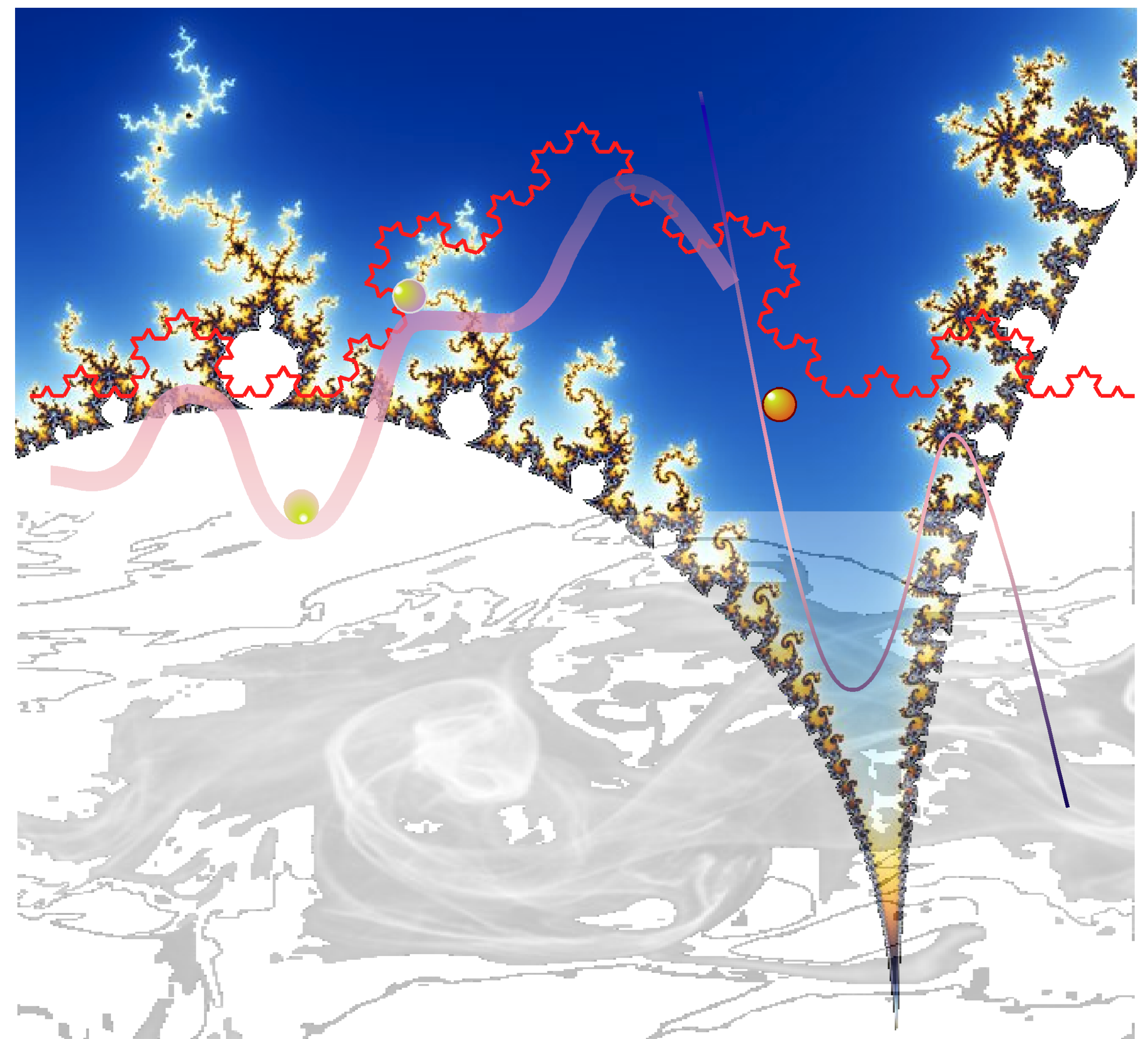


## 數學百子櫃系列 (二十)

# 宇宙的尺度變異定律



數學百子櫃系列 (二十) 宇宙的尺度變異定律

ISBN 978-988-8159-92-5



9 789888 159925 >

教育局數學教育組編訂  
政府物流服務署印

Prepared by the Mathematics Education Section,  
the Education Bureau of the HKSAR  
Printed by the Government Logistics Department

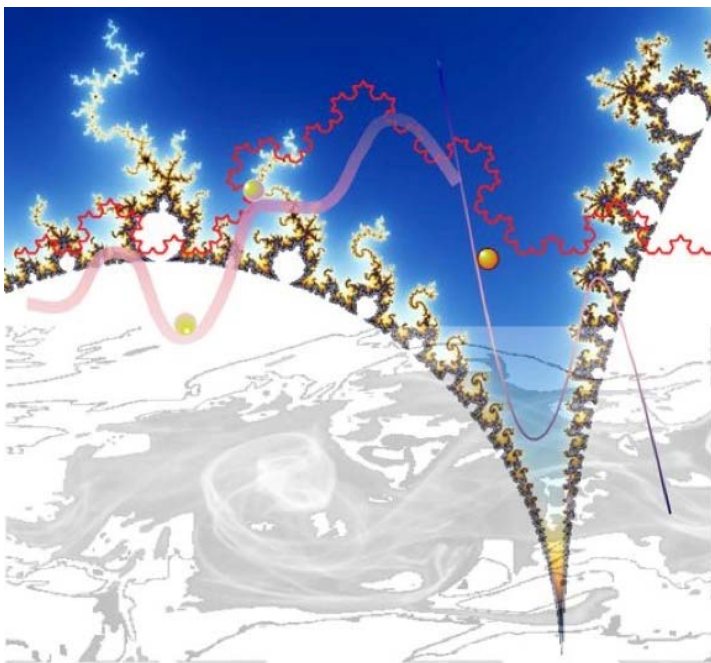
教育局數學教育組

教育局  
課程發展處數學教育組

數學百子櫃系列（二十）

# 宇宙的尺度變異定律

## 龍振強



*Universal Scaling Laws, C.-K. Loong*

教育局  
課程發展處數學教育組

版權

©2015 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。  
。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

**ISBN 978-988-8159-92-5**



*For Rosa Po Po Wong*

# 目錄

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 目錄.....                        | i         |
| 前言.....                        | i         |
| 2015 年 11 月 30 日 .....         | v         |
| 引語.....                        | vi        |
| 1.1 多項式函數，冪級數及冪定律 .....        | 1         |
| 1.2 幾何序列，生長律和衰變律 .....         | 6         |
| 1.3 指數函數和對數函數 .....            | 13        |
| 1.4 小結.....                    | 17        |
| <b>第二章：變異觀察尺度與變異體形尺度.....</b>  | <b>18</b> |
| 2.1 變異觀察尺度（scaling） .....      | 18        |
| 2.2 感覺對變異激勵尺度的冪定律 .....        | 20        |
| 2.3 變異體形尺度（allometry） .....    | 22        |
| 2.4 代謝率（metabolic rate） .....  | 23        |
| 2.5 克萊伯定律（Kleiber's law） ..... | 24        |
| 2.6 小結.....                    | 27        |

### 第三章：分形幾何 ( fractal geometry ) : 包容在歐氏空間

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 普遍而不明顯的結構 .....                  | 28 |
| 3.1 怎樣審察日常物體包容在歐氏空間的變異尺度結構 ..... | 30 |
| 3.2 分形幾何的特色和與歐氏幾何的關係 .....       | 36 |
| 3.3 分形幾何的歷史 .....                | 38 |
| 3.4 分形的類別 .....                  | 41 |
| 3.5 小結 .....                     | 47 |

### 第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形 .....

|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 動力學 – 綫性系統：定點之吸引子和排斥子，勢函數 .....                         | 51 |
| 4.2 動力學 – 非綫性系統 .....                                       | 55 |
| 4.3 分歧 (bifurcation) 和臨界現象 – 非綫性動力系統的重要表徵 .....             | 56 |
| 4.4 滯後 (hysteresis) 現象 .....                                | 61 |
| 4.5 差分方程 (difference equation) 與混沌 (chaos) 理論 .....         | 63 |
| 4.6 蝴蝶效應 (butterfly effect) .....                           | 70 |
| 4.7 複數映射 (complex maps)：從曼德博集合 (Mandelbrot set) 回到分形 .....  | 72 |
| 4.8 關聯函數 (correlation function) 和功率譜 (power spectrum) ..... | 78 |

