可應用 (3) 來建立只有未知數 x 的方程，問題便可解決。

尋找最可行的角。先考慮 ΔABD。應先計算 ΔABD 中哪一隻角呢？A？B？D？如何選取呢？在這三角形中，我們似乎看不到更多的資料讓我們找到其中一隻角的值。退而求其次，我們要借助其他的已知資料和如果有的話，實際的數值來計算 ΔABD 中的角。

重看題目和圖 3，ΔABC 具備已知的三邊：13、20 和 21。由此，我們可以利用 (3) 來解出 ΔABC 的三隻角 A、B、C。但是，這三隻角又與 ΔABD 的三隻角 A、B、D 何關呢？再看看圖 3，兩三角形中的角 C 和角 D 相等 – 同弓形內的圓周角相等！即 $c = d$（圖 4）。

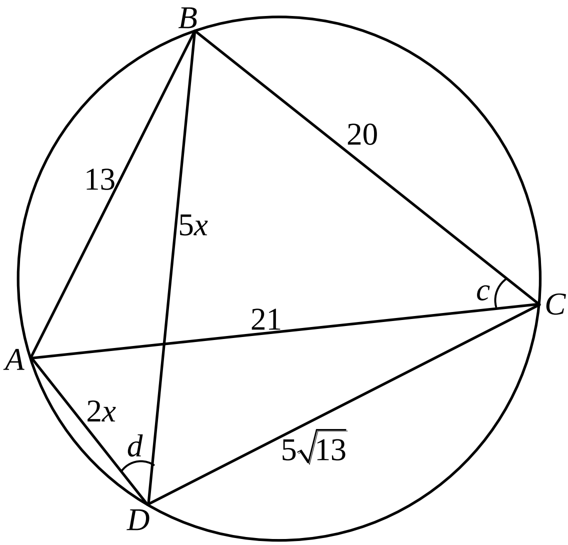


圖 4

因此，學生可以先求 c, 然後利用 $d=c$，解 x。

當然，我們亦應接受學生提供的其他的可行解法。同學可討論各個不同的解，增強自己解決問題的能力。以下是三個合理計算 x 的方法。

一題多解

解法 1：托勒密定理

$$(20)(2x)+(13)\left(5\sqrt{13}\right)=(21)(5x)$$

$$65x=65\sqrt{13}$$

$$x=\sqrt{13}$$

解法 2：餘弦公式

在圖 4 的 ΔABC 中，

$$13^2 = 20^2 + 21^2 - 2(20)(21)\cos c$$

即 $169 = 400 + 441 - 840\cos c$

即 $840\cos c = 672$

$$5\cos c = 4 \qquad (1)$$

在 ΔABD 中，$13^2 = (2x)^2 + (5x)^2 - 2(2x)(5x)\cos d$

即 $169 = 4x^2 + 25x^2 - 20x^2\cos d$

即 $20x^2\cos d = 29x^2 - 169 \qquad (2)$

由於同弓形內的圓周角相同，所以，$c = d$

即 $\cos c = \cos d$

$(1)\times 20x^2 - (2)\times 5$ 得 $80x^2 = 145x^2 - 845$

即 $65x^2 = 845$

$$x^2 = 13$$

所以，$x = \pm\sqrt{13}$

因我們考慮邊長，所以 $x = \sqrt{13}$

解法 3：利用餘弦定理的另一解

在ΔABC 中， $\cos\angle BAC = \dfrac{13^2 + 21^2 - 20^2}{2(13)(21)} = \dfrac{5}{13}$

$\angle BDC = \angle BAC$ (同弓形內的圓周角)
在ΔBCD 中，

$$20^2 = (5x)^2 + \left(5\sqrt{13}\right)^2 - 2(5x)\left(5\sqrt{13}\right)\cos\angle BDC$$

$$400 = 25x^2 + 325 - 50\sqrt{13}\left(\frac{5}{13}\right)x$$

$$\sqrt{13}x^2 - 10x - 3\sqrt{13} = 0$$

$$\left(x - \sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}x + 3\right) = 0$$

$$x = \sqrt{13} \quad \text{或} \quad -\frac{3}{\sqrt{13}} \text{ (捨去)}$$

例二：黃金比

在圖中，$ABCDE$ 是一正五邊形。若正五形的邊長為 1 及 $AC = BE = CE = x$，則 x 為黃金比的值。證明 $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

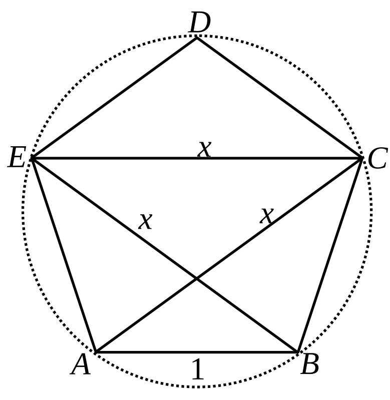


圖 5

解題思路

教師可參考下列的步驟與學生探索和討論解決問題的方向。

了解題目。圖 5 是一個圓內接五邊形。除了對角線的長度 x 之外，其他的邊都以實數 1 表示，是已知的數值。但是，圖 5 中沒有一個圖形的邊是全部以實數表示的，即每一個多邊形如三角形、四邊形等都有未知數 x。現在要找出 x 的值。

看着未知數 x，聯想已有的知識。學生的已有知識對解題策略有決定性的影響。

如果學生已懂得托勒密定理。明顯的圓內切四邊形應該是 $ABCE$，因為它的兩組對邊長度和兩對角線不是 1 便是 x。利用兩組對邊長度的乘積之和與兩條對角線長度的*乘積*可即時建立以下可解的方程：

$$(1)(x)+(1)(1)=(x)(x) \qquad (1)$$

如果學生未懂得托勒密定理。假設學生卻已認識了

1. 初中的多邊形內角和公式、三角形的各性質等，和高中的三角形正弦和餘弦定理，或
2. 初中的相似三角形概念和定理

解題的思路便略有不同。

1.　未知數 x 出現在 ΔABC（或 ΔABE、或 ΔCDE）（圖 6）或 ΔBCE（或 ΔACE）（圖 7）。ΔABC 的三條邊分別是 1、1、x，而 ΔBCE 的三條邊卻分別是 1、x、x。正五角形的每一內角 $= (5 - 2) \times 180° \div 5 = 108°$，而各角的度量分別根據等腰三角形性質計算，記錄在圖 6 和圖 7 中。

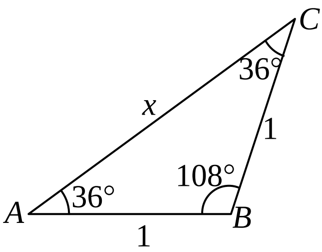


圖 6

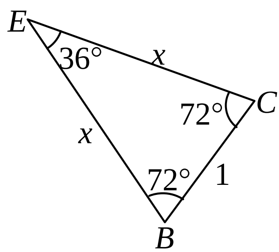


圖 7

顯然，利用三角形的正弦定理或餘弦定理，都應該可以計算 x 吧。例如，在圖 6 中分別應用正弦定理和餘弦定理，我們得

$$\frac{x}{\sin 108°} = \frac{1}{\sin 36°} \tag{2}$$

和

$$x^2 = 2 - 2\cos 108° \tag{3}$$

在圖 7 中分別應用正弦定理和餘弦定理，我們得

$$\frac{x}{\sin 72°} = \frac{1}{\sin 36°} \tag{4}$$

和 $$x^2 = 1 + x^2 - 2x\cos 72° \tag{5}$$

但一般中學生對有關三角函數的值只限於以小數表示，而並未具備以無理數表達 $\sin 36°$、$\cos 108°$ 或 $\cos 72°$ 等數值的能力**(III)**，所以，學生雖然看似可以利用正弦定理和餘弦定理解決這黃金比問題**(IV)**，根據題目的要求，只修讀高中數學課程的必修部分的學生是無能為力的。

2. 未知數 x 出現在 ΔABC 的邊 AC，其他兩邊為 1。計算各角的度量後，圖 8 中所標示的角 α 全是 36°。設 BE 交 AC 於 K（圖 9）。設 $AK = t$。現希望由三角形相似性質找到兩個未知數 x 和 t。

參考圖 9。ΔKBC 是等腰三角形，所以，

$$KC = 1$$

所以， $$x = 1 + t \tag{6}$$

明顯地，$\Delta ABC \sim \Delta AKB$。所以，

$$AC : AB = AB : AK$$

即 $$\frac{x}{1} = \frac{1}{t} \tag{7}$$

由 (6) 和 (7) 消去 t，我們得到只有 x 為未知數的方程

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \tag{8}$$

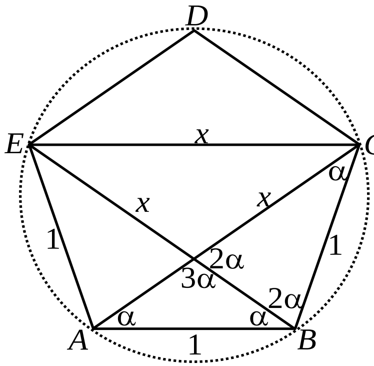


圖 8

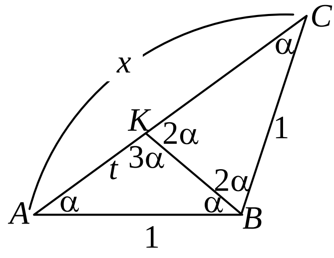


圖 9

一題多解

解法 1：利用托勒密定理

由方程 (1)， $x+1=x^2$

即 $x^2-x-1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$$

因 x 是正，所以 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

從上面的運算得知，同學可利用托勒密定理輕易找出黃金比的值。

解法 2：利用相似三角形

由方程 (8)， $\dfrac{x}{1}=\dfrac{1}{x-1}$

即　$x^2-x-1=0$ ，結果與解法 1 相同。

例三：証明恆等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 0°\le\alpha\le 90°$ **(V)**

解題思路

教師可參考下列的步驟與學生探索和討論解決問題的方向。

了解題目。要證明的恆等式具下列的特色：
恆等式的左方是兩個相同數值 sin α 與 sin α 及 cos α 與 cos α 的乘積的和，而右方可以看成一個相同數值 1 的乘積

看着未知數 *x*，聯想已有的知識。**學生的已有**知識對解題策略有決定性的影響。

如果學生已懂得托勒密定理。只要在圓內選擇一個內切四邊形，使它的一對對邊是 sin α 而另一對對邊是 cos α，同時，兩對角線的長度都是 1 便可以了。圖 10 的 *ABCD* 便是一個這樣的圓內切四邊形：圓的直徑是 1。*AC* 和 *BD* 是兩直徑，所以，*ABCD* 是一長方形。設其中一角 *BAC* 為 α。

如果學生未懂得托勒密定理。學生可以在任何一本初中的課本中找到定理　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$0°\le\alpha\le 90°$

的證明。

解法：利用托勒密定理

$ABCD$ 為一圓內接長方形，而 AC 和 BD 均為該圓的直徑。
設 $AC = BD = 1$ 及 $\angle BAC = \alpha$，
則 $\angle ACD = \angle BAC$ (錯角，$AB \mathbin{//} DC$)

$$BC = AC \sin\alpha$$
$$= \sin\alpha$$

同理，$AD = \sin\alpha$ 及 $AB = CD = \cos\alpha$。
利用托勒密定理，

$$(AD)\,(BC) + (AB)\,(CD) = (AC)\,(BD)$$
$$\therefore \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

