高中數學課程闡釋：單元二（代數與微積分）

教育局
課程發展處
數學教育組

目　录

ISBN 978-988-8040-42-1

前言

《数学课程及评估指引(中四至中六)》(2007)(以下简称《课程及评估指引》)是为 2009 年 9 月实施的新高中学制而编订。高中数学课程包括必修部分及延伸部分。延伸部分包括两个单元，分别是单元一(微积分与统计)及单元二(代数与微积分)。

在《课程及评估指引》中，单元二的学习重点以表列形式归于不同学习单位内。表中「注释」栏的内容为学习重点的补充数据。本小册子内的课程阐释旨在进一步解释：

(一) 单元二学习重点的要求；

(二) 单元二的教学建议；

(三) 单元二学习单位之间的关系和结构；及

(四) 必修部分与单元二的课程衔接。

本小册子内的课程阐释连同《课程及评估指引》内每一学习单位的「注释」栏及教学时数，可显示该学习单位处理的阔度和深度。教师宜在施教单元二时，把必修部分及单元二的内容视为连贯的数学知识，并培养学生运用数学解决问题、推理及传意的能力。此外，教师须留意,《课程及评估指引》中的学习单位及学习重点的编排次序并不等同于学与教的次序，教师可因应学生需要有系统地编排学习内容。

欢迎各界人士就本小册子提供意见和建议。来函请寄：

九龙油麻地弥敦道 405 号

九龙政府合署 4 楼

教育局课程发展处

总课程发展主任(数学)收

传真：3426 9265

电邮：ccdoma@edb.gov.hk

(空白页)

基础知识领域

基础知识领域内容包括五个学习单位，可作为单元二内微积分领域和代数领域的先备知识。这些基础知识能贯通必修部分及单元二。因此，深入处理此领域内的课题并非本课程的重点。

学习单位「根式」提供必要工具协助学生掌握微积分领域内的极限和导数。学习单位「二项式定理」是证明学习单位「求导法」内的一些法则的基础。学生应能应用数学归纳法证明命题。学习单位「续三角函数」介绍弧度法、六个三角函数和一些在学习微积分常用的三角公式。学生应理解弧度法在微积分领域中的重要性。学习单位「e 的简介」帮助学生理解自然对数为重要的数学概念，特别是在微积分求导法及积分法中十分重要。

由于基础知识领域与其他领域有很强的联系，教师应编排合适的教学次序以照顾学生的学习需要。例如，教师在教授从基本原理求导数时，可将学习单位「根式」融入学习单位 6「极限」中，使学习内容更为连贯。

学习单位	学习重点	时间
基础知识领域		
1. 根式	1.1 将形如 $\dfrac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 的数式的分母有理化	1.5

课程阐释：

本学习单位的重点是要将形如 $\dfrac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 的数式的分母有理化。教师可指出数式 $\dfrac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 与 $m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})$ 可以经过有理化步骤，由其中一数式转化为另一数式，所以此二数式实际上是同类根式。这些技巧能帮助学生在学习单位 6 中计算极限。学生可应用此技巧将分母或分子有理化以求出诸如 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ 的极限。教师可选择在教授极限时才引入本学习单位。

教师应注意在第三学习阶段中，学生未必掌握有理化的概念。只有那些已学习过第三阶段中学习单位「有理数及无理数」内非基础部分的学习重点「将含有 $\sqrt{a}$ 形式的分母有理化」的学生，才接触过这个概念。

教师应与学生重温基本代数恒等式 $a^2-b^2\equiv(a-b)(a+b)$ 作为本学习单位的先备知识。

教师不须讨论包含三项或以上异类根式诸如 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ 的分母有理化。

学习单位	学习重点	时间
基础知识领域		
2. 数学归纳法	2.1 理解数学归纳法原理	5

课程阐释：

数学归纳法是证明数学命题的重要工具。学生应能在单元二中运用此原理证明有限数列求和及整除性有关的命题。

在《课程及评估指引》中，「理解」的要求一般比「认识」高。「理解数学归纳法原理」意谓学生须懂得数学归纳法的步骤、为何原理成立、原理何时失效及应用原理解决问题。

开始介绍数学归纳法时，引用的例子务求简易，以令学生能掌握及理解。

在必修部分学习单位 7 中，学生应理解等差与等比数列的求和公式。学生亦可能接触过其他有限数列的求和公式。学生会质疑诸如 $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的公式的正确性。教师可利用以下方法引导学生发现这些公式。

教师可考虑以下情况要求学生猜想首 n 个单正整数和的公式。

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+3 &= 4\\
1+3+5 &= 9\\
1+3+5+7 &= 16\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &= ?
\end{aligned}
$$

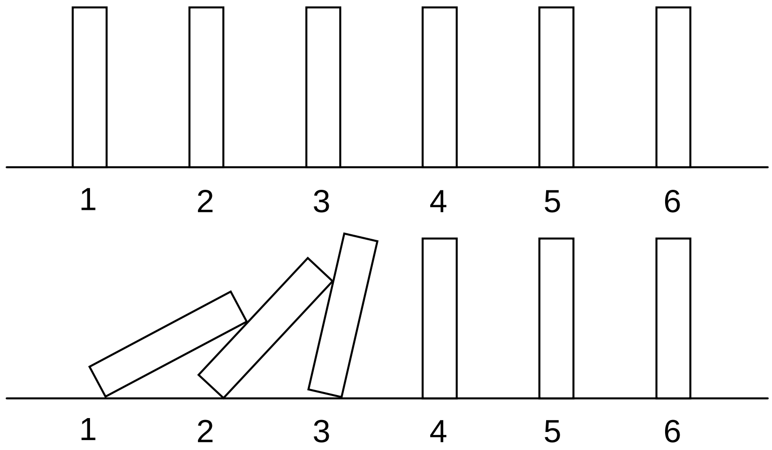
公式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 在 $n=1, 2$ 及 3 时成立。然而，如何得知公式对所有正整数均成立？是故，有需要作出证明。数学归纳法就是其中一个有

用的工具。

教师可让学生探索一些有限数列的求和公式，例如

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 或 $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ 。让学生发现公式后，再运用数学归纳法原理证明公式。

教师可用骨牌游戏来解说数学归纳法原理。



在使用数学归纳法原理时，以下的两个步骤均十分重要：

(1) 证明 P(1)成立。

(2) 证明若 P(k)成立，则 P(k+1)亦成立(其中 k 为正整数)。

教师可利用以下反例阐释若不能完成上述两个步骤时，不能证明命题 P(n)对所有正整数 n 均成立。

(a) 对于任意正整数 n，n^2+n+17 是质数。[1]

(b) 对于任意正整数 n，$2^{2^n}+1$是质数。[2]