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>第五章：協同學：一門共同合作的科學</b> .....                                     | 82  |
| 5.1 信息理論（information theory）－極值信息原理 .....                          | 83  |
| 5.2 統計力學和熱力學－熵極量增長原理 .....                                         | 86  |
| 5.3 淺談協同學 .....                                                    | 89  |
| 5.4 小結 .....                                                       | 95  |
| <b>第六章：從數學模式到跨學科研究</b> .....                                       | 96  |
| 6.1 好看而不現實的正態分佈（normal distribution 或 Gaussian distribution） ..... | 96  |
| 6.2 自然而不自在的冪定律分佈 .....                                             | 98  |
| 6.3 物理學的相變（phase transition）－序參數和臨界指數 .....                        | 105 |
| 6.4 擴散－布朗運動及無規行走 .....                                             | 109 |
| 6.5 崩塌（avalanche）－能量猛烈釋放現象 .....                                   | 126 |
| 6.6 滯後－能量釋放的控制和利用 .....                                            | 130 |
| 6.7 網絡（network）－自然規律和人類文明的命脈？ .....                                | 136 |
| 6.8 小結 .....                                                       | 142 |
| <b>第七章：微觀尺度的實驗測量</b> .....                                         | 144 |
| 7.1 光子和中子探針 .....                                                  | 145 |



|                                        |            |
|----------------------------------------|------------|
| 7.2 納米構造淨化汽車排放的催化劑 – 從凝膠到分形到晶體的測定..... | 146        |
| 7.3 X 射綫源 .....                        | 151        |
| 7.4 中子源 .....                          | 154        |
| <b>致謝 .....</b>                        | <b>162</b> |
| <b>作者簡介 .....</b>                      | <b>163</b> |
| <b>索引 .....</b>                        | <b>164</b> |

## 前言

2009年是英國偉大自然生物學家達爾文 (Charles Darwin, 1809-1882) 誕辰二百週年，也是他的傳世之作《物種起源》出版一百五十週年。可能沒有多少人留意到達爾文在自傳中提及有關數學的一段話：

「我曾經嘗試學習一些數學，在1828年夏天我甚至跑到巴茅斯城聘用了一位教師私人授課（他是一位非常枯燥無味的人）。但我的學習進度非常緩慢，我厭惡這種學習，主要因為我不明白代數起初的步驟有何意義。這種不耐煩的態度十分愚蠢，多年後我深感懊悔，為何當初我不學習至某程度，讓我至少明白數學的一些基本要點，因為懂得數學的人似乎比別人多了一重感覺 (extra sense)。」

也許這種感覺令我們能夠把事物條理看得更加清晰。正如美國威斯康辛大學數學系教授愛倫伯格 (Jordan Ellenberg) 在其著作 *How Not to be Wrong. The Power of Mathematical Thinking* 當中，有這樣的說法：

「懂得數學就好像具備一對X-光的透視鏡，能看穿世上隱藏在亂雜和混沌事物背後的條理。數學是一門讓人們不會看錯事物的科學，它的方法和體制是經過多世紀辛勤考驗磨鍊出來的。」

本書的作者，正是基於愛倫伯格的這個信念，為廣大的中學師生用心寫作了這一本好書。讓我引用作者自己的話闡明這一點：

「[⋯] 對很多人來說，數學是一門抽象的學問：背後有一羅網的公理和定義，陌生的地域散佈著數字、符號、形狀、公式、時空坐標等架構，航行其間要依賴計算、量度、邏輯演繹、推理等手段。不錯，運用數學方法可以從披露的現象找出某些模式或典範，從而建立一個揣測，如果揣測與事實一致，我們說數學分析支持這模式作為該事實的“真相”。數學還可以將相連事物的真相歸納起來，稱為規律。我們相信這些規律的運作，直至它被革新的實驗證據推翻，被改進的新規律取替為止。可惜這些辛勤磨鍊往往被視為數學的門檻，令人迴避，不敢高攀。這小冊子講的恰恰和這概念相反。我們認為數學不但容易接近，而且會帶給你樂趣——即 NOT TO BE WRONG 的滿意。

[⋯]所以數學就是人和宇宙溝通的語言，正如人與人溝通的語言，數學不是先學好，然後再運用這樣一回事，而是邊學邊用，正如學語言一樣。這本小冊子不打算向你提供一連串的數學定理和公式，各章談到的也不限於數學，會涉及物理、生物、經濟等問題，就是那些看起來雜亂無章的現象，等待著我們用適當的數學思維方法去尋找背後的規律。

[...] 在短短的七章裡，可以介紹的語言工具和演繹手段十分有限。但對整體概念、方法輪廓、和結論分析都通過跨領域的例子闡釋，希望讀者們能意識到揣測、驗證和歸納 — 即數學思維 — 的意義。這書的主要對象是中學生，我們不預期你們日後都成為數學家（當然做數學家是很值得和有意義的專業）。但無論你從事那一行業，總逃避不了時代潮流的衝擊和環境事物的影響，至於個人生活或人際關係也離不開物質、生理、和感情上的抉擇。能夠用數學思維分析處理事物是充實和強化自己最有利的途徑。而且此途徑最適宜從早實踐，正如語言一樣，應該從小訓練，越用越精。[...]」

第一章和第二章已經點題，先介紹幾種基本的數學函數，強調非線性變化和多體問題是自然界和人類社會複雜現象的根源，並且指出變異尺度對觀察和分析事物的重要性。或者，讓我也舉一個輕鬆的有關例子。愛爾蘭諷刺小說作家斯威夫特 (Jonathan Swift, 1667-1745) 在其1726年的著名小說《格列佛遊記 (Gulliver's Travel) 》中也處理了一些有關比例的問題。在書中，他對船長格列佛在小人國利利普 (Lilliput) 的生活作出精確的描述：在當地 (小人國) 居民的大小是他的十二分之一，而在大人國布羅丁那格 (Brobdingnag) 居民的大小是他的十二倍。這個故事情節既可以當作趣味閱讀，又可以用作富有啟發的數學練習。例如，每日多少個利利普人的食糧才可以喂飽格列佛呢？(答案：1728。) 不過，作者在描述大人國那位嫉妒的宮廷小丑矮人格林大奇列治 (Glumdalclitch) 的惡意陰謀時，卻犯了一個嚴重的錯誤。格林大奇列治欲加害於格列佛，趁格列佛站在一棵蘋果樹下時

，大力搖動該蘋果樹。可憐的格列佛事後回憶說，「我碰巧低頭彎腰的時候，其中一個（掉下的蘋果）打在我的背上，我跌得鼻青臉腫，不過還好，我沒有受到其他的傷害」。只要具備一點物理學的知識，稍作一點估算，我們就可以斷定格列佛必死無疑！

接著第三章講述分形結構和自然界及社會現象的密切關係，第四章闡述分析非線性動力學的數學方法。第五章介紹協同學 (Synergetics)，通過數學分析來歸納非線性現象的各種屬性，從而導出其普適性的學問。第六章是前面各章的結晶，列舉物理、經濟、地球生態、生物、崩潰性和擴散性的能量釋放、滯後現象、網絡通訊等跨領域例子，演示其中具普適性、貫切系統平衡到非平衡狀態的變異尺度規律。第七章介紹測量微觀世界納米空間與高頻時間尺度的實驗裝置及其與應用數學的關係。這眾多如此豐富多姿的跨領域事例，是不容易全在一本書內能夠讀到的。作者學識之廣博，可見一斑。

龍振強博士乃資深物理學者，曾在美國從事物理研究工作多年，他於物理和數學之湛深學養，自不待言。更難得的，是他的通識眼光和他在不同領域的廣博學識，再加上他對莘莘學子的關懷，促使他在「退而不休」後的百忙中仍然提筆為他們寫作本書，介紹數學與物理的應用及更基本的科學精神。作者從概念開始，不時適當地加插一點歷史由來和應用的例子，介紹有關的物理知識。書的內容，是以趣味為主。但

那不等於說讀者可以不經心地，像翻閱一本消閒雜誌那樣對待這本書。如果作者存著景仰科學的感恩情懷用心去寫，讀者也應存著同樣的心和敬意去閱讀吧，這樣做，當能獲益良多。

蕭文強

2015年11月30日

## 引語

我們為甚麼要學習數學？美國威斯康辛大學數學系教授 Jordan Ellenberg—2014年出版 “How Not to be Wrong. The Power of Mathematical Thinking” 的作者—有這樣的說法：“懂得數學就好像具備一對X-射綫透視鏡，能看穿世上隱藏在亂雜和混沌事物背後的條理。數學是一門讓人們不會看錯事物的科學，它的方法和體制是經過多世紀辛勤考驗磨鍊出來的。”<sup>1</sup> 對很多人來說，數學是一門抽象的學問：背後有一羅網的公理和定義，陌生的地域散佈著數字、符號、形狀、公式、時空坐標等架構，航行其間要依賴計算、量度、邏輯演繹、推理等手段。不錯，運用數學方法可以從披露的現象找出某些模式或典範，從而建立一個揣測，如果揣測與事實一致，我們說數學分析支持這模式作為該事實的‘真相’。數學還可以將相連事物的真相歸納起來，稱為規律。我們相信這些規律的運作，直至它被革新的實驗證據推翻，被改進的新規律取替為止。可惜這些辛勤磨鍊往往被視為數學的門檻，令人迴避，不敢高攀。這小冊子講的恰恰和這概念相反。我們認為數學不但容易接近，而且會帶給你樂趣－即NOT TO BE WRONG的滿意。

伽利略曾說過：“要看懂宇宙我們必須了解它的語言和熟悉該語言的表徵。這語言就是數學，表徵就是三角形、圓形和其它幾何圖形等文字。忽略這語言我們便對宇宙一窺不通，

---

<sup>1</sup> Jordan Ellenberg, (2014) *How Not to be Wrong. The Power of Mathematical Thinking*, The Penguin Press (New York), p.1.