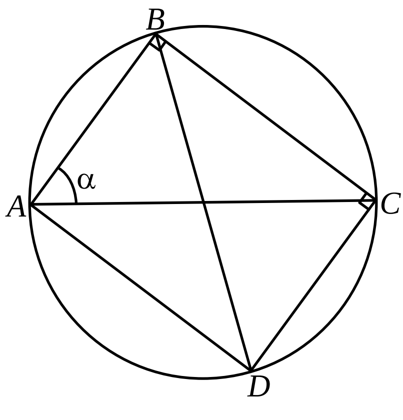


圖 10

活動：試證明畢氏定理。

參考資料

香港課程發展議會（1999）。《中學課程綱要 – 數學科 – 中一至中五》。香港：政府印務局。

香港課程發展議會與香港考試及評核局（2007）。《數學教育學習領域 – 數學課程及評估指引（中四至中六）》。香港：政府物流服務署。

筆記

(I)

托勒密（約公元 90 – 168 年）是古希臘一位舉足輕重的天文學家、地理學家、光學家及數學家。基於當時古希臘人於天文、測量及航海等領域之需要，托勒密編製了弦表，從而發現美麗的托勒密定理。可參考以下文獻：蔡聰明。星空燦爛的數學（II）– 托勒密定理。《數學傳播 24 卷》1 期。中央研究院數學研究所。
網址：
http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d241/24105.pdf

托勒密定理指出：在一圓內接四邊形上，兩對對邊長度之積的和相等於對角線長度之積。（香港課程發展議會與香港考試及評核局，2007, 頁 85）

根據維基百科，上述的定理只是狹義的托勒密定理。它的逆定理也是成立的：若一個凸四邊形兩對對邊乘積的和等於兩條對角線的乘積，則這個凸四邊形內接於一圓。托勒密定理實際上可以看做一種判定圓內接四邊形的方法。托勒密定理是歐幾里得幾何學中的一個關於四邊形的定理。更多有關托勒密定理和它的逆定理的證明方法可參考下列的網址：
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%89%98%E5%8B%92%E5%AF%86%E5%AE%9A%E7%90%86

(II)

可參考 Polya, G. (1990). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). London, England: Penguin.

(III)

因 $\sin 36° = \sin(90° - 54°) = \cos 54°$，設 $\theta = 18°$，$s = \sin\theta$，

我們由 $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

利用倍角定理

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A \text{和} \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

得 $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

即 $2s\cos\theta = \cos\theta\left(4\cos^2\theta - 3\right)$

即 $\cos\theta = 0$ 或 $2s = \left(4 - 4s^2\right) - 3$ （因 $\cos^2\theta = 1 - s^2$）

即 $\theta = 90°$ 或 $4s^2 + 2s - 1 = 0$

即 $\theta = 90°$ 或 $s = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2\times 4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

在這裏 $\theta = 18° \neq 90°$，和 $s = \sin 18°$ 為正，所以，$s = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

因此，$\sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

再利用基本的三角函數關係，我們可得到以下的結果：

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\sin^2 36^\circ = (2\sin 18^\circ \cos 18^\circ)^2$$
$$= \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\cos 36^\circ = \cos 2\times 18^\circ$$
$$= 1-2\sin^2 18^\circ$$
$$= \cdots$$
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

(IV)

讓我們利用例二「解題思路」環節中所建立的方程 (2) 至 (5)

$$\frac{x}{\sin 108^\circ} = \frac{1}{\sin 36^\circ} \tag{2}$$
$$x^2 = 2-2\cos 108^\circ \tag{3}$$
$$\frac{x}{\sin 72^\circ} = \frac{1}{\sin 36^\circ} \tag{4}$$
$$x^2 = 1+x^2-2x\cos 72^\circ \tag{5}$$

和筆記 (III) 的三角函數結果計算 x，從而證明 $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

我們首先處理方程 (2)、(4) 和 (5)，最後才考慮方程 (3)，亦

順道介紹處理無理數式的一些方法。

因 $\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$，方程 (2) 和 (4) 等價，所以由任一方程，我們有

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} \\ &= \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} \\ &= 2\cos 36^\circ \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

由方程 (5)，

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\cos 72^\circ} \\ &= \frac{1}{2\sin 18^\circ} \\ &= \frac{4}{2\left(-1+\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{4\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(-1-\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{4\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2(1-5)} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

現在考慮方程 (3)。

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2-2\cos 108^\circ \\
&= 2+2\cos 72^\circ \\
&= 2+2\sin 18^\circ \\
&= 2+2\times\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

設　$x=a+b\sqrt{5}$ ，a，b 為有理數　(6)

那麼，　$x^2=\left(a^2+5b^2\right)+2ab\sqrt{5}$

設　$a^2+5b^2=\dfrac{3}{2}$　(7)

和　$2ab=\dfrac{1}{2}$　(8)

由 (8)，　$b=\dfrac{1}{4a}$

將 $b=\dfrac{1}{4a}$ 代入 (7)，　$a^2+\dfrac{5}{16a^2}=\dfrac{3}{2}$

所以，　$16a^4-24a^2+5=0$

即　$(4t-5)(4t-1)=0$ ，這裏 $t=a^2$

因為 a，b 都是有理數，所以　$a^2=t=\dfrac{1}{4}$ ，或 $a=\pm\dfrac{1}{2}$

所以，$(a\,,\,b)=(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})$ 或　$(a\,,\,b)=(-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2})$

因為 x 為正，所以，$(a\,,\,b)=(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})$

所以，由 (6)，　　$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

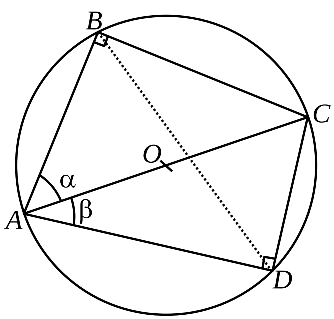
(V)

可用托勒密定理證明不同的三角恆等式。

例如：證明三角複角公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

設 $ABCD$ 為一圓內接四邊形，其中 AC 為直徑，而 $\angle BAC=\alpha$ 及 $\angle DAC=\beta$，$0<\alpha, \beta<90°$。

設 $AC=1$，則 $AB=\cos\alpha$，$BC=\sin\alpha$，$CD=\sin\beta$ 及 $AD=\cos\beta$。



根據托勒密定理，

$$(BD)(AC)=(AB)(CD)+(BC)(AD)$$

$$BD = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \qquad (1)$$

在ΔABD中，根據正弦公式，

$$\frac{BD}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AD}{\sin\angle ABD}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin(90^\circ - \angle DBC)}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin(90^\circ - \angle DAC)} \quad \text{(同弓形內的圓周角)}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\beta}$$

$$= 1$$

$$BD = \sin(\alpha+\beta) \qquad (2)$$

由 (1) 和 (2)，可得 $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$

同學可利用相同的原理證明更多的三角複角公式。

更多的有關利用托勒密定理證明三角函數公式，可參考蘇惠玉。三角函數公式的托勒密方法。《HMP 通訊第四卷》第五期。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm。

空白頁

5. Geometric Construction of a Regular Pentagon – From the Works of Euclid and Richmond

CHENG Sze-man

Ever since the Hong Kong Curriculum Development Council (CDC) introduced the topic “Construct some special regular polygons using straight edges and compasses” in junior secondary schools (CDC, 1999, p. 22), textbooks illustrated this topic by giving the construction of regular hexagons and regular octagons as examples. Students knew how to construct triangles, squares, and then hexagons and octagons. Did anyone ever wonder why they skipped the construction of regular pentagon? Is pentagon not special enough? Or the construction of it was far beyond the reach of students?

The aim of this article is to delve into the construction of a regular pentagon through searching the works of Euclid and H.W. Richmond (as cited in Coxeter, 1969) and on the basis of their works, introducing “simple” procedures for such a construction.

To begin with the construction, we can start off by considering some simple properties of regular hexagons and regular octagons and see whether there is a similar feature in regular pentagons. Of course, all these regular polygons have equal sides and equal angles, meanwhile, for the regular hexagon and octagon, we can regard them as composing six and eight congruent equilateral and isosceles triangles respectively, and their vertical angles are respectively of size 60° and 45°. These are special angles as far as the studies of Geometry and Trigonometry are concerned. How about a regular pentagon? The vertical angle is 72° which is not a special angle, so using special angles in construction seems not feasible this time.

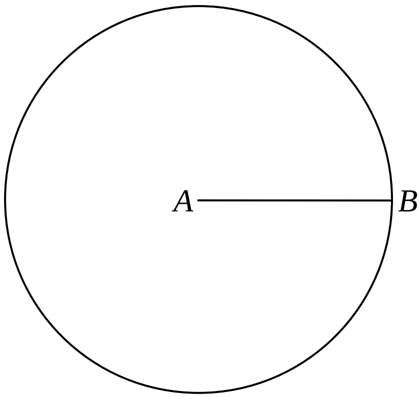
It seems that we are stuck here as there is no direct construction of an isosceles triangle with a vertical angle 72° as far as Euclid's *Elements* is concerned. But it is not totally impossible to accomplish the task. Reading the *Elements*[I] again and we find that there is a way to construct an isosceles triangle such that the size of each base angle is twice that of the other angle (i.e. a 36°-72°-72° triangle), which is Proposition 10 in Book 4 of Euclid's *Elements*. On the basis of this finding, we will first try to construct an isosceles triangle with a vertical angle of 36° to obtain a regular decagon, and hence a pentagon. Let us call it 36°-method. Next, we use Richmond's method to construct a 72° angle at the centre of a circle to obtain directly a pentagon and call it 72°-method.

The Construction of a Regular Decagon (36°-method based on Euclid)

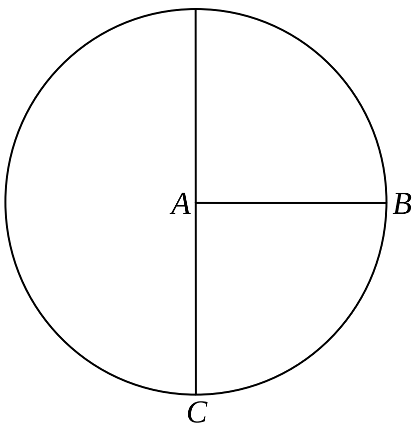
Though Euclid gave a construction method, it was far too complicated. The following construction is based on Euclid and further elaborated by George E. Martin in his *Geometric Constructions*.

Use A_{XY} to denote a circle centre at A and radius XY.

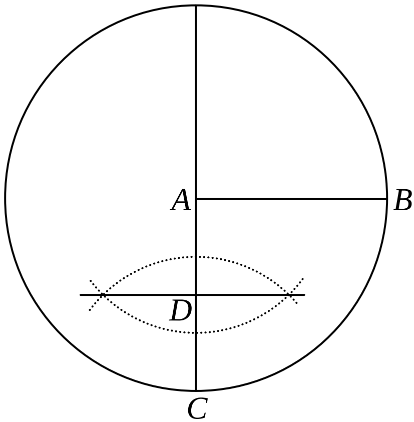
1. Draw a circle A_{AB} of any radius AB.