---

[1] 对于 n =1, 2, 3,…,15，n^2+n+17 为质数。

当 n = 16，$n^2+n+17=16^2+16+17=17^2$ 并非质数。

[2] 费马猜测若 n 为正整数，所有形如 $2^{2^n}+1$ 的数(即费马数)均为质数。他只验算当 n = 1,2,3,4 时，命题成立。及后欧拉发现第五个费马数并非质数。欧拉指出 $2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417$。

(c) 对于任意正整数 n，$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+2$。

(a)及(b)为不完全归纳的例子，在只有有限种情况下「P(n)成立」。在证明的过程中，不能完成上述的第 2 个步骤，所以不能证明 P(n)对于所有正整数 n 均成立。

在例(c)中，虽然可以完成第 2 个步骤，但由于 P(1)不成立，所以 P(n)不成立。

教师可利用多一些例子展示如何应用数学归纳法。例如：

对于任意正整数 n，证明

(a) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。

(b) 23^n-1 可被 11 整除。

(c) 7^n+3n-1 可被 9 整除。

(d) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a+b 整除。

教师应提醒学生在作出结论时，须注意以下几个名词的使用：数、整数、正数及正整数。

学生应学习原理的一些常见变化。学生应能改变应用数学归纳法时的两个步骤去证明一些如「对所有偶正整数 n，a^n-b^n 可被 $a+b$ 整除。」的命题。然而，数学归纳法原理的一些较复杂变化(如以下的例子)不是课程所需：

(1) P(1) 成立。

(2) 若 $1\le n\le k$，P(n) 成立，则 P(k+1) 亦成立(其中 k 为正整数)。

或

(1) P(1) 及 P(2) 成立。

(2) 若 P(k−1) 及 P(k) 成立，则 P(k+1) 亦成立。

学生不须运用数学归纳法去证明与不等式有关的命题。

教师可使用数学归纳法给学生证明下一个学习单位中的二项式定理。

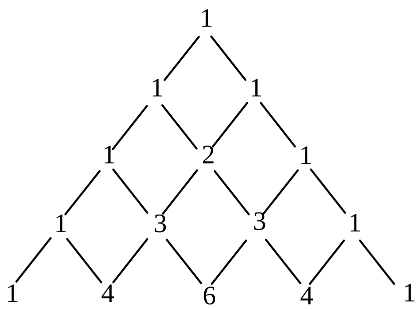
学习单位	学习重点	时间
基础知识领域		
3. 二项式定理	3.1 以二项式定理展开指数为正整数的二项式	3

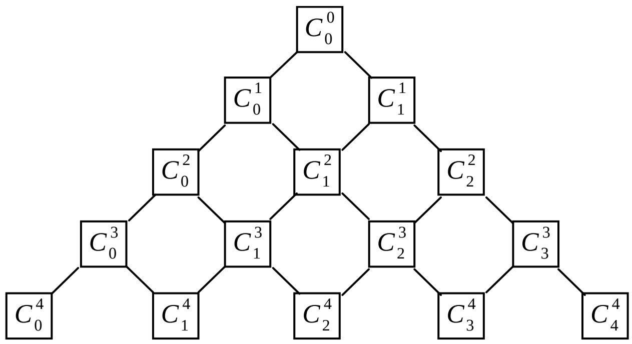
课程阐释：

学生应理解怎样运用数学归纳法原理去证明二项式定理。

在必修部分的学习单位「排列与组合」中已有讨论过 C_r^n 的定义。由此，可以使用组合方法来证明二项式定理。考虑数式 $(a+b)^5$ 的展式中，a^3b^2 项的系数为将 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ 展开时，从上列 5 组中拣选两个 b 的组合数目。学生应不难理解 C_2^5 为 $(a+b)^5$ 的展开式中 a^3b^2 的系数。

在介绍时，可以着学生以组合方法求得 $(a + b)^n$ 的展开式中各项的系数，再与左边帕斯卡三角[3]的数值作比较。





一般而言，$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$

[3]帕斯卡于 1654 年出版的《算术三角论》介绍二项式系数的三角形排列方法及其应用。因此，一般称这个三角形的排列方法为帕斯卡三角。事实上，早于 13 世纪，中国数学家杨辉在他的著作《详解九章算术》(1261) 已展示相同的三角形，并指出「贾宪用此术」。故此，这个三角形的排列方法亦称为「杨辉三角」或「贾宪三角」。

为使二项展式的表达更加简洁，引入求和符号(Σ)便变得十分合理，但应注意不须引入涉及求和符号的繁琐运算。

二项式定理是属于基础知识领域内的学习单位，所以涉及这定理的有关问题和例子应简单和直接。因此，不须引入以下内容：

- 三项式的展开
- 最大系数、最大项和二项式系数性质
- 求近似值的应用

二项式定理亦可用于从基本原理来证明 $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$，其中 n 为正整数。

学习单位	学习重点	时间
基础知识领域		
4. 续三角函数	4.1 理解弧度法的概念 4.2 透过弧度法求弧长及扇形面积 4.3 理解余割函数、正割函数和余切函数及其图像 4.4 理解恒等式 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ 和 $1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ 4.5 理解正弦、余弦、正切函数的复角公式、二倍角公式及正弦、余弦函数的和积互化公式	11

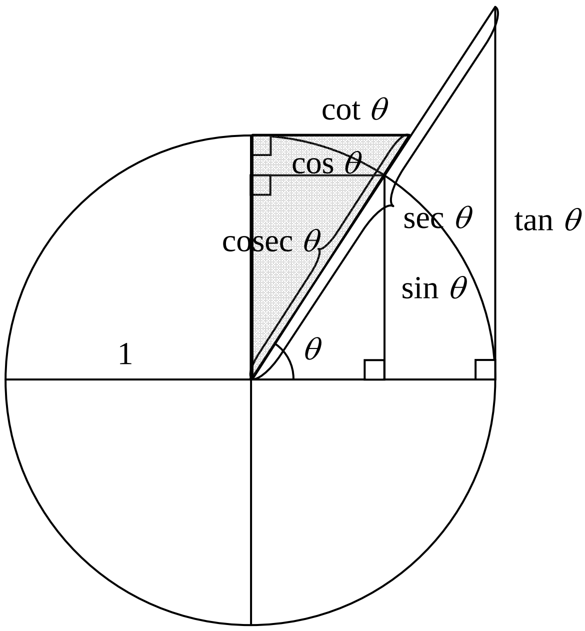
课程阐释：

在第三学习阶段中，学生已学会以度数来量度角度及利用比例计算弧长和扇形面积。在单元二中，学生将学习以弧度来量度角度及以弧度有关的公式来计算弧长和扇形面积。在学习重点 6.2 注释栏中，只有当 θ 以弧度表示时，公式 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 才成立。因此，在处理有关微积分的问题时，涉及三角函数的角皆以弧度来表示。