等於失落在一個黑暗的迷宮。”<sup>2</sup> 所以數學就是人和宇宙溝通的語言，正如人與人溝通的語言，數學不是先學好，然後再運用這樣一回事，而是邊學邊用，正如學語言一樣。這本小冊子不打算向你提供一連串的數學定理和公式，各章談到的也不限於數學，會涉及物理、生物、經濟等問題，就是那些看起來雜亂無章的現象，等待著我們用適當的數學思維方法去尋找背後的規律。

用數學思維從複雜的現象尋找背後的規律，談何容易？讓我們拿個笑話作比喻。有一個富豪酷愛賽馬，為了培育自己的良駒馬到成功，特意徵求專家意見。首先育種專家說，繁殖一定要從交配純種和有血統來歷的名馬開始，後代可以承繼父母的優性。但又不能過度局限基因庫，要平衡雜種優勢。如此這般一連串的理論。然後營養學家提出，馬只有一個胃，不會反芻，但須要消化草料的纖維，要倚靠微生物在馬消化系統內長15-21米的小腸和1.2米的大腸幫助發酵分解飼料和吸收營養；馬的胃容量少，要慢慢地多吃，一次不能過量，疝痛是嚴重的致命原因。也是一番大道理。最後富豪也想聽聽物理學家的意見，物理學家劈頭便道，我們假設馬是球狀的！這笑話表示每人考慮同一個問題有不同的入門方法。物理學家將複雜的培育賽馬問題簡單化得太過份吧？可是從另一角度來看，尋找複雜現象背後的規律，不一定要將複雜性如數家珍地列出。相反地，可能從簡化的前提入手，去蕪存菁地較容易找出答案，至於那些被疏忽的細節可能與大方向關係不大，到頭來互相抵消。

---

<sup>2</sup> Galileo Galilei (1564-1642), *Opere il Saggiatore*, p. 171.



十四世紀奧卡姆的威廉（William of Ockham, 約1287-1347）是英格蘭著名的邏輯家和哲學家。他的言論和處事方法主張求其樸素的精神，如果有兩個辯證方法找到同樣結論，應採用兩者之中較簡單的方法。後世人稱之為奧卡姆剃刀（Occam's razor）。這小冊子將提到的現象，如物理相變、生長擴散、雪崩、動物毛皮圖紋、人口財富分佈、信息網絡等，每項和相關的數學方法都足以用單行本介紹，但我們揮動奧卡姆剃刀，經雕削後包含在一本小冊子裡，希望不只化繁為簡，還增加其趣味性和可讀性。

第一章介紹幾種基本的數學函數，強調非綫性變化和多體問題是自然界和人類社會複雜現象的根源。第二章指出變異尺度對觀察和分析事物的重要性。剛提及把馬假設為圓球的笑話，那物理學家的想法也不完全荒謬的，這假設可以用來解釋為甚麼細小的老鼠要吃穀物維生，而比老鼠太多的馬兒只需吃草（第2.5節）。第三章講述分形結構和自然界及社會現象的密切關係。第四章闡述分析非綫性動力學的數學方法。第五章介紹協同學，是通過數學分析來歸納非綫性現象的各種屬性，從而導出其普適性的學問。第六章是前面各章的結晶，舉列物理、經濟、地球生態、生物、崩潰性和擴散性的能量釋放、滯後現象、網絡通訊等跨領域例子，演示其中具普適性、貫徹系統平衡到非平衡狀態的變異尺度規律。第七章介紹測量微觀世界納米空間與高頻（飛秒－納秒）時間尺度的實驗裝置及其與應用數學的關係。閱讀時總有個過程，從上述的笑話到數學函數的基本定義（1－2章），對一般讀者是‘溫故’。之後將較新的數學概念連接到自然現象（3－5章），尤其數學方法的綜合應用以至微觀實驗求證（6

—7章），可算是‘知新’的階段。但目的不是要把新東西——那些看來超過中學、甚或大學入門程度的題目——鑽研根本，而是先作概念性的基層了解。正如先欣賞整個森林的生態，暫不理會一花一草的基因構造。以後讀者們將有漫長的機會去專注各種自然和社會的環節。這本書希望能起一點發酵的作用。書裡很多中英對照的名詞也是這個用意，當你們從外語文獻或在外地親身體驗時，不會感到陌生。

話說回來，找到一些普適性規律，可能會滿足我們一時的好奇，好奇往往是新知識、新技術的源頭，提供優化人生、成就事業機會的開始，在廿一世紀標榜全球化經濟和網絡科技化的社會，對養成數學思維習慣的年輕人，到底還有甚麼現實的好處？我們會於全書的結語嘗試給讀者們一個答案。



# 第一章：多項式、指數、和對數等函數

本章向你介紹幾件數學工具，但不是用教科書的形式。主要從概念入手，說一點歷史由來和應用的例子。先簡單地提出幾種函數、方程和定律，以後各章還會作較深入的討論。

## 1.1 多項式函數，冪級數及冪定律

多項式函數是最常見的函數之一：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

為求簡單，只設一個實數的變量， $x$ ； $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  是常數； $n$  是正整數。圖 1.1 舉兩個簡單的例子。圖 1.1 (a),  $f(x) = 5 + 1.5x$  ( $a_0 = 5, a_1 = 1.5, a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$ ) 是一條直綫。其中  $a_1 x = 1.5x$  是綫性項， $a_1 = 1.5$  是直綫的斜率。圖 1.1 (b) 屬於三次方的多項式。

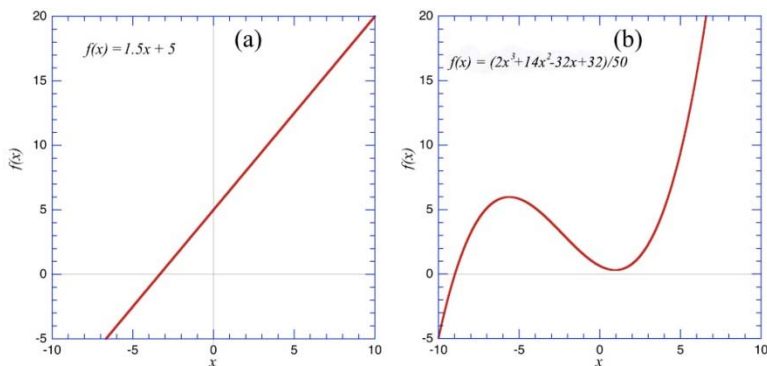


圖 1.1 (a) 直線方程 和 (b) 多項式

綫性項： $f_1(x) = a_1x$  是最基本的綫性函數。它滿足綫性函數的兩個條件，即：

$$1 \text{ 加性} \quad f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y), \quad (1.2)$$

$$2 \text{ 齊性} \quad f_1(cx) = cf_1(x). \quad (1.3)$$

比喻是： $x, y$  是作用， $f_1$  是效應；兩個作用引起的效應等於其個別效應的總和，作用倍增與造成效應的倍增成正比。注意，直線方程如圖1.1 (a) 的  $f(x) = 5 + 1.5x$  不滿足齊性(1.3),但只要將垂直坐標的原點移一下， $f(x) - 5 \equiv g(x) = 1.5x$ ， $g(x)$  便滿足齊性。所以直線方程都保持綫性的通性。

變異尺度，或稱標度（scaling）：方程 (1.3) 齊性表示改變變量的尺度，即  $c \times x$ ，其結果是  $c \times f_1(x) \propto f_1(x)$ ，這與原來的函數成正比，而且兩者的比率就是改變尺度的係數  $c$ 。這是綫性函數的標度不變性（scale invariance），也屬於自相似性（self-similarity）的一種，方程 (1.3) 便是其標度定律（scaling law）。