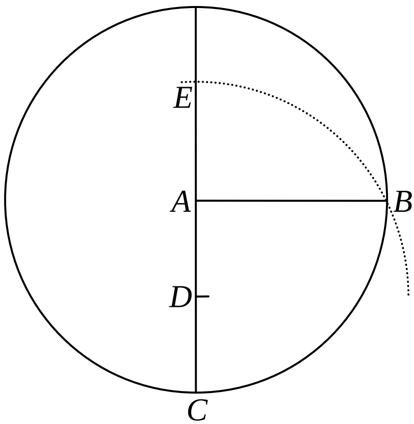
2. Draw a perpendicular line to AB through A and let the line pass through the circle at a point C.



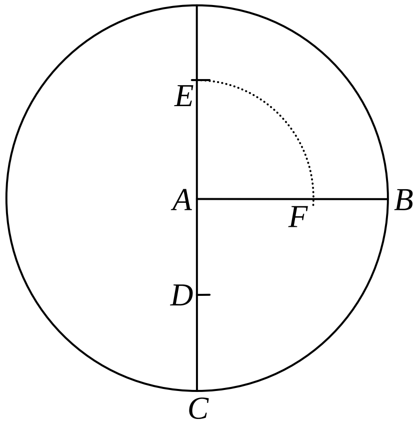
3. Mark the midpoint of AC and label it as D.



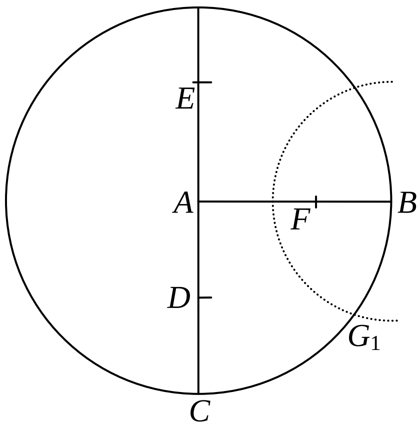
4. Construct a circle D_{DB} so that it will pass through the line CA produced at E.



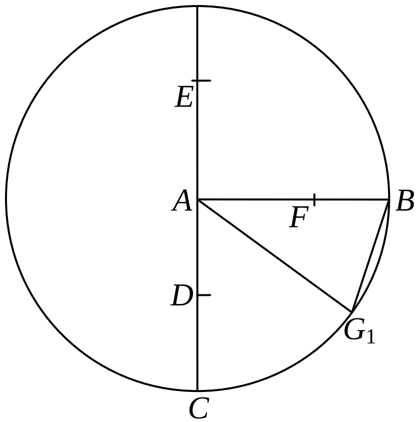
5. Construct a circle A_{AE} so that it passes through the line AB at a point F.



6. Construct a circle B_{AF} so that it will intersect the circle A_{AB} at a point G_1.



7. Join AG_1 and BG_1.



8. The triangle is completed.

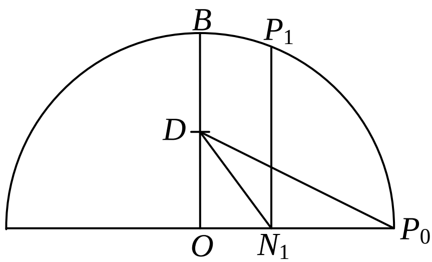
The $\angle BAG_1$ at centre A of the circle can be shown to be 36° (Please refer to the Notes in the previous article 「數學的進一步應用－探索托勒密定理及其應用」) and a regular decagon $BG_1G_2G_3 \ldots G_9$ can be obtained by marking off on the circumference G_1G_2, G_2G_3, …, G_9B equal to the length BG_1. Joining the alternate vertices completes the pentagon.

The Construction of a Peatagon (72°-method based on Richmond)

The prceding method demonstrates a way to construct a particular type of isosceles triangle. However, it still involves too many steps and it may not be easy to understand. Attempts have been made to find other construction methods to do the same task but requiring fewer number of steps. In particular, we wish to create a construction method which can give directly an isosceles triangle with a vertical angle of 72°. Putting it another way, we demand a more direct method of constructing a regular pentagon in a circle.

After studying some traditional Geometry textbooks, the following construction written by Ptolemy and later by Richmond in 1893 (cited by Coxeter, 1969) was found.

> To inscribe a regular pentagon $P_0P_1P_2P_3P_4$ in a circle with centre O : draw the radius OB perpendicular to OP_0 ; join P_0 to D , the midpoint of OB ; bisect the angle ODP_0 to obtain N_1 on OP_0 ; and draw N_1P_1 perpendicular to OP_0 to obtain P_1 on the circle. Then P_0P_1 is a side of the desired pentagon.



The pentagon can then be completed by using a pair of compasses to mark off the other four sides.

From the foregoing paragraphs, one can develop a construction procedure in details. This is left as an exercise. What we are going to do next is to prove the assertion that such a construction will produce a vertical angle of 72°.

Proof

Let $OP_0 = OB = 2$. Then $OD = 1$ and by Pythagoras' Theorem $DP_0 = \sqrt{5}$.

In ΔODP_0, DN_1 is the angle bisector. We can show that

$$\frac{ON_1}{N_1P_0} = \frac{OD}{DP_0} \qquad (1)$$

Next, let $x = ON_1$. Then $N_1P_0 = 2 - x$.
By (1), we have,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2-x} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\sqrt{5}x &= 2 - x \\
\left(\sqrt{5}+1\right)x &= 2 \\
x &= \frac{2}{\sqrt{5}+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{2}
\end{aligned}$$

Now consider ΔON_1P_1.

Since $\angle ON_1P_1 = 90°$, if we let $\theta = \angle N_1OP_1$, then

$$\cos\theta = \frac{ON_1}{OP_1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

which is indeed the cosine value of 72°. Therefore $\theta = 72°$. (Again, please refer to the Notes in the previous article「數學的進一步應用－探索托勒密定理及其應用」). Consequently, the line P_0P_1 is the side of a regular pentagon.

References

Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to Geometry* (2nd ed.). New York: Wiley.

Hong Kong Curriculum Development Council (1999). *Syllabuses for Secondary Schools – Mathematics (Secondary 1 – 5)*. Hong Kong: The Printing Department.

Martin, G.E. (1997). *Geometric Constructions*. New York: Springer.

Notes

(I)

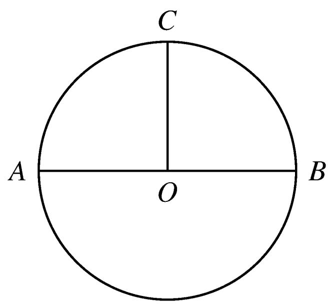
For example, one can refer to *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (2^{nd} ed., Vols. 1-13), New York: Dover, written in 1925 by Sir Thomas L. Heath.

6. 正五邊形尺規作圖法探究活動

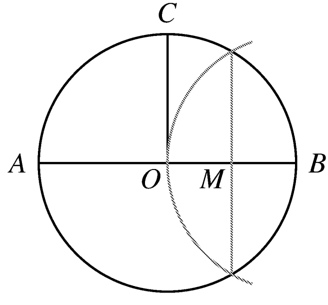
陳少泉

中學生接觸的各種正多邊形尺規作圖法中，常常令學生摸不著頭腦的，必定是以下這個圓內接正五邊形作圖法了：

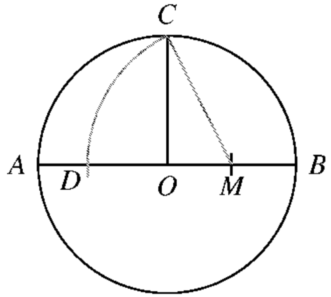
1. 以任意點 O 為圓心，以適當半徑作圓。過 O 作直徑 AB，及作垂直於 AB 的半徑 OC。



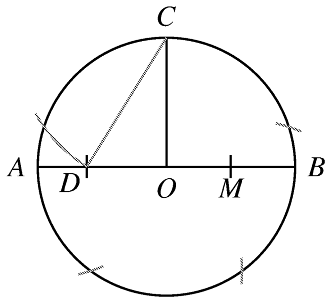
2. 找出 OB 的中點 M。以 B 為圓心，以 BO 為半徑作弧與圓相交。兩相交點之連線與 OB 的相交點為 M。



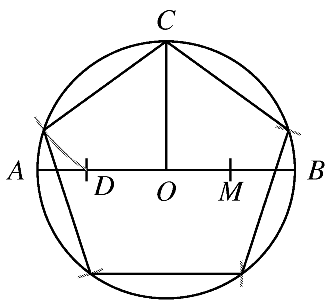
3. 以 M 為圓心，以 CM 為半徑作弧與 OA 相交。設相交點為 D。



4. CD 就是圓內接正五邊形的邊長。以 C 為圓心，以 CD 為半徑在圓周上標示出圓內接五邊形的一個頂點。重複以標出的新點為圓心，以 CD 為半徑在圓周上標示出五邊形其餘的的三個頂點。



5. 以直線連接相鄰頂點得正五邊形，作圖完畢。



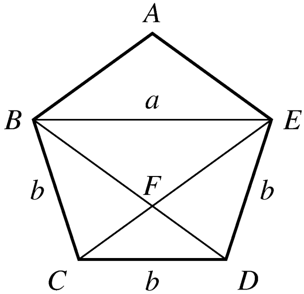
這方法記載於古希臘數學家及天文學家托勒密（Claudius Ptolemy，A.D.90 – A.D.168）的著作 *Almagest* 之中（Pedersen, 2010, pp. 56-57）。托勒密的方法正是《幾何原本》卷二命題十一、卷十三命題九和卷十三命題十的結合（Van Brummelen, 2009, pp. 72-74）。上述步驟 2 至 3 採用了卷二命題十一的黃金比線段作圖法，其中 OC 與 OD 成黃金比。卷十三命題九指出與半徑 OC 成黃金比的 OD 是圓內接正十邊形的邊長。卷十三命題十證明了圓內接正五邊形的邊長、圓內接正十邊形的邊長和圓半徑有勾股數組的關係，從而得知 CD 是圓內接正五邊形的邊長。雖然我們可以使用中學數學解釋以上命題，例如參考《幾何原本》以面積和畢氏定理證明卷二命題十一和以相似三角形去證明卷十三命題十，但相信不是中學生能容易理解的，課堂上亦沒有足夠時間去為托勒密的方法作詳細的解釋。因此在中學階段不妨以這作圖法作為數學欣賞、擴闊眼界、引起興趣或作為學生的專題研習課題之用。

托勒密的方法是「圓內接」的情況。他研究的是弦長而不是單純的正五邊形作圖（Elert, 1994），因此他的作圖法包含了與外接圓半徑有關的幾何定理，即《幾何原本》卷十三命題九和十，但這成為學生理解作圖法的障礙。若我們的挑戰只是以尺規構作正五邊形（而非圓內接正五邊形），則不一定需要這兩個命題，難度因而降低了，學生亦因此有機會較透徹地了解整個方法。下文將介紹一個讓學生自己設計正五邊形作圖法的探究活動。活動要求學生以二次公式解方程，因此較適合在高中課堂裡使用。整個活動可分為三個部分：