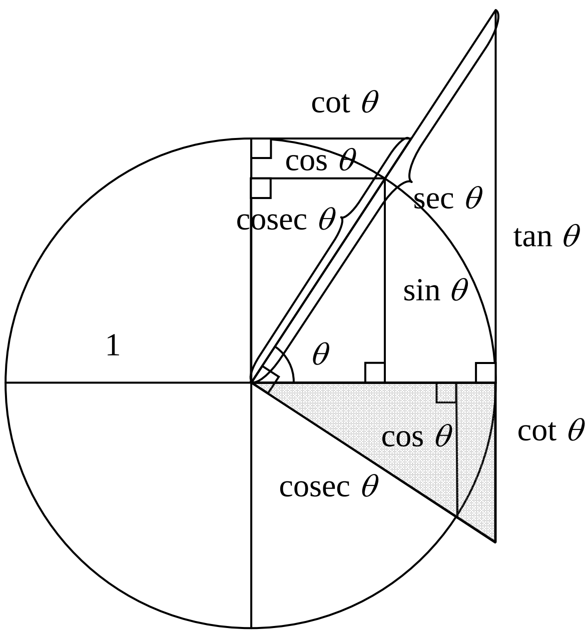
在必修部分学习重点 13.1 中，学生已学会正弦、余弦和正切的三角函数及其图像和性质(包括极大值、极小值和周期性)。学生在本单元中将会学习另外三个三角函数(即余割函数、正割函数及余切函数)的图像和性质。由于学生在必修部分学习重点 9.1 须描绘及比较不同函数的图像，包括三角函数，学生应能从三个已学习的三角函数的图像和性质描绘另外三个三角函数的图像和性质。在此，教师可先引导学生从 $y=f(x)$ 的图像描绘 $y=\frac{1}{f(x)}$ 的图像，再从 $y=\sin\theta$ 的图像探究 $y=\operatorname{cosec}\theta$ 的图像。学生应能探究及理解函数 $y=\operatorname{cosec}\theta$ 的定义域、极大值和极小值、对称性和周期性。他们更可进一步描绘正割函数及余切函数的图像并发现其性质。

在第三学习阶段中，学生已学会恒等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，他们应能用此式推导出其余两个恒等式，$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 和 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$。学生亦可利用这些恒等式简化其他三角数式。

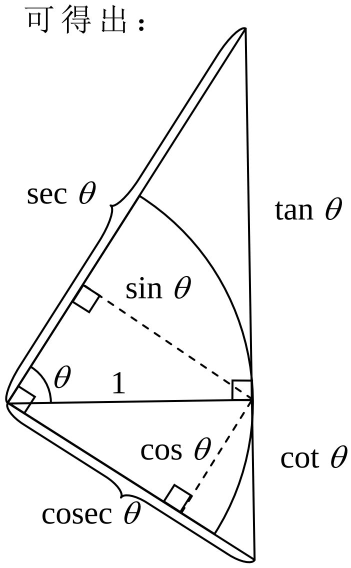
教师亦可利用下图说明正弦、余弦、正切、余割、正割和余切的意义及其关系，并引导学生发现上述的恒等式。下图的圆为单位圆。



透过旋转上图有阴影的三角形至新位置，可得到下图。



在图中加入两条虚线，可得出：



学生可从上图观察到三角恒等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$、$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 及 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ 。惟上图的证明只适用于 θ 为锐角。

学生会发现《课程及评估指引》第 52 及 53 页的学习单位 4 注释栏内列出的公式在解涉及三角函数的问题时是非常有用的。

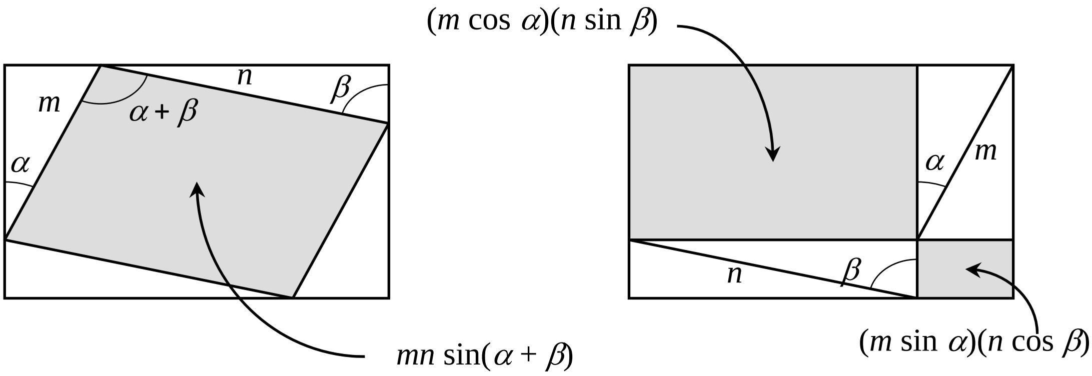
教师可运用图示推导复角公式

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \text{ 和 } \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B,$$

并利用这四个基本公式推出其他公式。

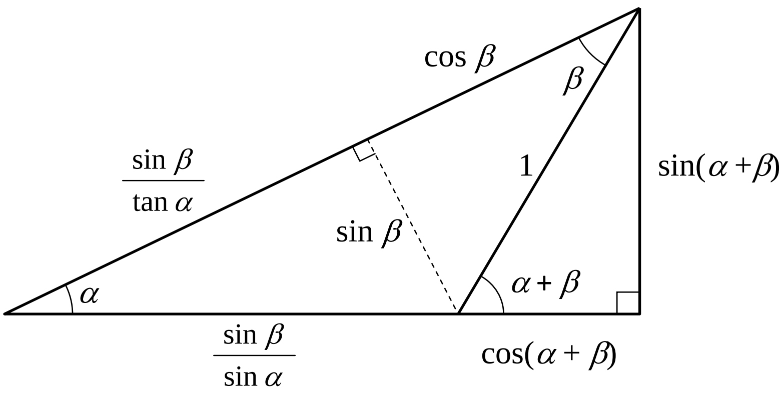
教师可从参考书/教科书中找到有关上述四个基本公式的不同证明。现提供这些公式的一些非传统证明给教师参考，但须注意在一般的图示证明中，对有关的角度大小有一定的局限。

<u>例子一</u>　证明　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。



$$
\begin{aligned}
\text{左图中阴影部分的面积} &= \text{右图中阴影部分的总面积}\\
mn\sin(\alpha+\beta) &= (m\sin\alpha)(n\cos\beta)+(m\cos\alpha)(n\sin\beta)\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

<u>例子二</u>　证明　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。



$$\sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta+\dfrac{\sin\beta}{\tan\alpha}}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\left(\cos\beta+\frac{\sin\beta}{\tan\alpha}\right)\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