物理學的胡克定律（Hooke's Law<sup>3</sup>）闡述應力， $F$ ，與應變——即壓縮或拉長彈簧的長度， $x$ ，的綫性關係：

$$F = -kx, \quad (1.4)$$

這裡  $k$  是彈簧的勁度係數。阿基米德（Archimedes<sup>4</sup>）的槓桿原理其中力矩與矩臂長度在一定的靜力下也是綫性關係。據說他認為，只要有一個支點和夠長的槓桿，他可以把地球舉起。我們知道事實上這是不可能的，因為槓桿的硬度是有限的，過長便會彎曲，根本不能發揮槓桿的作用（見圖 1.2）。彈簧被拉過了綫性彈性界限會永久變形，胡克定律便會失效。這都是物質的非綫性屬性。

---

<sup>3</sup> Robert Hooke (1635-1703), 英國博物學家和發明家。

<sup>4</sup> Archimedes of Syracuse (約 287-212 BCE), 古希臘哲學家、數學家、物理學家、發明家、工程師。



圖 1.2 糟了，槓桿又彎又軟！

非綫性項：既然非綫性如此重要，我們再看方程 (1.1)

多項式函數的非綫性項：平方（ $a_2x^2$ ），立方（ $a_3x^3$ ）和其他高次方非綫性項。圖 1.1 (b)， $f(x) = (32 - 32x + 14x^2 + 2x^3)/50$ ，再不是直綫。如果  $n \rightarrow \infty$ ，方程 (1.1) 便成為冪級數（power series）：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

冪級數之重要是由於很多非綫性函數都可以展成為冪級數，例如：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \text{for } -\infty < x < \infty, \quad (1.6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad \text{for } -1 < x < 1. \quad (1.7)$$

冪定律 (power law)：讓我們從冪級數裡取出一項寫成冪定律：

$$f(x) = kx^\alpha, \quad \alpha \text{ 是實數但不限於整數。} \quad (1.8)$$

此冪定律的尺度變異結果是

$$f(cx) = k(cx)^\alpha = c^\alpha f(x) \propto f(x). \quad (1.9)$$

即改變尺度等於原來函數與  $c^\alpha$  的乘積，是屬於冪函數的自似性。那指數， $\alpha$ ，是無量綱的 (dimensionless)， $\alpha$  可以從實數概括為某種函數。不要輕看這簡單的冪定律，它用途廣，意義深。試想，只要有了冪指數  $\alpha$ ，無論面臨宇宙任何一角落的時空尺度（是尺度變異常數），我們都可以計算出函數的變化，所以又稱作無標度 (scaleless) 或免標度 (scale-free)。如果一個系統<sup>5</sup>在某環境下服從冪定律，無論那系統有多複雜， $\alpha$  反映出系統在當時環境的一種通性。倘若很多不同的系統都服從同一冪定律，我們就發現這系統群的普適性態，即不同系統擁有共同的系列性現象，如對電磁相變、生物增長律、市場交易狀態、生態的遷徙等動力性和非平衡的開放系統作宏觀到微觀的分析。冪定律 (1.9) 的應用面很廣，所以十分重要，是本書以後各章的主題。

方程 (1.8) 可以寫成

$$\ln f(x) = \ln k + \alpha \ln x. \quad (1.10)$$

---

<sup>5</sup> 由若干彼此依賴和互相作用的組成部份合成為一個具有一定結構和功能的整體，稱為系統 (system)。



可見將  $f(x)$  和  $x$  繪在  $\log-\log$  的尺度便成為一直綫，表示冪函數和指數函數有密切的關係，詳見下兩節。

## 1.2 幾何序列，生長律和衰變律

幾何序列及指數序列等概念，早在數學史正式記錄指數函數和對數函數前已經登場。中國哲學家莊子在‘天下篇’中有云：‘一尺之棰，日取其半，萬世不竭。’即幾何序列

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^i, \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, \dots$ 。其中僅四個字‘日取其半’

便將序列的規律說明白，今天拿是昨天賸下來的一半，明天再拿今天拿賸的一半。每一天拿這事情都是獨立的，不受歷史的影響，但如果知道今天所賸的長度，便可以推算過去任何一天的長度（假設沒有源頭的話）。在大自然就有這樣‘萬世不竭’的定律所產生的現象，例如核輻射。一個帶放射性的核同位素（核素），有它獨特的半衰期（half-life），從任何一刻  $N_0$  核素數量開始，經過半衰期後，核素數量便剩下一半，即  $N_0/2$ （衰變了的可能產生新的放射性核素，依照該新一代核素的半衰期繼續衰變。）。再過一個半衰期則餘下  $N_0/4$ ，如此類推。根據物理理論，宇宙的形成來自一個大爆炸（Big Bang），從開始以來宇宙一直在變化，通過核反應演成無數星雲，裡面有很多星系，包括地球所屬的太陽系。今天地球存在著大概270個穩定同位素和約50個不穩定的同位素。動植物（包括人類）體內也有一些放射性核素，無時無刻地

循著核衰變定律分裂。通過分析衰變現象的手段和配合其它科學方法，我們成功地在不違反科學證據的情況下了解約一百四十億年前宇宙的形成、約四十六億年前隨著太陽系的產生地球形成、約二十五萬年前現代人—智人（**Homo sapiens**）的誕生、... 甚至人類細胞DNA的構造。

衰變的反面便是生長，加倍期是半衰期的對應。中世紀後期意大利數學家斐波那契，又名比薩的列奧納多<sup>6</sup>，他構想一雙兔子的繁殖規則如下：

從一雙剛出生的兔子（雌雄各一）開始，交配需時一月。到第二月底雌兔生下一雙（雌雄各一）兔子，凡新生的需第一個月交配，翌月底雌兔才生下一雙雌雄，但每雙兔子過了第二月後，每月都生一雙雌雄兔子，繼續如此，兔子不會死亡。

這樣下去每月兔子共有多少雙？

---

<sup>6</sup> Fibonacci (Leonardo Pisano) (1175-1250).

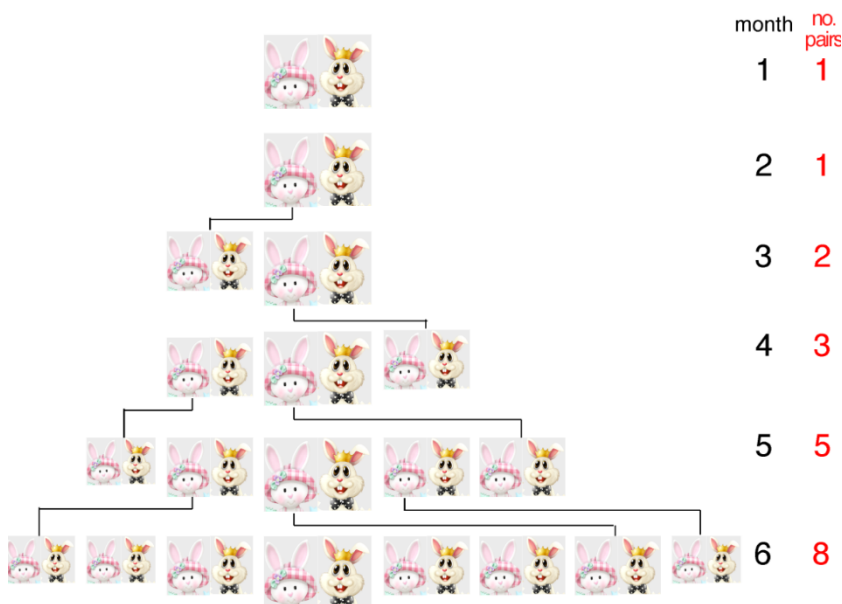


圖1.3 兔子頭六個月繁殖，數目（雙計）循斐波那契數遞增。

從圖 1.3 可看出，兔的生長數目（雙）是  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$ 。這就是發表於1202年著名的斐波那契數（Fibonacci numbers）。這序列有它一定的生成程序：從第三個起，它就是前面兩個數字的總和。 $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ ，而  $F_0 = 0, F_1 = 1$ 。<sup>7</sup> 任何一項都可以用以下公式計算：

<sup>7</sup> 用同一個生成程序但開始兩數字不同， $L_0 = 2, L_1 = 1$ ，這便是盧卡斯數（Lucas numbers），由法國數學家盧卡斯（François Édouard Anatole Lucas, 1842-1891）發明。