活動一（了解正五邊形的黃金比*特性）：

首先可讓學生探究正五邊形的邊長和對角線的比例。給學生的問題可以是：

> **「設正五邊形 *ABCDE* 對角線的長度為 *a*，邊長為 *b*。另設對角線 *BD* 及 *CE* 相交於 *F*。試以 *a* 和 *b* 表示 *CF* 和 *FE* 的長度，然後找出 *a* : *b*。」**

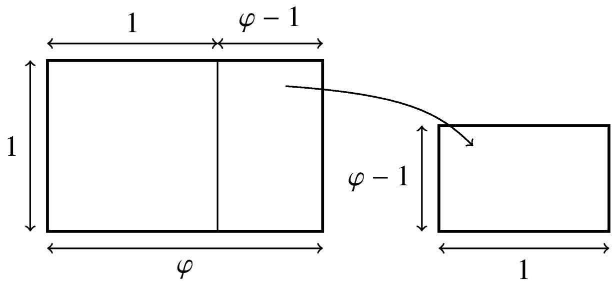


學生考慮上圖各角的大小後，應得知△*EFD* 是等腰三角形。因此得 $EF=b$ 及 $CF=a-b$。接著在找出 $a:b$ 的過程中，學生須考慮相似三角形及使用二次公式。例如考慮△CFD 和△*EFB*，可得 $a:b=b:(a-b)$。設 $\frac{a}{b}=x$，得方程 $x^2-x-1=0$。學生應能解出 $\frac{a}{b}=x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$，即 $a:b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$ $\approx 1.618:1$。

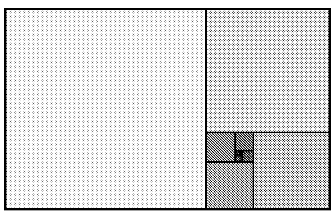
---

* 黃金比的定義：一線段分為長短兩部分，若全線段比長線段等於長線段比短線段，則稱長線段與短線段成黃金比（參考藍紀正、朱恩寬（譯），2002，卷六定義三）。由此定義可計算出長線段與短線段之比是 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$。

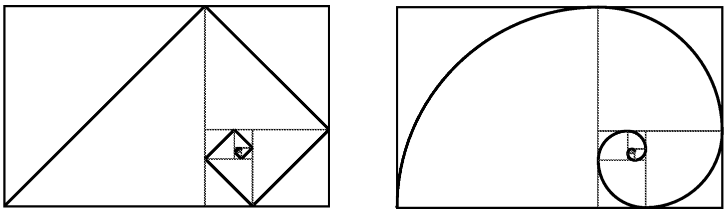
課堂進行到這裡是引入黃金比的好時機。部分學生可能認出 $1.618:1$ 成黃金比。可先與學生分享黃金比的定義以及習慣上我們以符號 φ（或 ϕ，只是另一寫法）代表 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。介紹黃金比可從幾何入手，因為學生對數式 $a:b=b:(a-b)$ 或 $\varphi:1=1:(\varphi-1)$，甚至「長比短等於短比長減短」或許沒有什麼感覺，但對數式的圖像版，即黃金矩形卻可能甚感興趣。可向學生介紹黃金矩形是長闊比為 $\varphi:1$ 的矩形。若從矩形分割出以矩形闊度為邊長的正方形，則餘下的矩形之長闊比是 $1:(\varphi-1)$。從剛才的數式 $\varphi:1=1:(\varphi-1)$ 得知大小兩個矩形的比例相同*。



黃金矩形的比例剛好容許以這種切去正方形的分割法生出小一號的「自己」。教師更可進一步介紹重複這樣的分割後產生的漂亮圖案。（見下圖）



* 黃金矩形亦可以此性質定義：若一矩形能分割為一個以矩形闊度為邊長的正方形及一個和自身相似的小矩形，則該矩形是黃金矩形。



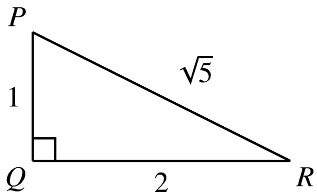
活動一讓學生得知正五邊形的對角線和邊長成黃金比，並使用二次公式求得該比例的真確值為 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$。既然如此，只要學生懂得構作 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，就能繪畫成黃金比的線段，亦能自行創作正五邊形的尺規作圖法了。

活動二（構作黃金比線段）：

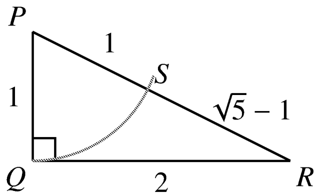
學生繪畫成黃金比的線段，關鍵在於 $\sqrt{5}$ 的構作。這時給學生的挑戰可以是：

> **「給定長度為 1 單位的線段，試以尺規構作長 $\sqrt{5}$ 單位的線段，進而構作一對成黃金比的線段。」**

學生可透過繪畫直角邊為 1 和 2 單位的直角三角形來構作長 $\sqrt{5}$ 單位的線段。教師可考慮給予學生方格紙進行作圖，好處是讓學生能集中思考比例的問題，不用花精神去進行繪畫垂直線段的基本作圖。



若要以上述直角三角形構作黃金比線段，學生可考慮 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}:1=\sqrt{5}+1:2$ 或 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}:1=1:\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-1\right)=1:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $=2:\sqrt{5}-1$。上圖正好有長度為 $\sqrt{5}$、1 和 2 的線段，容易組合成 $\sqrt{5}+1:2$ 和 $2:\sqrt{5}-1$。後者 $2:\sqrt{5}-1$ 似乎較易構作，方法是以 P 為圓心，以 PQ 為半徑畫弧與 PR 相交於 S。$QR:SR=2:\sqrt{5}-1$，成黃金比。

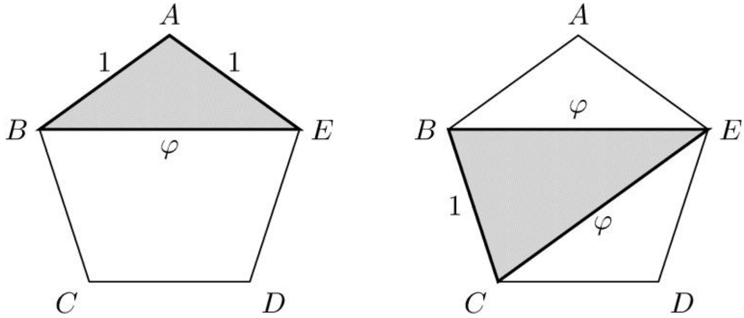


活動三（構作正五邊形）：

最後的探究是

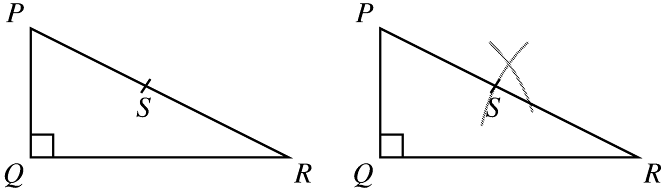
> **「利用在活動二構作的一對黃金比線段，以尺規構作正五邊形。」**

學生須自行結合正五邊形的黃金比性質和黃金比線段的作圖法。教師可提示學生把正五邊形分拆成兩種不同的黃金三角形，分別是邊長為 $1:1:\varphi$ 和 $\varphi:\varphi:1$ 的等腰三角形。

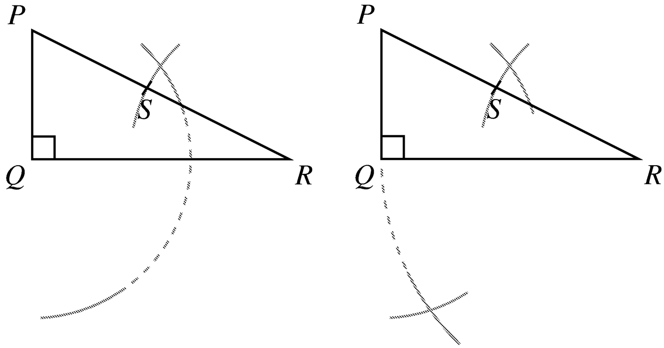


以下是其中一種可能的作圖法，以活動二的 SR 和 QR 構作正五邊形。

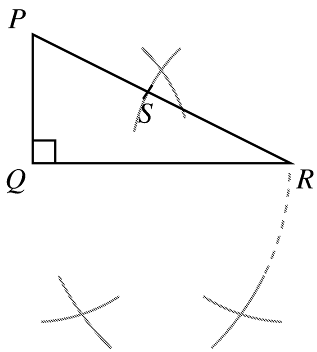
1. 一個較自然的處理是以 QR 為正五邊形的對角線，以 SR 為半徑，分別以 Q 和 R 為圓心在 QR 上方作弧。兩弧的相交點是五邊形的頂點，連同 Q 和 R 成為正五邊形的三個頂點，即上圖的△ABE。



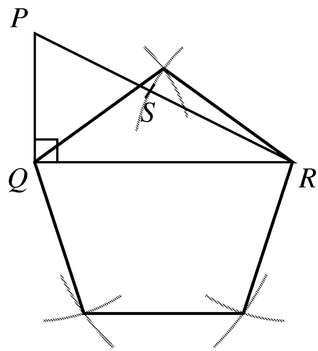
2. 接續繪畫正五邊形下方的頂點，以 SR 為半徑，以 Q 為圓心在 QR 下方作弧。再以 QR 為半徑，以 R 為圓心在 QR 下方作弧與剛才的弧相交。



3. 類似地以 SR 為半徑，以 R 為圓心在 QR 下方作弧。再以 QR 為半徑，以 Q 為圓心在 QR 下方作弧與剛才的弧相交。



4.　最後把各頂點連結，作圖完畢。



以上介紹的活動讓學生從圖形的性質及根式的數值自行想出作圖方法，相信比跟著書本進行不明所以的作圖更有意義。完成活動後學生應可自行讀懂一些互聯網上的正五邊形作圖法，認出作圖法中包含了產生黃金比的 $1:2:\sqrt{5}$ 直角三角形。以上活動的方法並沒有指定正五邊形的邊長，若學生仍有興趣，可加上「以給定線段為正五邊形的一邊」這條件，讓學生試作正五邊形。

在互聯網搜索一下，可發現不同的正五邊形作圖法。各種方法在簡潔及數學的美感上各有不同，例如 H.W. Richmond 的方法步驟簡易而富美感，它巧妙地利用了與三角形角平分線有關的比例關係，以及黃金三角形所衍生的直角三角形的比例，有興趣的讀者可於網上找找看。

參考資料

藍紀正、朱恩寬（譯）（2002）。《歐幾里得·幾何原本》。台灣：九章出版社（本書原本由陝西科學技術出版社於 1990 年出版）。

Elert, G. (1994, June 28). *Ptolemy's Table of Chords: Trigonometry in the Second Century*. Retrieved from http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml

Pedersen, O. (2010). *A Survey of the Almagest: With Annotation and New Commentary by A. Jones*. New York, NY: Springer.