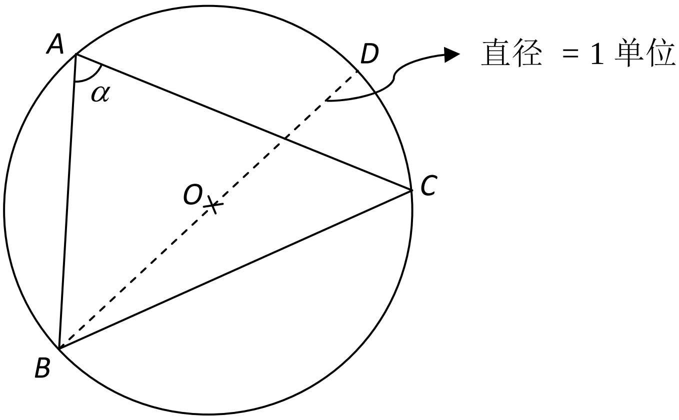
及　$$\cos\alpha = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}}{\cos\beta+\dfrac{\sin\beta}{\tan\alpha}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\frac{\cos^2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

例子三(本例子可视为必修部分学习单位 18 内「托勒密定理」的应用)

(a) 如下图所示，BOD 为三角形 ABC 的外接圆的直径。



连接 CD。

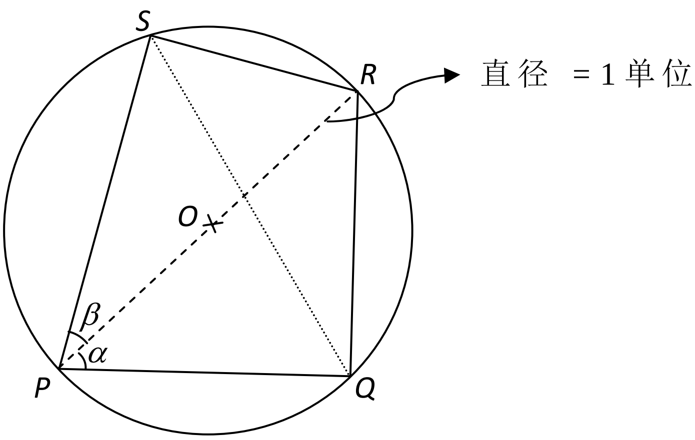
$\angle BDC = \alpha$，$\angle BCD = 90°$。

$$\sin\alpha = \frac{BC}{1}$$

$$BC = \sin\alpha$$

(b) 以下将会运用托勒密定理，证明 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$。

设 $PQRS$ 为圆内接四边形，其外接圆的直径 $PR = 1$ 单位。



由于 PR 是直径，$\angle PQR = 90°$，$\angle RSP = 90°$。

$PQ = \cos\alpha$，$QR = \sin\alpha$，$RS = \sin\beta$，$SP = \cos\beta$。

由 (a)，$QS = \sin(\alpha+\beta)$。

由托勒密定理，$PQ\times RS+QR\times SP=PR\times QS$。

$\therefore\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = 1\times\sin(\alpha+\beta)$。

即 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$。

$\sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$和 $\cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ 可以由上述的两个复角公式导出。这几个公式加上和积互化的公式是计算积分的重要工具。教授这一个学习单位时，不须引入半角公式、三倍角公式、t-公式及「辅助角的形式」。

在必修部分学习重点 13.2 中，学生应能解简易的三角方程(其解限于 0° 至 360°区间)。在此，学生应能解答案取值范围为 0 至 2π 的三角方程。这一节讨论的内容可应用到解学习重点 8.4 内有关极值的问题。

学习单位	学习重点	时间
基础知识领域		
5. e 的简介	5.1 认识 e 和自然对数的定义及其记法	1.5

课程阐释：

必修部分的学习单位 3 和 5，为非基础课题，其中已讨论指数函数、对数函数和它们的图像。数字 e 及自然对数是十分重要的数学概念。它们在微积分的学习中有重要的意义。学生会在本学习单位中学习指数函数 e^x。

一般引入 e 的方法有下列两种：

(1) $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

单元二(代数与微积分)会以第一个方法引入数值 e。

介绍 e 的时候，可以使用以下以复利息计算本利和为例子。

若将一笔款项存于银行一年，年利率为 1%。以复利息计算，按以下情况求本利和：

(i) 每一季为一期；

(ii) 每一个月为一期；

(iii) 每一日为一期；

(iv) 每一小时为一期；

(v) 每一秒为一期。

由此，引出求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的讨论。

证明这一个极限值的存在须应用单调收敛定理[4]。然而，这个定理并不包括在本课程的范围内。因此，学生并不须证明有关极限的存在问题。

作为延伸，可进一步向学生介绍 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ 的证明。

单元一(微积分与统计)则以第二个方法导入，其中涉及展开二项式的 n 次幂 $(1+\frac{x}{n})^n$。

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{x}{n})^n &= \sum_{r=0}^{n} C_r^n (\frac{x}{n})^r \\
&= C_0^n(\frac{x}{n})^0 + C_1^n(\frac{x}{n})^1 + C_2^n(\frac{x}{n})^2 + C_3^n(\frac{x}{n})^3 + \ldots + C_r^n(\frac{x}{n})^r + \ldots + C_n^n(\frac{x}{n})^n \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\frac{x^r}{n^r} + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{x^n}{n^n} \\
&= 1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{x^r}{r!} + \ldots \\
&\quad + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{x^r}{r!} + \right. \\
&\qquad \left. \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}\right] \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots
\end{aligned}
$$

代入 $x = 1$，可得

$$
e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots
$$

[4]单调收敛定理指出每一个单调上升并有上界的序列必定收敛及每一个单调下降并有下界的序列也必定收敛。

利用计算器，可以得到 e 与 2.71828 近似。

教师可提醒学生，自然对数函数拥有常用对数函数的所有性质，所以不须把自然对数函数作为函数的一个新类别来处理。因为在以后的学习单位中，换底公式尤其是在求不同底的对数函数的导数时十分重要，所以应该重温必修部分学习重点 3.3 有关换底公式的内容。

这一个学习单位亦可安排在教授学习重点 6.1 之前。

微积分领域

微积分领域包括「极限和求导法」及「积分法」。

在学习「极限和求导法」前，学生须掌握函数的概念、其图像及性质。此外，有关根式的操作技巧亦有助他们解决很多求极限的问题。学生可使用二项式定理证明公式 $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$(其中 n 为正整数)。

教师可进一步引导学生欣赏数学的美，例如无理数 e、函数 e^x 与其导数等。学生亦会学习到求导法在解决有关变率、极大值及极小值等问题的重要性。

不定积分与求导法有一个互逆的联系，而微积分基本定理将这两个表面上不同的概念连系起来。在这阶段，定积分的其中一个应用是求平面图形的面积和旋转体的体积。学生更可欣赏如何使用定积分来计算一些由非直线所组成的图形面积，诸如圆面积等。