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (1.11)$$

圖 1.4 表示兔子數目的增長。到  $n$  每年年底增至（雙）144 ( $n=12$ ), 46368 ( $n=24$ ),  $1.493 \times 10^7$  ( $n=36$ )...，很明顯，上述的兔子繁殖規律不合符生理現實。可是，斐波那契數出現在自然界現象，如植物花瓣或種子排列的數目和雄性蜜蜂的祖先錄，與及適用於數學、物理學、計算機科學、語言學等。數學家們還特別出版斐波那契數季刊，*The Fibonacci Quarterly* <http://www.fq.math.ca/>。

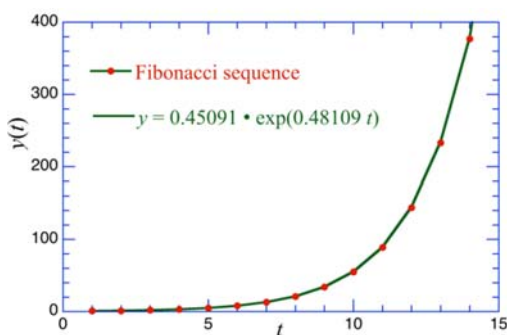


圖1.4 斐波那契數（圓點）與擬合曲線。

複利息是另一例子，也用幾何級數表示。假設開戶額是1元，年底付利息100%，如果一年派息兩次，存款（元）生長為

$\{1 \times 1.5, 1 \times 1.5^2\} = \{1.5, 2.25\}$  ； 每 月 派 息 則 為

第一章：多項式、指數、和對數等函數

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{12}\right), \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \right\} = \{1.0833, 1.1736, \dots, 2.6130\} \quad .$$

如果以複利年息100%計算，年底的存款是  $e$  元，

$$e \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\dots \quad (1.12)$$

瑞士數學家歐拉<sup>8</sup>用  $e$  表示這數字，故又稱歐拉數字。但其實首先計算複利息並發現這數字  $e$  是來自另一瑞士數學家伯努利<sup>9</sup>。從方程(1.12)，生長可以用以下的時間（ $t$ ）函數表示：

$$y(t) = y_0 2^{\frac{t}{T}} = y_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\frac{t}{P}} = y_0 e^{\frac{t}{\tau}}, \quad (1.13)$$

$y_0 = y(0)$  是生長前的數額， $T$  是加倍期， $r$  是在  $P$  週期的生長百分率， $\tau$  是加  $e$  倍期，而  $k \equiv \tau^{-1}$  稱為生長係數。表達衰變的方式一樣，即將上述的指數改為負值便可。

從上面的例子看到，生長或衰變的速率一般是非線性的。換言之，當時的變量值（如當時人口、核素量、存款）影響速率的變化。在數學上變化律是用微積分的導數表示，是很簡單的微分方程：

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad (1.14)$$

---

<sup>8</sup> Leonhard Euler (1701-1783)，數學家及物理學家。

<sup>9</sup> Jacob Bernoulli (1655-1705).

就是說，變化律， $\frac{dy}{dt}$ ，與變量， $y$ ，成正比， $k$ 是比例的

常數。這方程的答案（通過積分法）便是一個指數函數

$$y(t) = y(0)e^{kt} = y(0)\exp(kt). \quad (1.15)$$

從圖 1.5 看出， $y(t)$  的生長（ $k > 0$ ）速度循 $t$ 的增加而變得愈來愈快；衰變（ $k < 0$ ）程度開始時下降得很快，然後循 $t$ 的增加趨向漸近值0。從 (1.15) 可見  $y(t)$  本身是非綫性函數。但是，(1.14) 寫成  $\dot{y}(t) = ky$ ，右方是以 $y$ 為變量多項式的綫性項，所以(1.14) 卻是一條綫性方程。

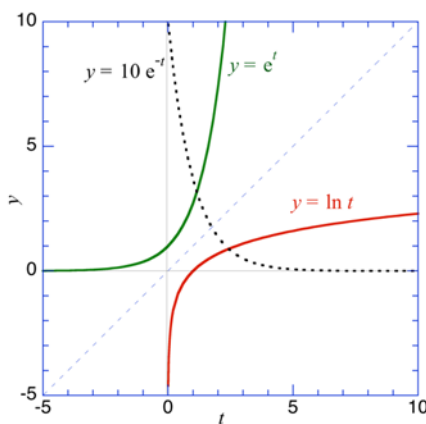


圖 1.5 指數函數（ $e^t$  生長， $10e^{-t}$  衰變）及對數函數（ $\ln t$ ）

。  $\ln t$  與  $e^t$  兩曲線以  $y = t$  直綫相互對稱。

我們再看圖 1.4，斐波那契數序可以用指數函數表達得十分準確： $y = 0.45091 \exp(0.48109 t)$ 。可是，數學史出現指數函數還是斐波那契之後五百年的事情。十八世紀末英國政治經濟學家馬以薩斯<sup>10</sup>深信人口以幾何級數遞增必然超過糧食和物資的供應，這個矛盾如不解決，只能讓天災人禍來調整人口，還提出歷史證據。後來達爾文<sup>11</sup>也受馬以薩斯的影響，促使他孕育出進化論適者生存的提論。與達爾文同時代布魯塞爾數學家韋呂勒<sup>12</sup>將馬以薩斯的無控人口生長方程，即(1.14)，修訂為：

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad (1.16)$$

其中  $K$  是人口上限額。韋呂勒稱(1.16)為邏輯斯諦方程 (logistic equation)。如果人口數接近人口上限額，即  $P \rightarrow K$ ，右面括弧便接近零，而人口亦接近不增長了。方程(1.16) 答案是：

$$P(t) = \frac{P(0)e^{rt}}{1 + P(0)(e^{rt} - 1)/K}. \quad (1.17)$$

圖 1.6 清楚地表明馬以薩斯和韋呂勒方程的不同增長形態。有關(1.16) 與及人口動力學的理論，詳見第四章。

---

<sup>10</sup> Thomas Robert Malthus (1766-1834). 於 1798 年出版著名有關人口理論。

<sup>11</sup> Charles Robert Darwin (1809-1882), 英國博物學家和生物學家。

<sup>12</sup> Pierre François Verhulst (1804-1849).

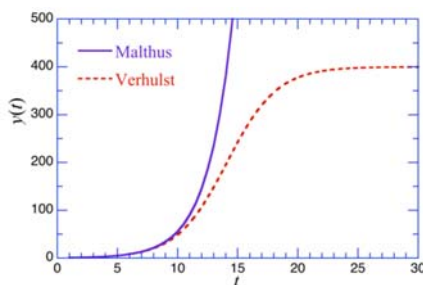


圖 1.6 馬以薩斯和韋呂勒方程的比較。馬以薩斯的仍是圖 1.4 的方程，即

$$P(0) = 0.45091, \quad r = 0.48109, \quad \frac{P}{K} \approx 0, \quad \text{韋呂勒的}$$

加上限額  $K = 400$ 。

### 1.3 指數函數和對數函數

在第一節我們提出多項式和冪級數，都屬於代數函數，第二節為了解釋幾何序列的現象，如生長和衰變，我們又介紹了指數函數，它和對數函數、三角函數（如  $\sin x, \cos x$ ）、雙曲函數（如  $\sinh x, \cosh x$ ）等都屬於超越函數。其實這些超越函數可以展開成無限項連加式——泰勒級數（Taylor series），是冪級數，如 (1.6) 和 (1.7)。然後逐項的導數或積分都變得容易。這方法在微積分的發展史起過很大的作用，這是題外話。

指數函數的反函數便是對數函數：

$$y(x) = a^x \Leftrightarrow x(y) = \log_a y, \quad \text{底數是 } a \text{ 及 } y > 0 \quad (1.18)$$



對數常用的底數及其主要適用領域包括：

$$\text{二進制對數 } y(x) = 2^x \Leftrightarrow x(y) = \log_2 y = \text{lb}(y), \text{ 計算機科學} \quad (1.19)$$

$$\text{自然對數 } y(x) = e^x \Leftrightarrow x(y) = \log_e y = \ln(y), \text{ 一般科學} \quad (1.20)$$

$$\text{常用對數 } y(x) = 10^x \Leftrightarrow x(y) = \log_{10} y = \lg(y), \text{ 工程學} \quad (1.21)$$