Van Brummelen, G. (2009). *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. U.S.A.: Princeton University Press.

空白頁

7. 香港數學競賽回顧

第 28 屆香港數學競賽已於 2011 年 4 月 9 日順利進行。而聖保羅男女中學、喇沙書院及荃灣官立中學則分別奪得比賽的總冠軍、亞軍及季軍。

頒獎典禮亦緊接著比賽後舉行，大會邀請得香港教育學院文理學院副院長（本科教育及學生事務）及文化與創意藝術學系副教授梁志鏘博士、數學與資訊科技學系系主任及副教授江紹祥博士、教育局總課程發展主任（數學）吳少階先生及高級課程發展主任（數學）梁廣成先生擔任主禮嘉賓。

當天的比賽題目及答案現輯錄如下，以方便各位老師及同學參考及作為未來培訓參賽隊伍之用。

個人項目（一）

1. 若 a, b 及 c 的平均值為 12，及 $2a+1, 2b+2, 2c+3$ 及 2 的平均值為 P，求 P 的值。

   If the average of a, b and c is 12,and the average of $2a+1$, $2b+2$, $2c+3$ and 2 is P, find the value of P.

2. 設 $20112011 = aP^5 + bP^4 + cP^3 + dP^2 + eP + f$，其中 a，b，c，d，e 及 f 為整數及 $0 \le a, b, c, d, e, f < P$。若 $Q = a+b+c+d+e+f$，求 Q 的值。

   Let $20112011 = aP^5 + bP^4 + cP^3 + dP^2 + eP + f$, where a, b, c, d, e and f are integers and $0 \le a, b, c, d, e, f < P$. If $Q = a+b+c+d+e+f$, find the value of Q.

3. 若 R 為 $8^Q + 7^{10Q} + 6^{100Q} + 5^{1000Q}$ 的個位數，求 R 的值。

   If R is the unit digit of the value of $8^Q + 7^{10Q} + 6^{100Q} + 5^{1000Q}$, find the value of R.

4. 若 S 為安排 R 個人圍成圓形的數目，求 S 的值。

   If S is the number of ways to arrange R people in a circle, find the value of S.

個人項目（二）

1. 若方程組 $\begin{cases} x+\ \ y=P \\ 3x+5y=13 \end{cases}$ 的解為正整數，求 P 的值。

If the solution of the system of equations

$\begin{cases} x+\ \ y=P \\ 3x+5y=13 \end{cases}$ are positive integers, find the value of P.

2. 若 $x+y=P$， $x^2+y^2=Q$ 及 $x^3+y^3=P^2$，求 Q 的值。

If $x+y=P$, $x^2+y^2=Q$ and $x^3+y^3=P^2$, find the value of Q.

3. 若 a 及 b 為相異質數且 $a^2-aQ+R=0$ 及 $b^2-bQ+R=0$，求 R 的值。

If a and b are distinct prime numbers and $a^2-aQ+R=0$ and $b^2-bQ+R=0$, find the value of R.

4. 若 $S>0$ 及

$$\frac{1}{S(S-1)}+\frac{1}{(S+1)S}+\cdots+\frac{1}{(S+20)(S+19)}=1-\frac{1}{R}$$

，求 S 的值。

If $S>0$ and

$$\frac{1}{S(S-1)}+\frac{1}{(S+1)S}+\cdots+\frac{1}{(S+20)(S+19)}=1-\frac{1}{R},$$

find the value of S.

個人項目（三）

1. 若P為一質數，而且方程$x^2+2(P+1)x+P^2-P-14=0$的根為整數，求P的最小值。

   If P is a prime number and the roots of the equation $x^2+2(P+1)x+P^2-P-14=0$ are integers, find the least value of P.

2. 已知x^2+ax+b為$2x^3+5x^2+24x+11$及$x^3+Px-22$的公因式。若$Q=a+b$，求Q的值。

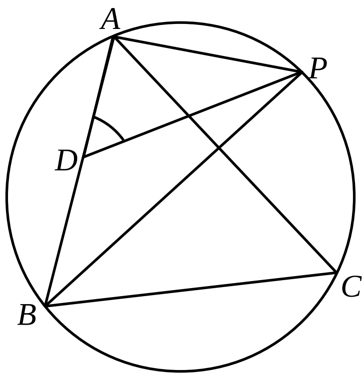
   Given that x^2+ax+b is a common factor of $2x^3+5x^2+24x+11$ and $x^3+Px-22$. If $Q=a+b$, find the value of Q.

3. 若R為一正整數及$R^3+4R^2+(Q-93)R+14Q+10$為一質數，求R的值。

   If R is a positive integer and $R^3+4R^2+(Q-93)R+14Q+10$ is a prime number, find the value of R.

4. 在圖一中，AP、AB、PB、PD、AC及BC為線段及D為AB上的一點。若AB的長度為AD的長度的R倍，$\angle ADP=\angle ACB$及$S=\dfrac{PB}{PD}$，求S的值。

   In Figure 1, AP, AB, PB, PD, AC and BC are line segments and D is a point on AB. If the length of AB is R times that of AD, $\angle ADP=\angle ACB$ and $S=\dfrac{PB}{PD}$, find the value of S.



圖一

Figure 1

個人項目（四）

1. 考慮函數 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$。設 a 為 y 的最大值。求 a 的值。

   Consider the function $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. Let a be the maximum value of y. Find the value of a.

2. 若 b 及 y 滿足 $|b-y|=b+y-a$ 及 $|b+y|=b+a$。求 b 的值。

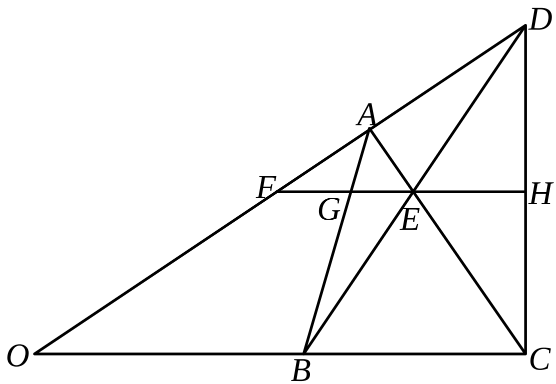
   Find the value of b if b and y satisfy $|b-y|=b+y-a$ and $|b+y|=b+a$.

3. 設 x、y 及 z 為正整數。若 $|x-y|^{2010}+|z-x|^{2011}=b$，而且 $c=|x-y|+|y-z|+|z-x|$，求 c 的值。

   Let x, y and z be positive integers. If $|x-y|^{2010}+|z-x|^{2011}=b$ and $c=|x-y|+|y-z|+|z-x|$, find the value of c.

4. 在圖一中，ODC 為一三角形。已知 FH , AB , AC 及 AD 為線段使得 AB 及 FH 相交於 G，線段 AC , BD 及 FH 相交於 E，$GE = 1$, $EH = c$ 及 $FH//BC$。若 $d = EF$，求 d 的值。

In Figure 1, let ODC be a triangle. Given that FH, AB, AC and BD are line segments such that AB intersects FH at G, AC, BD and FH intersect at E, $GE = 1$, $EH = c$ and $FH//BC$. If $d = EF$, find the value of d.



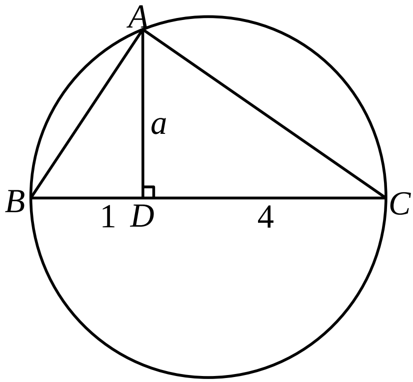
圖一

Figure 1

團體項目（一）

1. 在圖一中，BC 為圓的直徑，A 為圓上的一點，AB、AC 及 AD 為線段，而且 AD 垂直 BC。若 $BD = 1$，$DC = 4$ 及 $AD = a$，求 a 的值。

In Figure 1, BC is the diameter of the circle, A is a point on the circle, AB and AC are line segments and AD is a line segment perpendicular to BC. If $BD = 1$, $DC = 4$ and $AD = a$, find the value of a.



圖一

Figure 1

2. 若 $b=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{-\frac{1}{2}}}}$，求 b 的值。

If $b=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{-\frac{1}{2}}}}$, find the value of b.

3. 若 x、y 及 z 為實數，$xyz \neq 0$，$2xy = 3yz = 5xz$，及 $c=\dfrac{x+3y-3z}{x+3y-6z}$。求 c 的值。

If x, y and z are real numbers, $xyz \neq 0$, $2xy = 3yz = 5xz$, and $c = \dfrac{x+3y-3z}{x+3y-6z}$, find the value of c.

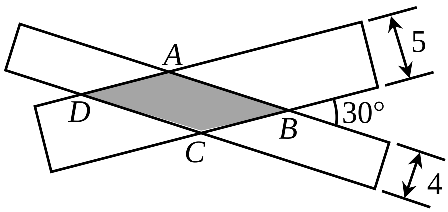
4. 若 x 為一整數滿足 $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$，求 x 的最大值。

If x is an integer satisfying $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$, find the maximum value of x.

團體項目（二）

1. 在圖一中, 兩闊度為 4 及 5 單位的長方形間的夾角為 30°。求重疊部份的面積。

In Figure 1, two rectangles with widths 4 and 5 units cross each other at 30°. Find the area of the overlapped region.



圖一

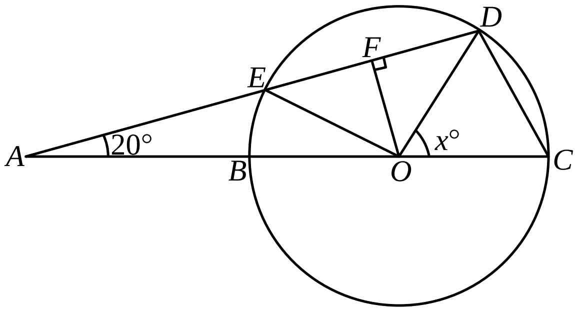
Figure 1

2. 從 1 到 100 選取兩數(容許重覆) 其和大於 100 。問可選得多少對?

From 1 to 100, take a pair of numbers (repetitions allowed) so that their sum is greater than 100. How many ways are there to pick such pairs?

3. 在圖二中的圓，其圓心為 O 及半徑為 r。三角形 ACD 與圓相交於 B、C、D 及 E 點。線段 AE 的長度與圓的半徑相同。若 $\angle DAC = 20^\circ$ 及 $\angle DOC = x^\circ$，求 x 的值。

In Figure 2, there is a circle with centre O and radius r. Triangle ACD intersects the circle at B, C, D and E. Line segment AE has the same length as the radius. If $\angle DAC = 20^\circ$ and $\angle DOC = x^\circ$, find the value of x.



圖二

Figure 2

4. 已知 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$ 及 $\frac{1}{x}-\frac{6}{y}-\frac{5}{z}=0$。若 $P=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$，求 P 的值。

Given that $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$ and $\frac{1}{x}-\frac{6}{y}-\frac{5}{z}=0$. If $P=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, find the value of P.