学习单位	学习重点	时间
微积分领域		
极限和求导法		
6. 极限	6.1 理解函数极限的直观概念 6.2 求函数的极限	5

课程阐释：

「极限」是微积分中最基本的概念。完成必修部分学习单位 2 及 9 后，学生对不同函数及其图像的概念应该有一个全面的认识。但是，学生遇见的函数一般是连续的。在这学习单位中，学生将遇到不连续函数，并会讨论到不连续函数的一些性质。介绍这一个课题时，可从连续及不连续函数的图像开始，并进一步引入一些函数极限的直观概念。绘图软件在探究函数图像时十分有效。但须注意，函数极限的严格定义不是课程所需。

为了说明函数的连续性，可向学生介绍绝对值函数 $|x|$、正负号函数 $\operatorname{sgn}(x)$、上取整函数 $\lceil x \rceil$ 及下取整函数 $\lfloor x \rfloor$，但须谨记这些函数只应视为例子，而毋须讨论函数连续性的严格定义。学生亦不须学习涉及绝对值函数的有关运算、求导和积分。

教师可以采用以下的例子，藉考虑函数的图像，与学生讨论某些极限是否存在。

(a) 设 $f(x)=|x|$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

(b) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 1 \\ x-1, & x<1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

(c) 设 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

对于能力较佳的学生，教师尚可要求他们描绘 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的图像，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\ge 1 \\ 2x, & x<1 \end{cases}$ 及 $g(x)=\begin{cases} -x, & x\ge 0 \\ x+2, & x<0 \end{cases}$，并求出图像不连续点的 x 值。

教师不须证明有关函数的和、差、积、商、纯量乘法及复合函数极限的定理，但须清楚陈述这些定理成立的条件。例如，指出只有 $\lim_{x\to a} f(x)$ 及 $\lim_{x\to a} g(x)$ 同时存在时，才有 $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$。同时，亦可考验学生能否举出 $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$ 不成立的例子。

学生应知道如何求简单函数的极限，诸如 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$。学习单位 1「根式分母有理化」是解决这类问题的重要工具。学生亦应能运用类似技巧将分子有理化求函数的极限。

学生应理解两个极限的重要公式，$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ （θ是以弧度为单位）和 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$。

公式 $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 对于求三角函数的导数十分重要。应注意这公式的证明涉及应用「逼近定理」。一个简易的方法来处理这个极限是利用图形比较两个三角形及一个扇形的面积。

在介绍公式 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ 时，可利用代换 $x=\ln(1+h)$ 和 e^x 的定义来证明，再由这公式求 e^x 的导数。可让学生利用公式 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ 猜想当

x 接近 0 时，$\dfrac{e^x - 1}{x}$ 的极限值。

学生须认识求有理函数在无穷大时的极限值，但其中并不涉及部分分式的使用。

学习单位	学习重点	时间
微积分领域		
极限和求导法		
7. 求导法	7.1 理解函数导数的概念 7.2 理解求导法的加法法则、积法则、商法则及链式法则 7.3 求包含代数函数、三角函数、指数函数及对数函数的函数之导数 7.4 以隐函数求导法求导数 7.5 求显函数的二阶导数	14

课程阐释：

学生应能从基本原理求包括常数函数、x^n (其中 n 为正整数)、$\sqrt{x}$、$\sin x$、$\cos x$、e^x、$\ln x$ 等初等函数的导数。他们亦应能运用有理化的技巧从基本原理求诸如 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 函数的导数。从基本原理证明 $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$(其中 n 为正整数)时，须利用二项式定理。教师亦可运用数学归纳法去证明此公式。

学生应熟悉导数的不同记法，包括 y'，$f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$，但不须判断函数的可导性。

学生应能运用加法法则、积法则、商法则及链式法则求函数的导数，但须注意在必修部分中，学生不须学习复合函数的概念。如 $\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{dx}=\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{d\left(\sin x\right)}\cdot\frac{d\left(\sin x\right)}{dx}=2\sin x\cos x$ 等展示有助学生认识链式法则。

当对数函数的底不是 e 时，须运用到必修部分中的学习重点 3.3 (非基础课题)所学过的「换底公式」。

例如， $y=\log_2 x$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_2 x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x\ln 2}。$$

应向学生解释隐函数求导法是一个有用的工具求导数，过程中不须一定要将以自变量表示因变量。方程诸如 $x^3-3xy+y^3=3$ 及 $x=y+y^2$ 可作为说明应用隐函数求导法求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子。对一些方程，y 是不容易或有时候不能以 x 表示。若目的只是求导，学生不须一定要将 y 以 x 表示。

诸如 $y=(x^2+2)(3x-2)^2(4x+5)^6$ 及 $y=\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^4$ 等方程可作为对数求导法的例子。

求隐函数的二阶导数在本单元中没有广泛应用，所以学生只须求显函数的二阶导数。在学习重点 8.2 中，运用二阶导数求函数的极值是十分有用的。教师须介绍包括 y''、$f''(x)$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的记法，但不须引入三阶或更高阶的导数。

学习单位	学习重点	时间
微积分领域		
极限和求导法		
8. 求导法的应用	8.1 求曲线的切线和法线方程 8.2 求函数的极大值和极小值 8.3 描绘多项式函数及有理函数的曲线 8.4 解与变率、极大值和极小值有关的应用题	14

课程阐释：

必修部分中的学习重点 2.3 及 2.4 (非基础课题)，内容包括以图解法或代数方法求二次函数的极大值/极小值。在单元二(代数与微积分)，求导法不限于应用在二次函数的极值问题。

学习重点 8.1 不单要求学生能找出曲线上一点的切线方程及法线方程，亦要求他们能够求曲线外一点至曲线的切线方程。当中学生需要用到以代数方法解二元一次及二元二次的联立方程，所以就必修部分学习重点 5.2(非基础课题)的内容而言，学生应要有较为全面的理解。

求函数的局部极值(即是极大值或极小值)，可以用「一阶导数判别法」和「二阶导数判别法」。除局部极值外，应考虑闭区间端点的数值以判定全局的极值。若 $f''(x_0)=0$，「二阶导数判别法」不适用于判别在 $x=x_0$ 的极值。在这情况下，学生须采用「一阶导数判别法」。

学生须懂得用二阶导数判别函数的凹凸性，并使用这些性质求函数的拐点。

教师应注意曲线描绘只限于多项式函数及有理函数。曲线的某些特征能从其方程中容易地被观察或找到。例如：

- 曲线的对称性

- x 值和 y 值的限制
- 曲线与两轴的截距
- 极大点与极小点
- 拐点
- 曲线的垂直、水平和斜渐近线

研究一个特定的曲线时，学生不须要考虑曲线的所有特征。不同问题会考虑不同特征，故须利用不同例子展示不同特征。

曲线的凹凸性、递增函数及递减函数的概念对描绘曲线是十分有用的。曲线上拐点的切线穿越曲线，可以是水平的、斜的或甚至是垂直的。求斜渐近线的讨论不须涉及复杂的极限计算，能运用长除法求有理函数曲线的斜渐近线方程便已经足够。所以，须巩固学生在必修部分学习重点 4.1 多项式除法的概念。