對數標度：圖 (1.4) 看出變量的增加，對數函數的相應增長很慢，所以很多幅度大的數量，如地震強度（黎克特制，Richter scale，底數10），溶液的酸鹼程度（pH，底數10），物理學的熵（entropy，底數 $e$ ），信息論（bits，底數2）等都採用對數標度。顯示這些信息時如果採用二維對數標度，則可容納分佈於多量級範疇的數據。

log-log plot: 倘若數據符合冪定律(1.8)，數據在log-log plot 上會形成一條直線，如 (1.10) 所示，直線的斜率便是冪指數。例如地震學的古登堡－黎克特定律（Gutenberg-Richter law），指出地震發生時強度不少於 $M$ 級的與其地震次數（ $N$ ）相互的冪定律關係<sup>13</sup>：

$$N = 10^{a-bM}, \quad (1.22)$$

$a$  和  $b$  是常數。因為強度黎克特制已是指數標度（底數是10

---

<sup>13</sup>由德－美地震學家 Beno Gutenberg (1889-1960) 與美國地震學家和物理學家 Charles Francis Richter (1900-1985) 提出。將冪定律(1.8)的  $y, k, x, \alpha$  分別寫成為  $N, 10^a, 10^M, -b$ ，便是 (1.22)。

，即  $A \sim 10^M$ ， $A$  是某些與地震強度相關的變量，如振幅），所以  $\log_{10}$ - $\log_{10}$  plot 又如圖 1.7 所表示。直線斜率是  $-b$ 。

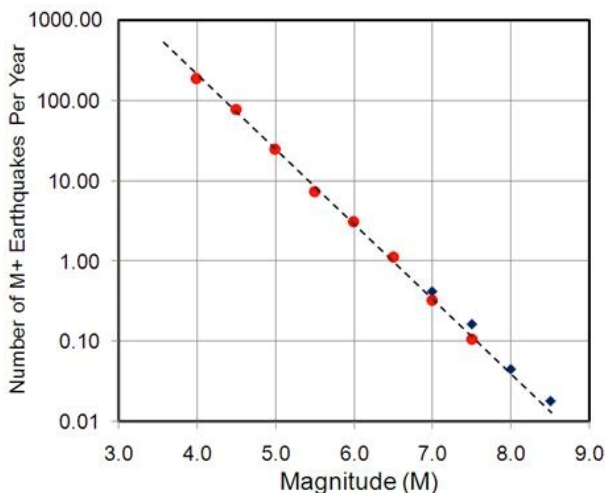


圖1.7 智利1973年至2009年 ( $M < 7.5$ , ●) 和1900年至2009年 ( $M > 7.5$ , ◆) 發生的地震符合古登堡－黎克特定律。詳見

<http://web.ics.purdue.edu/~braile/edumod/svintro/svintro.htm>.

標度不變的冪定律是本書的重要主題，我們會在以後各章遇到各樣的  $\log$ - $\log$  plots.

**log-linear plot:** 倘若數據符合指數函數，如(1.21)，我們則用半指數標度。例如，1965 年美國電子工程師和企業家摩爾預言<sup>14</sup>計算機集成電路的晶體管密度每兩年增加一倍，是一條冪定律，人稱摩爾定律（Moore's law）。圖 1.8是一個log-

<sup>14</sup> Gordon Moore (1929-).



## 1.4 小結

這章首先提出的是我們週圍以至整個宇宙的現象大部份都是非綫性的。非綫性系統十分重要，既有趣味，卻較複雜。從數學的角度而言，我們先介紹多項式和冪級數的非綫性項。雖是簡單的代數函數，那冪定律，(1.8)，非常重要，是全書的應用焦點。此外，指數函數和對數函數是超越函數中最基本，用來解析非綫性系統的函數。與冪級數也有密切的關係。至於理解有關生長（或衰變）率的動力問題，我們只提出最簡單的微分方程，(1.14) 及(1.16)。固然，對付複雜的非綫性系統還需要更多的超越函數和特別函數、微積分方程、與其他手段。我們不認為須要將這些高深的數學納入本書，真有興趣的年輕讀者將可在大學課程鑽研。正所謂“知之者不如好知者，好知者不如樂之者。”<sup>15</sup> 這本小冊子介紹幾種基本的數學工具，是要提起你們的興趣，馬上應用到理解外界的事物和現象，務求好於運用，樂於嘗試。這也是Jordan Ellenberg 鼓勵發揮的 ”The Power of Mathematical Thinking”。那麼，從下章開始，讓我們看看怎樣利用這幾件數學工具，去分析自然物質、生物功能、市場經濟等現象吧。

---

<sup>15</sup> 論語 《雍也》。

## 第二章：變異觀察尺度與變異體形尺度

宋朝著名詞人秦觀的雀橋仙，描寫牛郎織女被時空分隔的愛情，至今仍引起不少有情人的共鳴反響。

“纖雲弄巧，飛星傳恨，銀漢迢迢暗渡。金風玉露一相逢，便勝卻人間無數。

柔情似水，佳期如夢，忍顧鵲橋歸路。兩情若是久長時，又豈在朝朝暮暮。”

為甚麼？作者先挑起人世間每年難得相會一次的感情，卻又豪邁地將時間的尺度作超世性的延長。既然織女牛郎都是神仙，長生不老，那麼一年和一日的週期會有分別嗎？如果真是天長地久無時盡，又怎會惋惜未能朝夕相守之恨呢？

### 2.1 變異觀察尺度（scaling）

上述的例子，時間是變量，感情這屬性是函數。我們將量度時間的尺度改變，也等於把時間的分辨率從一天改成一年，而保持時間無窮無限的幅度，那感情這屬性在新尺度下會有什麼變化呢？如果屬性仍然與變量成正比，那就是某程度上的尺度不變（scale invariance）。先考慮最簡單的例子：一個  $L \times L \times L$  的正立方體和一個半徑為  $R$  的圓球，正立方體與圓球的體積（ $V$ ）和表面積（ $S$ ）都可以寫成冪定律  $X = kx^\alpha$ ：

正立方體

圓球

$$\begin{aligned} S &= 6L^2; & S &= 4\pi R^2; & (\alpha &= 2) \\ V &= L^3; & V &= \frac{4}{3}\pi R^3; & (\alpha &= 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

如果將直尺刻度  $x$  放大  $\lambda$  倍，兩者依照同樣的冪定律，見 (1.8)，

$$x \rightarrow \lambda x \quad (L \rightarrow \lambda L; R \rightarrow \lambda R) \Rightarrow S \rightarrow \lambda^2 S, V \rightarrow \lambda^3 V. \quad (2.2)$$

這就是圓球和正立方在變異觀察尺度上相同的對稱性，它們不同的幾何形狀只取決於冪定律的係數  $k$ ，例如對體積而言，正立方的  $k=1$ ，圓球的  $k=4\pi/3$ ，而  $\alpha$  都是 3。



圖 2.1 支柱和負荷直徑的比例。

冪定律的應用 – 決定冪指數  $\alpha$ ：再舉個例子，圖 2.1 表示一條支柱（橫截面直徑  $d$ ）承受著一個圓球（直徑  $D$ ，密度  $\rho$ ）。我們安排支柱的物料強度剛好抵受圓球的重量（

$\rho\pi D^3/6$  )，不致斷裂（不考慮縱彎曲）。那麼，負荷是  
 $\sigma = [\rho \times \pi D^3/6] / [(\pi/4)d^2]$ ， $\rho$ 和 $\sigma$ 由選擇物材決定，因此

$$d = \sqrt{(2/3)(\rho/\sigma)D^3} \propto D^{3/2}. \quad (2.3)$$

如果圓球直徑增倍（ $D \rightarrow 2D, d \rightarrow 2^{3/2}d$ ），支柱要多粗 2.828 倍。這也是老樹（枝葉體積大）的樹幹要比幼樹（枝葉少）的樹幹粗大得多的原因（圖 2.1）。也不用感歎我們不能用雙臂舉起一輛貨櫃車，而螞蟻能夠抬起等於它體重幾十倍的東西！

## 2.2 感覺對變異激勵尺度的冪定律

上節談的是物性變異觀察尺度的冪定律，人的感覺－例如秦觀詞裡的情感－有冪定律嗎？根據研究結果是有的。1961 年史蒂文斯（S. S. Stevens）在科學雜誌發表了人感覺系統對激勵因素的冪定律<sup>16</sup>，現稱史蒂文斯定律（Stevens' law）：

$$P = K(S - S_0)^\alpha, \quad (2.4)$$

以上的  $P$  是感覺的強度， $K$  是係數， $S$  是激勵變量， $S_0$  是激勵變量的閾值（threshold，強度低過  $S_0$  不引起反應）。下面

---

<sup>16</sup> S. S. Stevens (1961), "To Honor Fechner and Repeal His Law. A power function, not a log function, describes the operating characteristic of a sensory system.", *Science*, **133**, 80-86. S. S. Stevens (1962), "The surprising simplicity of sensory metrics.", *Am. Psychol.* **17**, 29-39.