團體項目（三）

1. 若 a 為一整數及 a^2+100a 為一質數，求 a 的最大值。

If a is an integer and a^2+100a is a prime number, find the maximum value of a.

2. 設 a、b 及 c 為實數。若 1 為 $x^2+ax+2=0$ 的根及 a 和 b 為 $x^2+5x+c=0$ 的根，求 $a+b+c$ 的值。

Let a, b and c be real numbers. If 1 is a root of $x^2+ax+2=0$, and a and b are roots of $x^2+5x+c=0$, find the value of $a+b+c$.

3. 設 x 及 y 為正實數且 $x<y$。若 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 及 $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}$，求 $y-x$ 的值。

Let x and y be positive real number with $x<y$. If $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$and $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}$, find the value of $y-x$.

4. 把數字 1, 2, ⋯ , 10 分成兩組並設 P_1 及 P_2 分別為該兩組數的乘積。若 P_1 為 P_2 的倍數，求 $\frac{P_1}{P_2}$ 的最小值。

Split the numbers 1, 2, 3, ⋯ , 10 into two groups and letP_1be the product of the first group and P_2 the product of the second group. If P_1 is a multiple of P_2, find the minimum value of $\frac{P_1}{P_2}$.

團體項目（四）

1. 若 $P=2\sqrt[4]{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+10\cdot 2010\cdot 2010-9}-4000$，求 P 的值。

If $P=2\sqrt[4]{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+10\cdot 2010\cdot 2010-9}-4000$, find the value of P.

2. 若 $9x^2+nx+1$ 及 $4y^2+12y+m$ 為平方數及 $n>0$，求 $\frac{n}{m}$ 的值。

If $9x^2+nx+1$ and $4y^2+12y+m$ are squares with $n>0$, find the value of $\frac{n}{m}$.

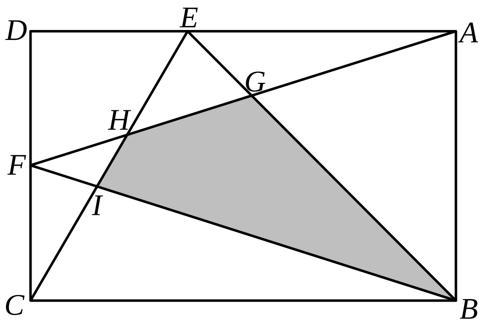
3. 設 n 及 $\frac{47}{5}\left(\frac{4}{47}+\frac{n}{141}\right)$ 為正整數。若 r 為 n 被 15 除的餘數，求 r 的值。

Let n and $\frac{47}{5}\left(\frac{4}{47}+\frac{n}{141}\right)$ be positive integers. If r is the remainder of n divided by15, find the value of r.

4. 在圖一中，$ABCD$ 為一長方形，及 E 及 F 分別為線段 AD 及 DC 上的點。點 G 為線段 AF 及 BE 的交點，點 H 為線段 AF 及 CE 的交點，點 I 為線段 BF 及 CE 的交點。若 AGE，$DEHF$ 及 CIF 的面積分別為 2，3 及 1，求灰色部份 $BGHI$ 的面積。

In figure 1, $ABCD$ is a rectangle, and E and F are points on AD and DC respectively. Also, G is the intersection of AF

and BE, H is the intersection of AF and CE, and I is the intersection of BF and CE. If the areas of AGE, $DEHF$ and CIF are 2, 3 and 1 respectively, find the area of the gray region $BGHI$.



圖一

Figure 1

8. The Fifteenth Mathematics Camp 2010/11

Apart from the 28th Hong Kong Mathematics Olympiad, the Mathematics Education Section (MES) of the Education Bureau and the Hong Kong Mathematics Olympiad Organising Committee also co-organised the 15th Mathematics Camp. The main objective of the Camp is to provide post-competition training on mathematics problem solving skills.

Activities

The Camp was conducted on 14 May 2011(Saturday) from 9:00 a.m.to 4:00 p.m. at the Hong Kong Baptist Assembly, Ping Che Road, Fanling, New Territories.

One hundred and seventy eight students from 32 secondary schools (Appendix A), 32 teachers, 20 student helpers (Appendix B) and members of MES and the Organising Committee members (Appendix C) participated in the activity.

In the morning, there were two talks: one for students and the other one for teachers, respectively given by: Mr LAU Chung-kei of Sheung Shui Government Secondary School presented a talk to students on "A Random Talk in Mathematics and Mathematicians" and Mr TAM Chi-leung of True Light Middle School of Hong Kong presented a talk to teachers on "Geometric Construction".

In the afternoon, there was a Mathematics Trail competition for all participating schools. Students were asked to solve six prescribed problems within two hours. Each problem carries the same marks. The top eight schools with the highest scores and the shortest time spent to solve these problems would be awarded different classes prizes – the top two the First Class prize, the next two the Second Class prize, and the remaining four the Third Class prize.

The Prize Winners

First Class Prize

1. TWGH Lo Kon Ting Memorial College

2. Queen Elizabeth School

Second Class Prize

1. HKMA David Li Kwok Po College

2. St Francis Xavier’s School, Tsuen Wan

Third Class Prize

1. Carmel Bunnan Tong Memorial Secondary School
2. NTHYK Yuen Long District Secondary School
3. Tuen Mun Catholic Secondary School
4. Sha Tin Methodist College

Acknowledgement

The Organising Committee would like to take this opportunity to thank Mr LAU Chung-kei and Mr TAM Chi-leung for their talks to students and teachers. Thanks are also dedicated to the three schools for sending their student helpers to assist in the running of the said activities in the Camp.

Appendix A

The Fifteenth Mathematics Camp – Participating Schools

School Name		學校名稱
1.	SKH Li Fook Hing Secondary School	聖公會李福慶中學
2.	Kwun Tong Government Secondary School	觀塘官立中學
3.	Sacred Heart Canossian College	嘉諾撒聖心書院
4.	TWGH Lui Yun Choy Memorial College	東華三院呂潤財紀念中學
5.	C&MA Sun Kei Secondary School	基督教宣道會宣基中學
6.	HKMA David Li Kwok Po College	香港管理專業協會李國寶中學
7.	Queen Elizabeth School	伊利沙伯中學
8.	Tseung Kwan O Government Secondary School	將軍澳官立中學
9.	TWGHs S.C. Gaw Memorial College	東華三院吳祥川紀念中學
10.	Carmel Divine Grace Foundation Secondary School	迦密主恩中學
11.	Homantin Government Secondary School	何文田官立中學
12.	Ma On Shan St. Joseph's Secondary School	馬鞍山聖約瑟中學

	School Name	學校名稱
13.	Yan Chai Hospital Wong Wha San Secondary School	仁濟醫院王華湘中學
14.	CNEC Lee I Yao Memorial Secondary School	中華傳道會李賢堯紀念中學
15.	Ho Yu College and Primary School (Sponsored By Sik Sik Yuen)	嗇色園主辦可譽中學暨可譽小學
16.	Nam Wah Catholic Secondary School	天主教南華中學
17.	Ho Fung College (Sponsored By Sik Sik Yuen)	可風中學 (嗇色園主辦)
18.	SKH Li Ping Secondary School	聖公會李炳中學
19.	Methodist Lee Wai Lee College	循道衛理聯合教會李惠利中學
20.	Tuen Mun Catholic Secondary School	屯門天主教中學
21.	St Francis Xavier’s School, Tsuen Wan	荃灣聖芳濟中學
22.	Queen Elizabeth School Old Student’s Association Secondary School	伊利沙伯中學舊生會中學
23.	YMCA of Hong Kong Christian College	港青基信書院
24.	Law Ting Pong Secondary School	羅定邦中學
25.	Baptist Lui Ming Choi Secondary School	浸信會呂明才中學
26.	International Christian Quality Music Secondary and Primary School	國際基督教優質音樂中學暨小學

	School Name	學校名稱
27.	POH 80th Anniversary Tang Ying Hei College	博愛醫院八十週年鄧英喜中學
28.	Sha Tin Methodist College	沙田循道衛理中學
29.	Sheung Shui Government Secondary School	上水官立中學
30.	Carmel Bunnan Tong Memorial Secondary School	迦密唐賓南紀念中學
31.	TWGH Lo Kon Ting Memorial College	東華三院盧幹庭紀念中學
32.	NTHYK Yuen Long District Secondary School	新界鄉議局元朗區中學

Appendix B

The Fifteenth Mathematics Camp – Student Helpers

The 20 Student Helpers are from the following three schools:

- HHCKLA Buddhist Ching Kok Secondary School
- Sheung Shui Government Secondary School and
- Tseung Kwan O Government Secondary School

Appendix C

The Fifteenth Mathematics Camp – Members of the Mathematics Education Section and of the Organising Committee Present

Name	Organisation
Mr NG Siu-kai	Mathematics Education Section
Mr WAI Kwok-keung	Mathematics Education Section
Mr CHAN Sau-tang	Mathematics Education Section
Mr CHAN Siu-chuen, Vincent	Mathematics Education Section
Mr CHENG Sze-man, Robert	Mathematics Education Section
Ms HO Yee-hung	Mathematics Education Section
Ms WEI Mi-yine, Lavonne	Mathematics Education Section
Mr CHAN Choi-hop	Mathematics Education Section
Mr KWAN Cheuk-kuen, Anderson	Mathematics Education Section

Name	Organisation
Mr POON Chin-hung	Mathematics Education Section
Mr TAM Chi-leung	Mathematics Education Section
Mr WAN Kwong-chi	Sha Tin Methodist College
Mr CHANG Kwok-kei	Buddhist Sin Tak College
Mr HOI Wai-leung	Hoi Ping Chamber of Commerce Secondary School
Mrs HO TANG Wai-ling	Queen Elizabeth School
Ms LAU Mei-ki	Sheung Shui Government Secondary School
Mr LEE Kwok-kit	King's College
Mr MA Siu-kuen	Tseung Kwan O Government Secondary School
Ms POON Suet-fan	Tuen Mun Catholic Secondary School
Ms WAI Chi-lai	Buddhist Ching Kok Secondary School
Ms WONG Mo-Kuen Felicia	San Wui Commercial Society Chan Pak Sha School

空白頁

9. Mathematics Project Competition and Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2010/11)

Project learning and book reading are two key tasks advocated in the curriculum reform. It is a powerful learning and teaching strategy to promote self-directed and self-regulated learning as well as self-reflection within and across Key Learning Areas. It provides an alternative learning experience, which allows students to have more space for learning.

In this regard, the Mathematics Education Section initiated the Mathematics Project competition (MPC) for Secondary Schools since 2001. Apart from the usual Mathematics Project, Book Reading was included as another item in the competition from 2007 onwards. These competitions aim at promoting the interest of students in learning mathematics and developing students' generic skills through project learning and book reading.

There were 87 projects submitted from 45 schools for MPC this year whereas 173 book reports from 67 schools were submitted for Mathematics Book Report Competition (MBRC).