在解涉及极大值及极小值的文字题之前，应着学生留意以下几点：

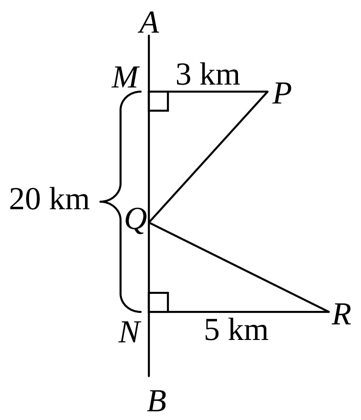
(1) 一个连续函数的局部极大值及局部极小值是交替出现的。

(2) 若一个函数只有一个转向点，由问题的性质可清楚决定该转向点是极大值还是极小值。

在解有关极值的问题时，应注意在某些情况下计算导数并不是求函数极大值及极小值的唯一方法。配方法是求二次函数的极大值和极小值的一个有效代数方法。在处理文字题时，题目中的现实情况有时会提供极佳的解题线索。例如，求导法可以用来解决以下的问题，但若考虑到现实情况，不用微积分的方法，可能更简洁优美。

例子一

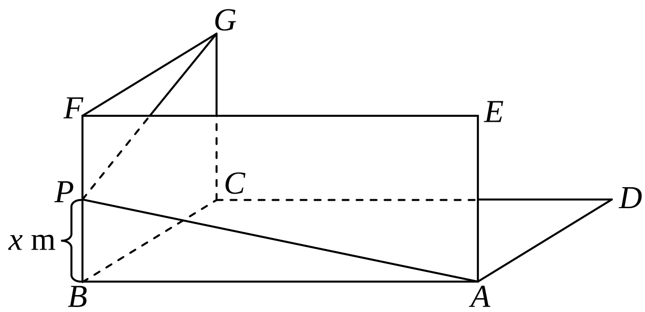
如图，P 和 R 为河流 AB 同一边的两点。若要由 P 走到河边的一点(称作 Q)，再走到 R。问 Q 点应该在河岸的那一位置使得由 P 到 Q，再到 R 的路径为最短？



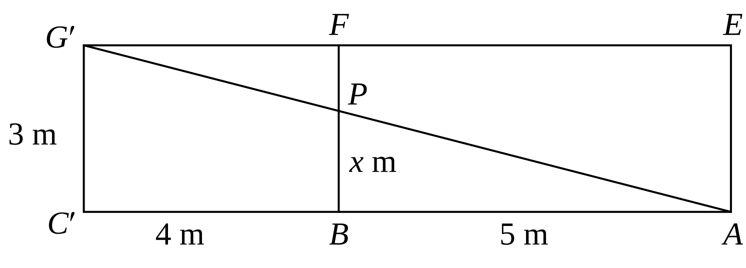
(提示：将 R 沿 AB 作反射得影像 R'。路径 $PQR = PQ + QR = PQ + QR'$。若 PQR'为直线时，路径 PQR 的长度为最短。由相似三角形的性质，可求得 $MQ = 7.5$ km)

例子二

从房间地面 $ABCD$ 的墙角 A，沿 $ABFE$ 的墙壁、$FGCB$ 的墙壁铺设一条电线，称电线过 FB 的点为 P，其中 $AB = 5$ m，$BC = 4$ m，$BF = 3$m。求 x，使得铺设的电线总长度 L 为最短。



(提示：想象以 BF 为旋转轴，将 $BCGF$ 作 90°旋转使得与 $ABFE$ 共面，称 G 的影像为 G'。当 APG'为直线时，L 为最短。由相似三角形的性质可得 $x = \dfrac{5}{3}$)



可考虑引入经济学上有关最大净利、平均净利等问题，作为求导法在其他学科上应用的例子。

学习单位	学习重点	时间
微积分领域		
积分法		
9. 不定积分法	9.1 认识不定积分法的概念 9.2 理解不定积分的性质及使用代数函数积分公式、三角函数积分公式及指数函数积分公式求不定积分 9.3 理解不定积分在现实生活或在数学情境的应用 9.4 使用代换积分法求不定积分 9.5 使用三角代换法求含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 、$\sqrt{x^2-a^2}$ 或 $\sqrt{a^2+x^2}$ 形式的不定积分 9.6 使用分部积分法求不定积分	16

课程阐释：

学生须理解不定积分是求导法的逆运算。若 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ 成立，则 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$，其中称 C 为积分常数。算式 $\int f(x)\,dx$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，但须知道不定积分不是唯一的。若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个不定积分，$F(x)+C$（C 是一个常数）亦是 $f(x)$ 的不定积分。同时，亦须展示给学生运用不同方法计算不定积分，可得出看似不同答案的例子。

例如，$\int (x+1)^2\,dx=\int (x^2+2x+1)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C_1$ 及

$\int (x+1)^2\,dx=\int (x+1)^2\,d(x+1)=\frac{1}{3}(x+1)^3+C_2$。

教师可要求学生证明 $C_1=C_2+\frac{1}{3}$ 并注意以上两个答案相差的只是常数项。

学习重点 9.2 注释栏所列出的公式应须理解，而不应只是强记背诵公式。在推导公式 $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$ 时，须引入绝对值 $|x|$。学生不须学习 $f(x)$ 涉及绝对值的不定积分 $\int f(x)\,dx$。

代换积分法及分部积分法是求不定积分的有用工具。

若使用三角代换，答案中会包括 $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 及 $\tan^{-1} x$ 等函数。因为学生尚未有反函数的概念，教师须与学生讨论这些反函数的记法与及介绍它们的主值。应注意毋须讨论被积函数包括反三角函数的积分。

本单元不包括涉及部分分式的问题。

为避免繁琐的计算，求一个积分时只限使用最多两次分部积分法。同时，不须引入积分的归约公式。

学习单位	学习重点	时间
微积分领域		
积分法		
10. 定积分法	10.1 认识定积分法的概念 10.2 理解定积分的性质 10.3 求代数函数、三角函数和指数函数的定积分 10.4 使用代换积分法求定积分 10.5 使用分部积分法求定积分 10.6 理解偶函数、奇函数及周期函数定积分的性质	11