表2.1列舉符合史蒂文斯定律的感覺冪指數的例子。

表2.1 人的感覺系統對激勵因素產生符合史蒂文斯定律的冪指數  $\alpha$  。

| 感覺    | 冪指數 $\alpha$    | 激勵因素               |
|-------|-----------------|--------------------|
| 光度    | (0.5, 0.33)     | (點光源, 5°角光源) 眼適應黑室 |
| 聲量    | (0.54, 0.60)    | (單耳, 雙耳)           |
| 氣味    | (0.55, 0.60)    | (咖啡味, 庚烷)          |
| 振動強度  | (0.6, 0.95)     | (250 Hz, 60 Hz) 指頭 |
| 味感    | (0.8, 1.3, 1.3) | (糖精, 蔗糖, 鹽)        |
| 溫度    | (1.0, 1.6)      | (冷, 暖) 手臂          |
| 手掌上壓力 | 1.1             | 皮上靜力               |
| 重量    | 1.45            | 提起砝碼               |
| 電擊    | 3.5             | 60 Hz 指頭接觸         |



## 2.3 變異體形尺度（allometry）

十八世紀英國・愛爾蘭作家兼牧師斯威夫特<sup>17</sup>（先匿名）寫的格列佛遊記（*Gulliver's Travels*），是大家耳熟能詳的故事。當格列佛在小人國（Lilliput）蘇醒時，包圍他的是無數不超過六英吋高的小人，大概是他12分之1的大小。後來到了大人國（Brobdingnag），週圍的大人都比他大12 倍。故事中連串的傳奇，儘管是作者虛構出來用以諷刺時事的手段，其中一個屢屢出現的論題：如果人類可以生活在體形縮小至擴大（或從大到小）的尺度環境，人們內在的價值觀如誠實、公正等仍是行為的主導嗎？抑或只賸下弱肉強食、仗大欺小的現實呢？



圖 2.2 格列佛遊記的小人國與大人國。

科學地比較生物物種的屬性（例如新陳代謝率、器官功能、

---

<sup>17</sup> Jonathan Swift (1667-1745).

妊娠期等）在體形自由度（一般是體重）變異情況下的相應轉變，謂之allometry。下面先講生物的代謝率。

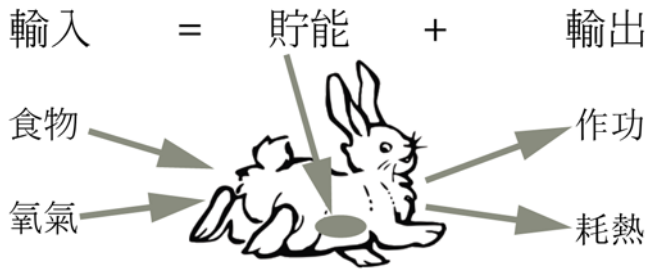


圖 2.3 能量的輸進和輸出動物身體。

### 2.4 代謝率（metabolic rate）

新陳代謝乃身體細胞所有化學作用的總和，通過食物和氧氣的輸入，產生能量（如發熱）和貯藏能量（如製造脂肪），輸出各種生活功能，并發放熱能，維持生命。所以

$$Q_{met} + U = Q_{loss} - W, \tag{2.5}$$

其中  $Q_{met}$  和  $Q_{loss}$  分別為新陳代謝產生在體內和發放出體外的熱量， $U$  是製成貯在體內的能量， $W$  是作功。代謝率就是單位時間產生的熱能， $Q_{met}/dt$ 。這裡測量的是基礎代謝率 BMR（basal metabolic rate），即是動物在靜態（但不是睡眠）、進食休歇後的正常環境下產生的熱能。在 (2.5) 中  $W = 0$  而  $U \sim 0$ 。因此，BMR 主要是動物吸收氧，將體內貯存的能量變成熱能，維持輸出體外的熱能損耗。代謝率的

常用單位是仟卡／日 (kcal/day)<sup>18</sup>。一個70公斤的人的BMR約 1,689 kcal/day ~ 81瓦。

現在我們考慮不同哺乳動物它們的BMR隨著體重 ( $m$ ) 變異的關係。從最基本上考慮，熱能損耗與身體的表面積 ( $S$ ) 成正比，即  $\text{BMR} \propto S$ 。假設動物的一維尺度是  $R$ ，那麼  $S \propto R^2$ ，而  $m \propto R^3$ ，所以

$$\text{BMR} \propto m^{2/3}. \quad (2.6)$$

換言之，動物要維持的代謝率和體重的變異是非綫性的。老鼠雖小，但要吃穀物；牛馬體形大，可以靠草料生存。由於老鼠的 $m$ 必牛馬的小，(2.6) 的冪指數  $\alpha = 2/3 < 1$  支持老鼠需要較高質素的養料來維持它相對於比牛馬多的熱量損耗。

## 2.5 克萊伯定律 (Kleiber's law)

克萊伯<sup>19</sup>是第一個仔細測量不同哺乳動物BMR的農業生物學家。他設計建造專供測量動物BMR的呼吸室。1932年發表他的研究結果，認為數據不符合方程 (2.6)，而是：

$$\text{BMR} \propto m^{3/4}. \quad (2.7)$$

---

<sup>18</sup> kcal = 1000 cal  $\equiv$  Cal. cal (卡路里) 是物理單位。即將 1 克水在 1 大氣壓下提升 1°C 所需的熱量。1 仟卡 = 4184 焦耳 (J, Joule)。Cal 是食物卡路里，常用於營養學或食物標定。代謝率是功率 (每單位時間產生的能量，常用單位是瓦，W = watt)。1 W = 1 J/s; 1 kcal/min = 69.7 W = 0.094 hp (horsepower, 馬力)。

<sup>19</sup> Max Kleiber (1893-1976).

之後其他專業研究者加進了不少新的BMR數據，不限於哺乳動物，還包括細菌與及培養皿裡的單細胞生物，認為數據基本上符合(2.7)。冪定律(2.7)被稱為克萊伯定律。圖2.4 是 West & Brown 編集數據描繪的一個 log-log plot 。<sup>20</sup>

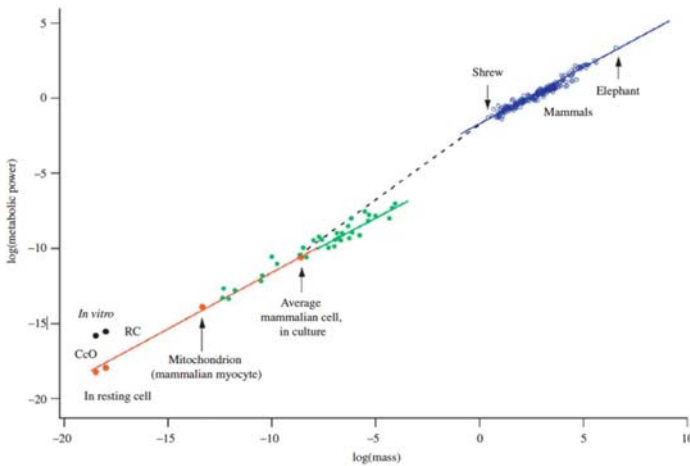


圖 2.4 BMR-生物體重（質量）的log-log plot。數據包括哺乳動物（藍色）、哺乳動物的平均單細胞（綠色）和其他有機體（橙色）。直線（不是虛線）代表克萊伯定律（冪指數=3/4）。(West and Brown, 2004).

---

<sup>20</sup> Geoffrey B. West and James H. Brown (2004), “The origin of allometric scaling laws in biology from genomes to ecosystems: towards a quantitative unifying theory of biological structure and organization”, *J. Experimental Bio.* **208**, 1575-1592.