The Prize-giving Ceremony of Mathematics Project and Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2010/11) cum Exhibition of the Winning Entries was held on 4 July 2011 (Monday) from 2:00 p.m. to 5:00 p.m. at Chiang Chen

Theater LT-J, Hong Kong University of Science & Technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong. 198 students from 42 schools, 49 teachers and 31 members of the Mathematics Education Section and the Organising Committee members of MPC and MBRC participated in the Ceremony. The trophies were presented to the winners in the Ceremony. The winners of the MPC presented their projects and shared their experiences in learning through projects with the audience. Members from the adjudication panel gave a brief account of the entries. The winning entries of the MPC and MBRC were also exhibited at the venue of the Ceremony.

The next page shows the results of (a) MPC and (b) MBRC.

(a) Results of Mathematics Project Competition for Secondary Schools (2010/11)

Result	Team	Title of Project
Champion	Pui Ching Middle School	Further Exploration of Marion Walter's Theorem
1st-runner up	SKH Li Ping Secondary School	萬花尺中的數與理
2nd-runner up	STFA Tam Pak Yu College	靈活掌握速度與合作

Award for Best Presentation

Team	Title of Project
Tsung Tsin College	彈指神通

Teams of Outstanding Performance and Their Winning Projects
（Not arranged in order of merit）

Title of Project	School (In alphabetic order)
三角形遊戲致勝之道	Hong Kong True Light College
Fill and Spill to get your Will!	St Paul's Secondary School

Title of Project	School (In alphabetic order)
進位疑雲	Stewards Pooi Kei College
19=37?! The Boss of Election	Tsuen Wan Government Secondary School
彈指神通	Tsung Tsin College
Tell Me Where You Go 你從哪裏來？哪裏去？	Valtorta College
球紋自 T	Wong Shiu Chi Secondary School
Who is the master of polygon constructions?	Wong Shiu Chi Secondary School

Teams of Good Performance and Their Winning Projects
（Not arranged in order of merit）

Title of Project	School (In alphabetic order)
數獨答案有幾多個？	Buddhist Hung Sean Chau Memorial College
帶螞蟻走上莫比烏斯帶	Christian Alliance S C Chan Memorial College

Title of Project	School (In alphabetic order)
「乘」風破浪	Christian Alliance S C Chan Memorial College
三角無相	Christian Alliance S C Chan Memorial College
Tactix	Christian Alliance S C Chan Memorial College
食樂健康	CNEC Lau Wing Sang Secondary School
香港海底隧道的合理價格一私家車	CNEC Lau Wing Sang Secondary School
最短的派遞路線一找出最短路線演算法	Delia Memorial School (Hip Wo)
飢餓的匈牙利皇帝 The Hungry Hungarian	Diocesan Girls' School
線性規劃	Elegantia College (Sponsored By Education Convergence)
一筆畫	Elegantia College (Sponsored By Education Convergence)
梯子問題	Elegantia College (Sponsored By Education Convergence)

Title of Project	School (In alphabetic order)
長闊比之旅	HKSYC & IA Wong Tai Shan Memorial College
幻術解方	HKSYC & IA Wong Tai Shan Memorial College
畫大畫小	Kiangsu-Chekiang College (Shatin)
車遊大埔之最短路程	Ling Liang Church M H Lau Secondary School
探究青馬大橋與觀境台的距離及兩大橋塔與觀境台的夾角	PLK C W Chu College
Beginning From π-Alliance	Pui Kiu College
BE THE LEGEND	Queen Elizabeth School
正多面體多面體	STFA Tam Pak Yu College
畢氏秘密再也不是秘密	STFA Tam Pak Yu College
數學的三大作圖難題	STFA Yung Yau College

Title of Project	School (In alphabetic order)
「無」中生「有」	STFA Yung Yau College
噢！我們沒有量角器！	STFA Yung Yau College
正凸多邊形的探索	The Methodist Lee Wai Lee College
研究 n 個相似等腰三角形能否砌成 1 個等腰三角形	The Methodist Lee Wai Lee College
pizza pi	The Methodist Lee Wai Lee College
$(2^2)^2$ 的數獨	Tuen Mun Catholic Secondary School
依柏索的生死	TWGHs S.C. Gaw Memorial College
腐蝕惡魔	Yuen Long Public Secondary School

(b) Results of Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2010/11)

First Class Prize Winners
(Not arranged in order of merit)

School	Participant	Title of Book Report
Diocesan Girls' School	WOO Tsz-yu, Isabella	概率遊戲
Diocesan Girls' School	CHI Natalee	HOW TO CUT A CAKE
Elegantia College (Sponsored by Education Convergence)	CHAN Shin-man	《數學小魔女》
Elegantia College (Sponsored by Education Convergence)	NG Tsz-shuen	《心中有數》
HKCWC Fung Yiu King Memorial Secondary School	NG Ka-ka	別讓統計數字騙了你

School	Participant	Title of Book Report
Queen Elizabeth School	LEE Ka-fai	魔「數」王決戰「密碼」船
Tsuen Wan Government Secondary School	LAM Kin-wang	從生活中實踐數學
TWGHs Kwok Yat Wai College	LAU Pui-ching	心裡心裡有個謎！
TWGHs Kwok Yat Wai College	LAM Cheuk-yin	生活中的數學
Wong Shiu Chi Secondary School	LAW Ming-wai	生活中的奧妙

Second Class Prize Winners
(Not arranged in order of merit)

School	Participant	Title of Book Report
Belilios Public School	CHAN Yan-chuen Constance	Math Book Report - Why do Buses Come in Threes?
Belilios Public School	LAI Wun-chi	The Wonder of Mathematics

School	Participant	Title of Book Report
Canossa College	LAI Ka-wing	從《阿草的數學聖杯》看數學與日常生活
CCC Kei San Secondary School	CHAU Ching-han	數字之美
Chinese YMCA College	LI Wing-pui	黃金比例之探索
Good Hope School	KAN Chung-yan, Joyce	Everyday Probability
HKWMA Chu Shek Lun Secondary School	YANG Fan	《數學小魔女》閱讀報告
Hon Wah College	NG Wai-yee	細賞數學—啊！啊哈！哈哈！
Kowloon True Light Middle School	LAI Pui-yan	胚騰——個更令人了解世界的工具
La Salle College	WAN Siu-on	神奇的數字舞蹈
La Salle College	MAK Wai-kit	How to Cut a Cake: And Other Mathematical Conundrums
Lai King Catholic Secondary School	LAI Man-yee	生活・活學・數學

School	Participant	Title of Book Report
Marymount Secondary School	Cheung Hilary	看見隱藏於生活中的奧妙
Marymount Secondary School	NG Man-ling	探索生活中的有趣瑣碎事
PLK No.1 WH Cheung College	CHAN Wing-sum	生活騙子－統計數字！
PLK Tong Nai Kan College	HUANG Shuting	遊戲的情人
Queen Elizabeth School	LAM Wing-sze	知識改變命運：「明智投資，學問為先」
Sha Tin Government Secondary School	LAI Sze-pui, Katherine	Enciphering the code
Sha Tin Government Secondary School	NG Tsz-ming	Could you have survived in the 911 attacks? – The secrets of real-life mathematics
Shau Kei Wan Government Secondary School	WU Tsun-wai	Mathematics is not an alien
Shau Kei Wan Government Secondary School	YU Sin-ting	Mathematics and 3 Reasons

School	Participant	Title of Book Report
St. Francis of Assisi's College	HO Chi-chung	「數學」在身邊
St. Paul's Co-educational College	WONG Yui-hin	尋找統計數字的真相
St. Paul's Convent School	NG Si-zhe	The Advneture in a Cabinet of Mathematics
St. Paul's Convent School	Leigh Vanessa J	An Inspirational Journey
St. Paul's Convent School	WU Lok-yiu	Discovery Math
St. Paul's School (Lam Tin)	MAK Sze-yan, Shirley	生活中的數學
St. Paul's Secondary School	WONG Yui-ting	活在數學中
Stewards Pooi Kei College	CHEONG Hau-wang, Howard	How Intriguing Is Mathematics In Our Daily Life?
Stewards Pooi Kei College	LEE Wing-hong	數學多樂趣

School	Participant	Title of Book Report
STFA Tam Pak Yu College	IP Yau-wai	逆向思考
STFA Yung Yau College	NG Wai-man	從生活學數學（阿草的數學聖杯）
Tak Sun Secondary School	CHU Ka-hei, Michael	Learning Maths in Social Life
True Light Middle School of Hong Kong	HO Pui-lam	數學究竟在哪裏？原來一直都埋藏於你我的生活之中
TWGHs Kwok Yat Wai College	ZHEUNG Linney	數學的趣味
TWGHs Lo Kon Ting Memorial College	YAN Yuen-ching	π 不為人知的秘密
Wong Shiu Chi Secondary School	WONG Yue-ting	洗牌效應
Wong Shiu Chi Secondary School	LAU Ching-shun, Katharos	質數與密碼

空白頁

10. 2010/11 Statistical Project Competition for Secondary School Students

The 2010/11 Statistical Project Competition (SPC) for Secondary School Students, which is organised by the Hong Kong Statistical Society, co-organised by the Education Bureau and sponsored by the Hang Seng Indexes Company Limited, has received fabulous responses. A prize presentation ceremony was held on 30 April 2011 at the Chiang Chen Studio Theatre of the Hong Kong Polytechnic University.

Officiating guests for the Prize Presentation Ceremony included Mrs Lily OU YANG, JP , Acting Commissioner for Census and

Statistics, and Dr CHAN Ka-ki, Deputy Secretary for Education. Mr Daniel WONG, Senior Vice President, Research and Development of the Hang Seng Indexes Company Limited, the sponsor of the Competition, gave a talk on "The Use of the Hang Seng Index" to participants during the Ceremony.

The SPC has been an annual event of the Hong Kong Statistical Society and the 2010/11 SPC is its 25th round. The aim of the Competition is to promote a sense of civic awareness and encourage students to understand the local community in a scientific and objective manner through the proper use of statistics. Participants are requested to select, analyse and interpret official data on any social and economic issues in Hong Kong. The adjudication panel comprises 30 statistics practitioners from local post-secondary institutions and the Census and Statistics Department.

This year, a total of 207 statistical projects from 985 students of 62 secondary schools were received. The projects cover a wide variety of themes, focusing on various social and economic aspects of Hong Kong. Contemporary issues studied by participating students include demographic trends, environmental protection issues and Hong Kong's economic development.

The next page shows (a) winning projects of the Junior Section and (b) winning projects of the Senior Section.