课程阐释：

教师须向学生介绍定积分的基本定义为和的极限。学生可能会将定积分和不定积分的记法混淆，所以应向学生介绍微积分基本定理作为这两种概念的联系，并同时引入定理的证明。

学生应理解定积分中哑变量的概念，应向学生强调学习重点 10.2 注释栏内定积分的所有性质。

偶函数、奇函数及周期函数定积分性质的讨论有助学生更深入理解定积分。

学生须理解如何应用代换积分法证明学习重点 10.6 内注释栏中提及的性质。

教师应注意以下部分不是课程所需：

- $f(x)$ 涉及绝对值的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的计算

- 归约公式
- 以定积分求无穷数列之和
- 广义积分
- 不等式 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

学习单位	学习重点	时间
微积分领域		
积分法		
11. 定积分法的应用	11.1 理解以定积分求平面图形面积的应用 11.2 理解以定积分求沿坐标轴或平行于坐标轴的直线旋转而成的旋转体体积的应用	7

课程阐释：

在本单元，定积分的应用只限于计算平面图形和旋转体体积。教师可以几何方法表示定积分定义和平面图形面积之间的关系。透过展示圆面积、直立圆锥体积及球体体积公式的严格证明时，可以令学生欣赏到定积分的应用。应注意讨论沿不同坐标轴或沿平行于坐标轴的直线旋转而成的旋转体体积之间的分别。

教师应引入「圆盘法」和「外壳法」，讲解时，可以使用直观的几何方法，但毋须提供严谨证明。在某些情况下，「外壳法」在计算旋转体体积时比「圆盘法」更为优胜。例如，计算曲线 $y = \sin x + x$ 与直线 $y = 0$， $x = \frac{\pi}{2}$ 围成的面积绕 y 轴旋转的体积时，使用「外壳法」更为方便。教师可在计算同一旋转体体积时，比较这两种方法。

学生须学习计算空心旋转体的体积。

代数领域

代数领域内容包括「矩阵及线性方程组」 及「向量」。

在这个领域内，学生会接触到他们尚未遇见过的代数数学结构—「矩阵」。他们会发现矩阵的乘法并不是交换的。这个新的概念有别于学生过往经验。学生须理解矩阵的概念、运算及其性质、逆矩阵的存在及行列式。行列式是研究矩阵性质的重要工具。

在第三学习阶段，学生运用代数方法及图像法解二元一次方程。在第三学习阶段已学习过增润项目「探究不兼容或没有唯一解的联立方程」的学生，会对「相容」及「不相容」的概念有初步的认识。在这领域，学生可进一步探究线性方程组兼容性或不兼容性的条件。他们应能运用克莱玛法则、逆矩阵和高斯消去法解线性方程组。可以让他们理解到每一个方法的强项与弱项及如何选择合适的方法解题。

为进一步延伸学生在代数领域的知识，在这阶段向学生介绍向量的概念、运算及性质。纯量积及矢量积是研究几何性质包括平行及正交的两个重要工具。此外，学生亦可学习到如何运用向量方法求得平行六面体的体积、两向量的夹角及三角形或平行四边形的面积等。

学习单位	学习重点	时间
代数领域		
矩阵及线性方程组		
12. 行列式	12.1 认识二阶及三阶行列式的概念及其性质	3

课程阐释：

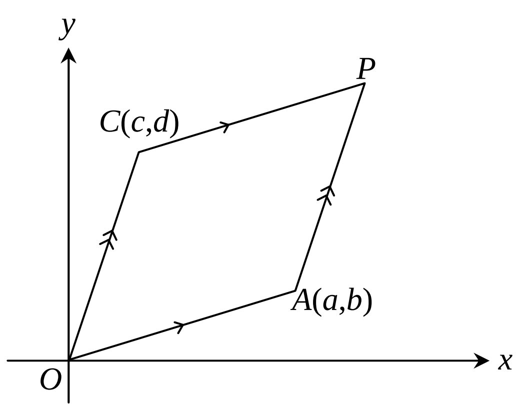
在矩阵及线性方程组的学习中，行列式是不可或缺的数学工具。

学生应认识二阶及三阶行列式的基本运算及性质。有关性质已详列在《课程及评估指引》第 62 及 63 页中的注释栏内。

学生应认识 $|A|$ 和 $\det(A)$ 为矩阵 A 的行列式的两个常用记法。

教师可向学生介绍行列式的一些应用，如以下所述。

如图，$OAPC$ 为一经过原点 O 的平行四边形，其中 $A=(a,b)$ 及 $C=(c,d)$。



平行四边形 $OAPC$ 的面积 $=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$。

学习单位	学习重点	时间
代数领域		
矩阵及线性方程组		
13. 矩阵	13.1 理解矩阵的概念、运算及其性质 13.2 理解二阶及三阶方阵逆矩阵的概念、运算及其性质	9

课程阐释：

对于一般学生来说，学习重点 13.1 有关 $|AB| = |A||B|$ 的一般证明相对困难，教学的时候可以使用例子来进行验证而毋须证明。然而，不高于三阶的情况下，其证明较为容易，教师可与学生进行较深入的讨论。

虽然《课程及评估指引》的内容没有特别提到单位矩阵及零矩阵，但是它们的定义及一些性质仍须讨论。矩阵乘法的非交换性质，即 $AB \neq BA$，与学生过往的经历非常不同，所以应加以强调。

在求 2×2 矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的逆矩阵时，学生须解以 x, y, z 及 w 为未知数的矩阵方程 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。为了查验逆矩阵 $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 存在与否，很自然会考虑到 $ad-bc$ 的值。这个值正好是矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式并以 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 来表示。学习单位 12 中有关行列式的概念及性质与这一单位的内容有非常紧密的关系，教学时可考虑将它们放在一起。

学生应理解二阶及三阶方阵逆矩阵的概念、运算及性质。学生须判断矩阵的可逆与否，并能够求可逆矩阵的逆矩阵，例如使用伴随矩阵或基本行运算等方法以求得逆矩阵。此外，在某些情况下，学生亦可能须要使用数学

归纳法原理来证明一些有关涉及矩阵的命题。

学习单位	学习重点	时间
代数领域		
矩阵及线性方程组		
14. 线性方程组	14.1 以克莱玛法则、逆矩阵和高斯消去法解联立二元和三元线性方程组	6

课程阐释：

在第三学习阶段，运用代数方法及图像法解二元一次方程已有讨论，而增润项目内中亦有有关「探究不相容或没有唯一解的联立方程」、「相容」及「不相容」的初步介绍。在这学习单位中，会再进一步讨论以克莱玛法则、逆矩阵和高斯消去法解联立二元和三元线性方程组，而涉及的线性方程组可以是齐次的或非齐次的。在这阶段，可以清楚地向学生介绍「兼容」及「不相容」的意义。

克莱玛法则是行列式其中一个重要的课题。由克莱玛法则，可以知道对于线性方程组 $A\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$，若Δ为系数矩阵的行列式，其中$\Delta \neq 0$，方程组有唯一解。若$\Delta=0$，则不能使用克莱玛法则。教师可与学生讨论以下更一般的结果：

$$\Delta \cdot x = \Delta_x\ , \quad \Delta \cdot y = \Delta_y \quad \text{及} \quad \Delta \cdot z = \Delta_z \ (*)$$