(a) 得獎習作名單 List of Winning Projects, 2010-2011 SPC

獎項 **Prize**	習作題目 **Project Title**	學校名稱 **Name of School**
初級組 **Junior Section**		
冠軍 First Prize	How Statistical Data Collected from Population Censuses/By-censuses Portray the Social Development in Hong Kong - The Convergence of Gendered Lives	拔萃女書院 Diocesan Girls' School
亞軍 Second Prize	Medical Reform, support or not?	皇仁書院 Queen's College
季軍 Third Prize	孤形單影	趙聿修紀念中學 Chiu Lut Sau Memorial Secondary School

獎項 **Prize**	習作題目 **Project Title**	學校名稱 **Name of School**
二零一一年人口普查初級組最佳專題習作獎 2011 Population Census Prize for the Best Thematic Project for the Junior Section	How Statistical Data Collected from Population Censuses/By-censuses Portray the Social Development in Hong Kong - The Convergence of Gendered Lives	拔萃女書院 Diocesan Girls' School
統計習作比賽廿五週年初級組最佳統計海報獎 25th Anniversary of the Statistical Project Competition Prize for the Best Statistical Poster for the Junior Section	從2006年中期人口統計看香港人口問題	元朗商會中學 Yuen Long Merchants Association Secondary School
優異獎 Distinguished Prize	The Change of Hong Kong's GDP under the Financial Tsunami	拔萃女書院 Diocesan Girls' School

獎項 **Prize**	習作題目 **Project Title**	學校名稱 **Name of School**
優異獎 Distinguished Prize	香港私人住宅的樓價變化及其影響因素	可立中學(嗇色園主辦) Ho Lap College (Sponsored by the Sik Sik Yuen)
優異獎 Distinguished Prize	How Statistical Data Collected from Population Censuses/By-censuses Portray the Social Development in Hong Kong	香港神託會培基書院 Stewards Pooi Kei College

(b) 得獎習作名單 List of Winning Projects, 2010-2011 SPC

獎項 **Prize**	習作題目 **Project Title**	學校名稱 **Name of School**
高級組 **Senior Section**		
冠軍 First Prize	The Impact of Past Financial Crises on the Social and Economic Aspects of Hong Kong (CHENG Ming-kwan et al.)	英皇書院 King's College
亞軍 Second Prize	Mainlander Arrivals and Baby Boom in Hong Kong	香港神託會培基書院 Stewards Pooi Kei College
季軍 Third Prize	The Impact of Past Financial Crises on the Social and Economic Aspects of Hong Kong (CHAN Long-hin et al.)	英皇書院 King's College

獎項 **Prize**	習作題目 **Project Title**	學校名稱 **Name of School**
恒生指數有限公司高級組最佳專題習作獎 Hang Seng Indexes Company Limited Prize for the Best Thematic Project for the Senior Section	The Impact of Past Financial Crises on the Social and Economic Aspects of Hong Kong (CHENG Ming-kwan et al.)	英皇書院 King's College
優異獎 Distinguished Prize	The Impact of Past Financial Crisis on the Social and Economic Aspects of Hong Kong	庇理羅士女子中學 Belilios Public School
優異獎 Distinguished Prize	金融危機對香港社會及經濟的影響	趙聿修紀念中學 Chiu Lut Sau Memorial Secondary School
優異獎 Distinguished Prize	老？唔老？	嗇色園主辦可藝中學 Ho Ngai College (Sponsored by Sik Sik Yuen)

獎項 **Prize**	習作題目 **Project Title**	學校名稱 **Name of School**
優異獎 Distinguished Prize	貧苦? 貧富!	保良局第一張永慶中學 Po Leung Kuk No.1 W.H. Cheung College
優異獎 Distinguished Prize	The Real Action Blue Sky	聖保羅男女中學 St. Paul's Co-educational College

空白頁

11. 2010/11 Statistics Creative Writing Competition

The 2010/11 Statistics Creative-Writing Competition (SCC), co-organised by the Hong Kong Statistical Society and the Education Bureau (sponsored by the Department of Statistics and Actuarial Science, the University of Hong Kong), aimed to raise the interest of secondary school students in statistics and its application; and to encourage them to creatively express in words the daily application of statistical concepts or put statistical concepts into a story in a scientific and objective manner. This year was the 2nd round of the SCC.

The 2010/11 Statistics Creative-writing Competition, which commenced in November 2010, attracted 92 participating students from 20 schools with a total of 61 submissions. After a series of adjudication and interviews, 9 awarded entries were eventually selected. The prize presentation ceremony was held at Mrs. Padma Harilela Lecture Theatre (WLB104), Lam Woo International Conference Centre, Hong Kong Baptist University on 25 June 2011.

We were honoured to invite Mr FUNG Hing-wang, SBS, JP, Commissioner for Census and Statistics, Dr CHEUNG Kwok-wah, Principal Assistant Secretary, Education Bureau, and Mr TANG Wai-kong, Leslie, President of the Hong Kong Statistical Society, as the guests of the Ceremony. The teams winning the first three prizes were also invited to give presentations on their creative writings/stories and share the joys with us. The awarded entries would later be printed in the publication issued by the organisers.

得獎習作名單 List of Winning Projects

獎項 Prize	習作題目 Project Title	學校名稱 Name of School
冠軍 First Prize	做統計,我唔制。責任制？！	荃灣官立中學 Tsuen Wan Government Secondary School

獎項 Prize	習作題目 Project Title	學校名稱 Name of School
亞軍 Second Prize	學業進步!？	東華三院吳祥川紀念中學 TWGHs S.C. Gaw Memorial College
季軍 Third Prize	只差一點點	粉嶺禮賢會中學 Fanling Rhenish Church Secondary School
優異獎 Distinguished Prize	赤壁外傳之諸葛亮巧施「田忌賽馬」之術	粉嶺禮賢會中學 Fanling Rhenish Church Secondary School
優異獎 Distinguished Prize	朱古力世紀大騙案之圖表陷阱	粉嶺禮賢會中學 Fanling Rhenish Church Secondary School
優異獎 Distinguished Prize	俄羅斯方塊高手之路	聖公會呂明才中學 S.K.H Lui Ming Choi Secondary School
優異獎 Distinguished Prize	纖體物語	香港神託會培基書院 Stewards Pooi Kei College

獎項 Prize	習作題目 Project Title	學校名稱 Name of School
優異獎 Distinguished Prize	猜？不猜？	聖保羅男女中學 St. Paul's Co-educational College
優異獎 Distinguished Prize	平均分的迷思	荃灣官立中學 Tsuen Wan Government Secondary School

12. 2011/12 年度教師專業發展課程

數學教育組將於 2011/12 年舉辦 (a) 小學及 (b) 中學教師培訓課程，有關詳情，請留意教育局培訓行事曆的最新通告，亦可參考下頁的培訓年曆。此外，數學教育組亦會不定期舉辦一些與數學的學與教相關的研討會及工作坊，煩請各位同工留意有關的教育局通函，並按通函指示瀏覽相關網站及報名。

(a) 2011/12 年度教師專業發展課程一覽

小學

舉辦日期	課程名稱 (小學)
2011 年 10 月	小學數學課程導引系列：(1) 新任小學數學教師
	小學數學課程導引系列：(2) 數學科科主任
2011 年 11 月	小學數學課程學與教系列：(7) 運用資訊科技進行「圖形與空間」的學與教
	小學數學課程特選課題系列：(1) 分數
2011 年 12 月	小學數學課程知識增益系列：(2) “度量”的探究—面積
	小學數學課程學與教系列：(5) 照顧學習差異
2012 年 1 月	小學數學課程特選課題系列：(2) 貨幣、時間（修訂）
	小學數學課程學與教系列：(1) 小學數學課程詮釋及校本課程設計
2012 年 2 月	小學數學課程學與教系列：(6) 解文字題
	小學數學課程知識增益系列：(1) “數”的探究—倍數和因數
2012 年 3 月	小學數學課程學與教系列：(5) 照顧學習差異

舉辦日期	課程名稱 (小學)
2012 年 3 月	小學數學課程學與教系列：(3) 培養學生的創意及批判性思維
	小學數學課程學與教系列：(4)「從閱讀中學習」及「德育、公民及國民教育」
2012 年 4 月	小學數學課程特選課題系列：(3) 四則運算和代數（修訂）
	小學數學課程促進學習的評估系列：(2) 多元化評估
2012 年 5 月	小學數學課程促進學習的評估系列：(1) 善用評估資料促進數學科的學與教 (修訂)
	小學數學課程銜接系列：(2) 小學與中學的銜接
2012 年 6 月	小學數學課程銜接系列：(1) 小學和學前的銜接
	小學數學課程學與教系列：(2) 培養學生的數字感

(b) 2011/12 年度教師專業發展課程一覽

中學

舉辦日期	課程名稱 (中學)
2011 年 8 月	新任教新高中數學教師簡介會（新辦）
2011 年 10 月	中學新入職數學教師數學的學與教簡介會
	2011/12 中學生統計習作比賽簡介講座及歷屆得獎展覽
2011 年 11 月	新高中數學科課程詮釋
	新高中數學課程知識增益 - (2) 排列與組合
	新高中數學課程知識增益 - (5) 統計與通識（新辦）
	新高中數學課程學與教策略 - (2) 數學的進一步應用
	數學教育課程領導
	新高中數學課程知識增益 - (1) 數學的應用
2011 年 12 月	中學數學專題習作比賽及數學閱讀報告比賽簡介會 (2011/12)
	數學課程知識增益系列 - (2) 幾何作圖

舉辦日期	課程名稱 (中學)
2011 年 12 月	數學課程學生學習評估 - 第三學習階段的多元化評核模式
	數學課程學與教的策略系列 - (2) 推展創造力（修訂）
	數學課程學與教的策略系列 - (6) 小學與中學數學科學與教的銜接
	2011/12 中學生統計創意寫作比賽簡介會
2012 年 1 月	新高中數學課程學與教策略 - (4) 單元一
	新高中數學課程學與教策略 - (5) 單元二
	新高中數學課程學與教策略 - (6) 探索與研究
	數學課程學與教的策略系列 - (1) 從閱讀中學習
2012 年 2 月	第三學習階段特選課題的學與教策略系列 - (1) 立體圖形
	新高中數學課程學習評估
2012 年 3 月	新高中數學課程知識增益 - (3) 數學歷史
	新高中數學課程知識增益 - (4) 描繪曲線

舉辦日期	課程名稱 (中學)
2012 年 3 月	數學教育課程領導
	數學課程知識增益系列 - (3) 變換在幾何證明中的運用（一）(修訂)
	數學課程知識增益系列 - (3) 變換在幾何證明中的運用（二）(修訂)
	數學課程學與教的策略系列 - (4) 中學數學資優教育
	數學課程學與教的策略系列 - (3) 中學數學輔導教學
2012 年 4 月	新高中數學課程學與教策略 - (3) 運用資訊科技
	數學課程學生學習評估 - 第三學習階段的多元化評核模式
	數學課程學與教的策略系列 - (3) 中學數學輔導教學
	數學課程學與教的策略系列 - (7) 推展批判性思考能力（修訂）
	數學課程學與教的策略系列 - (4) 中學數學資優教育
2012 年 5 月	新高中數學課程知識增益 - (2) 排列與組合
	新高中數學課程學習評估

舉辦日期	課程名稱(中學)
2012 年 5 月	新高中數學課程學與教策略 - (7) 特選課題
	數學課程學與教的策略系列 - (1) 從閱讀中學習
	數學課程學與教的策略系列 - (5) 推展德育、公民及國民教育
2012 年 6 月	小學與中學數學科學與教的銜接
	新高中數學課程學與教策略 - (1) 必修部分數據處理範疇
	數學課程學與教的策略系列 - (6) 小學與中學數學科學與教的銜接
	趣味數學（新辦）
2012 年 1 月 - 5 月	有效運用數學科學與教資源（新辦）
2012 年 1 月 - 5 月	數學學與教的語言運用（新辦）
2012 年 1 月 - 5 月	新高中數學課程學與教策略 - (8) 初中與高中數學科學與教的銜接（新辦）