Δ_x 是以列矩阵 **b** 取代系数矩阵的第一列而得出的行列式；Δ_y 是以列矩阵 **b** 取代系数矩阵的第二列而得出的行列式；Δ_z 是以列矩阵 **b** 取代系数矩阵的第三列而得出的行列式。Δ的值为零时，以上的结果仍然成立。由 (*) 更可以推论出以下的一些结论：

情况	条件	结论
1	$\Delta \neq 0$	方程组有唯一解。
2	$\Delta = 0$及其中最少一个Δ_x ，Δ_y 或 $\Delta_z \neq 0$	方程组没有解。
3	$\Delta = 0$及$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$	方程组没有解或有无限多个解。

在情况 1 中，方程组有唯一解及 $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$。

在情况 2 中，由于已知条件与(*)互相予盾，故方程组没有解。

在情况 3 中，可利用以下例子解释方程组没有解或有无限多个解。

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \quad (\text{没有解}) \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \quad (\text{无限多个解}) \\ 3x+3y+3z=9 \end{cases}$$

学生会对于情况 3 中为何没有唯一解产生疑问。在情况 3 下，方程组既可没有解，亦可有解。假设方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有一解 $\mathbf{x}_1$，即 $A\mathbf{x}_1=\mathbf{b}$。当在情况 3 中，$\Delta = 0$，教师可应用《课程及评估指引》第 64 页中注释内的定理指出齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 必有最少一个非零解。假设此非零解为 $\mathbf{x}_2$，则 $A\mathbf{x}_2 = 0$。由于 $A(\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + \lambda A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} + \lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{b}$，其中 λ 为任意实数，所以有 $\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2$ 为方程组的一组非零解。故此，若方程组有解，则它必有无限多个解。

学生须理解「一个齐次三元线性方程组有非平凡解当且仅当它的系数矩阵为奇异矩阵」的定理的证明。教师可用一个二元齐次线性方程组与学生探讨该定理，藉此亦可一并引入「当且仅当」的意义。学生亦须理解一个齐次线性方程组必兼容，且须知道如何找出其非平凡解。

除了使用克莱玛法则外，学生须懂得利用高斯消去法解线性方程组。借着建立增广矩阵，运用基本行运算求线性方程组的解。

矩阵是解线性方程组的另一个重要的工具。当线性方程组以矩阵形式表示，若系数矩阵的逆矩阵存在，可运用逆矩阵方法解线性方程组。学生须知道在逆矩阵不存在时，这方法失效。教师可借着解线性方程组，展示矩阵、行列式及基本行运算之间的联系。

学习单位	学习重点	时间
代数领域		
向量		
15. 向量的简介	15.1 理解向量及纯量的概念 15.2 理解向量的运算及其性质 15.3 理解向量在直角坐标系统的表示法	5

课程阐释：

第三学习阶段学习单位「续立体图形」的其中一个目的，是为培养学生的空间感。在学习单位「直线的坐标几何」中，学生亦曾运用分析的方法研究直线的性质。

在讨论向量的性质时，向量只限于 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$，亦应强调模和方向两个重要的概念。同时，应向学生指出向量的概念与第三学习阶段学过的直线的概念是有所不同的。学生须理解 $\mathbf{R}^2$ 上的公式 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\mathbf{R}^3$ 上的公式 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，在 $\mathbf{R}^2$ 上的公式 $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 及 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，及非零向量与 x 轴形成的夹角。本课程不要求在 $\mathbf{R}^3$ 中引入方向余弦的概念。$\mathbf{R}^3$ 上的直线方程和平面方程超出本单元范围。

对于向量的运算及其性质，须与学生讨论学习重点 15.2 注释栏内的八个性质。

学习单位	学习重点	时间
代数领域		
向量		
16. 纯量积与矢量积	16.1 理解向量的纯量积（点积）的定义及其性质 16.2 理解在 $\mathbf{R}^3$ 中向量的矢量积（叉积）的定义及其性质	5

课程阐释：

学生须能分辨纯量积和矢量积，并能讨论纯量积和矢量积的几何意义及其性质。须注意学习重点 16.2 中，所有关于向量的讨论只限于 $\mathbf{R}^3$。

作为起步点，可采用以下其中一个定义引入矢量积：

(1) 对于两个 $\mathbf{R}^3$ 的非零及互不平行的向量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$，

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$，其中 θ 为 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 之间的夹角($0°\le\theta\le180°$)，$\hat{\mathbf{n}}$是一个与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均垂直的单位向量，且 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 满足右手定则。

否则，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$。

(2) 若向量 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$，

则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$。

教师亦可向学生介绍以行列式表示矢量积，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$。

教师须向学生介绍纯量三重积及其性质，与及纯量三重积的行列式表示式

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$，其中 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$、$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$。

教师可运用行列式的性质证明纯量三重积两个性质$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 和 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$，和解释 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 的几何意义，其中 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 可视为“平行六面体底面积乘以它的对应高度”，换句话说，纯量三重积等于一个平行六面体的体积。

学习单位	学习重点	时间
代数领域		
向量		
17. 向量的应用	17.1 理解向量的应用	8

课程阐释：

在第三学习阶段，已经讨论过两线平行或垂直的条件。在这学习单位，学生须运用向量的性质来处理平行和正交的概念。两个非零向量的矢量积等于零表示两向量平行；如果一个非零向量是另一个非零向量的纯量乘积，这两个向量平行。两个非零向量的纯量积等于零表示向量正交。学生可运用向量的概念探究线段的分割及一个向量至另一向量的投影。此外，学生还可利用纯量三重积、纯量积及矢量积求分别为平行六面体的体积、两向量之间的夹角和平行四边形的面积。

教师应注意不须引入立体几何中的直线方程及平面方程。

学习单位	学习重点	时间
进阶学习单位		
18. 探索与研究	通过不同的学习活动，发现及建构知识，进一步提高探索、沟通、思考和形成数学概念的能力	10

课程阐释：

本学习单位旨在提供更多学习空间，让学生在学习其他学习单位的内容时，能参与更多有助发现及建构知识、提高探索、沟通、思考和形成数学概念的能力之活动。换句话说，这并非一个独立和割裂的学习单位，活动可在课堂中引起动机、发展、巩固或评估等不同环节进行。

鸣 谢

我们特别向下列委员会及工作小组的委员致谢，多谢他们对本小册子所提供的宝贵意见和建议。

课程发展议会数学教育委员会

课程发展议会 — 香港考试及评核局数学教育委员会（高中）

课程发展议会 — 香港考试及评核局高中数学课程（单元二）工作小组

ISBN 978-988-8040-42-1