West & Brown 還將克萊伯定律廣義化為“1/4-冪指數體變定律”：

$$y = y_0 m^{\frac{a}{4}}, \quad (2.8)$$

$y$  不僅是BMR，可以是其他測度的生理屬性， $y_0$  是正規化常數， $a$  是簡單整數。目前已發表的結果： $y$  包括壽命（ $a=1$ ），生長率和心跳率（ $a=-1$ ），腦質量、動脈直徑和樹木主幹直徑（ $a=3$ ）等。可是，克萊伯定律並不是沒有爭議的。有學者認為部份BMR數據不服從(2.7)，可能較接近(2.6)<sup>21</sup>。但無論如何，單從表面積考慮得來的2/3 冪指數，很明顯是過於簡單，把動物都看成一個沒有內臟的球體， $m \propto R^3$ ，忽略體內輸送養料途徑網絡的複雜結構。

現在我們假設身體內的肌肉骨骼構造是決定體重， $m$ ，的因素。如果肌肉骨骼成圓柱形，平均半徑是 $d$ ，而體形一維尺度是 $L$ ， $m \propto d^2 L$ 。根據前面2.1節的推理， $d \propto L^{3/2}$ ，見(2.3)，所以  $m \propto d^2 d^{2/3} = d^{8/3}$ ，即

$$d \propto m^{3/8}. \quad (2.9)$$

再者，代謝率就決定於肌肉發揮的功率  $\propto Fv \propto \sigma d^2 v$ ， $F$  是作用力， $v$  是速度， $\sigma$  是肌肉每單位橫截面積的力度。故此

$$BMR \propto Fv \propto \sigma d^2 v \propto d^2, \quad (2.10)$$

---

<sup>21</sup> P. S. Dodd, D. H. Rothman, and J. S. Weitz (2001), “Re-examination of the “3/4-law” of Metabolism”, *J. theor. Biol.* **209**, 9-27.

因為  $\sigma$  和  $v$  普遍隨著生物種類的變化不大。最後，(2.9) 與 (2.10) 合起來就得出  $BMR \propto m^{3/4}$  的結論，即(2.7)。

上述的推理不一定證明克萊伯定律的正確性，但相對於原來單從表面積的考慮則加了深一層的複雜性。我們須要逐步導入適當的內涵因素和優化數學模式，才可以入手研究世界上各種複雜的靜結構和動結構。

## 2.6 小結

本章介紹變異觀察尺度和變異體形尺度方法，探索第一章談到冪定律的冪指數。變異觀察尺度方法分析事物系統屬性隨著觀察尺度分辨率的改變而表現的通性，結論反映出系統內含的對稱性。變異體形尺度方法分析系統物種（如各種哺乳動物）某些共同屬性隨著物種的內涵自由度（如體重）的比例變異，結論反映出物種內部組織或結構的共同性。從幾個例子我們看到如果要仔細分析冪指數的意義，再不能將所有物體都假設成一些缺乏結構的幾何體（如圓球）。大自然的海岸線、山脈和狹谷的輪廓不是由純弧形合成的，網絡、腦表層和有機體薄膜不是幾何曲面，雲霧、海綿和器官不是由球粒或方格組成的三維結構。那麼，我們怎樣用最有效的數學模式去理解如此複雜的結構呢？這就是下章的主題－分形幾何。

## 第三章：分形幾何 ( fractal geometry )：包 容在歐氏空間普遍而不明顯的結構

我們生活在由左右、前後、上下正交坐標代表的3維 (  $xyz$  ) 空間，也就是歐幾里得空間 ( Euclidean space )<sup>22</sup>。眾所周知的點、直綫、平面和球形或多面體便分別是歐氏幾何0維、1維、2維和3維的典型結構<sup>23</sup>。(0, 1, 2, 3)便是歐氏幾何的維度，只限整數。三角、幾何、代數是用來描算各結構元素的相互距離、方向、角度、大小等關係的數學方法，微積分用來計算這些結構的局域或者全局的性質，如斜度、弧度、面積、體積等。雖然歐氏空間可概括為包括三維以上的空間，人們對一般物體的概念都是3維的，低於3 – 即2，1或0 – 是屬於特殊情況<sup>24</sup>。如果要形容物體的動態，便加上時間作為第4維度 (  $x, y, z, t$  )，這還可易於想像出來。歐氏幾何有幾個定律，如兩條平行綫不會有交點，兩點的最近距離是直綫，也是光在真空裡走的軌跡。

---

<sup>22</sup> Euclid of Alexandria (323-283 BCE), 古希臘數學家，有‘幾何之父’之稱。

<sup>23</sup> 也稱拓撲維數。

<sup>24</sup> 我們的意識是地球上所有物體都存在於3維空間。如果有一個平面世界或直綫世界，物體就分別在2維和1維空間生存，這些維數稱為嵌入維數。

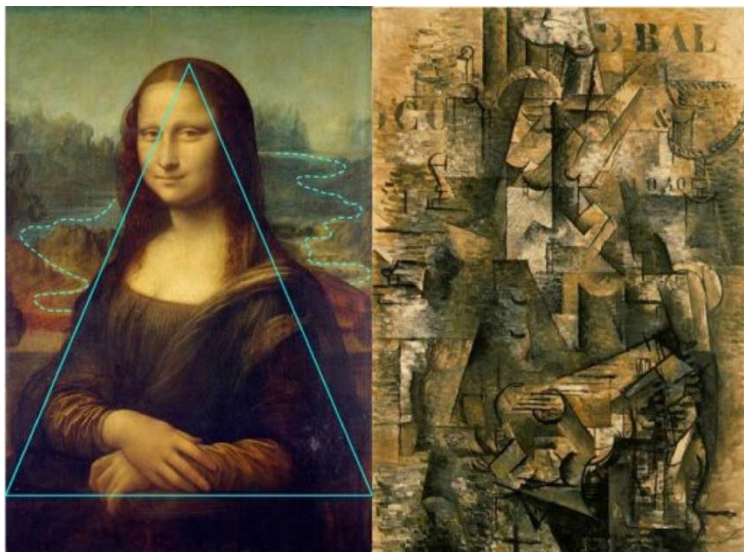


圖 3.1（左）萊昂納多・達芬奇的蒙娜麗莎。圖 3.2（右）喬治・布拉克的 *The Portuguese*。

歐氏幾何之外有非歐氏幾何。例如狹義相對論須採用閔可夫斯基空間（Minkowski space）<sup>25</sup>，任何事物的時空狀態都是相對的，由閔可夫斯基空間4維時空幾何決定。但這時空間仍是‘平’的，光信息還是沿直線進行。但若處於強大的重力場下，例如天體裡比太陽系重無數倍的星雲，根據愛因斯坦的廣義相對論，閔可夫斯基空間與幾何則變成彎

<sup>25</sup> Hermann Minkowski (1864-1909), 德國數學家。曾是愛因斯坦的老師。他開發幾何數論研究。1905年愛因斯坦發表狹義相對論，閔可夫斯基利用他的時空間幾何詮釋狹義相對論的結果。起初愛因斯坦不以為然，後來到他研究廣義相對論時領會到閔可夫斯基幾何是很重要的數學工具。

第三章：分形幾何：包容在歐氏空間普遍而不明顯的結構



曲，光循著測地線（geodesics）－不一定是直線－滑行，甚麼是平行線更不好說了。最極端的是在黑洞（black hole）的附近，洞裡的重力場強得不可思議，連光也只能進而不能出。不幸乘坐太空船的遊客會感受到無比巨大的潮汐張力，將所有東西扭歪而隨曲面勢阱被吸進黑洞。

### 3.1 怎樣審察日常物體包容在歐氏空間的變異尺度結構

我們幸福地生活於3維的歐氏空間，不用擔心走進貫通時光隧道的太空船<sup>26</sup>或遇到外星群的超級重力場。但是，單純歐氏幾何的結構元素往往難以表徵週圍環境。且看藝術家追求人物美感的例子。圖3.1的油畫是萊昂納多·達芬奇<sup>27</sup>的蒙娜麗莎（Mona Lisa）人像。首先，媒體是一幅2維的畫布，通過傳統的透視法來表現3維的視野。藝術家從基本幾何形式－如球體和柱體等－而脫穎到對肖像的頭、胸肩、臂和手各部份的連鎖美態描繪。但在構圖上則依賴一個等腰三角形為中心佈局，因為藝術家知道我們的注視力較易於集中到常規的幾何形狀。蒙娜麗莎媚人的眼神與微笑，卻用幾何的曲線為表達元素，這與背景裡彎曲的小徑和河道（虛線）相互對應。除此之外，無論你細看肖像的任一輪廓，都彷彿籠罩著

---

<sup>26</sup> 當然，一切都是相對的，地球的軌道運行速度是每秒 29.78 公里，微觀世界粒子運動需要狹義相對論闡釋。

<sup>27</sup> Leonardo da Vinci (1452-1519)，歐洲文藝復興高峰期意大利的藝術家、數學家、工程師和博學家。

一層如煙若霧的非歐氏幾何元素，這就是萊昂納多擅長的 ‘sfumato’ 技巧。圖 3.2 是喬治·布拉克<sup>28</sup>的 *The Portuguese*，另一題目是‘人與吉他’（*Man with a Guitar*）。這幅現世於蒙娜麗莎之後四個世紀（1911年）的畫與前者截然不同，藝術家布拉克和畢加索<sup>29</sup>是廿世紀初立體主義（Cubism）畫派的始創者。這幅畫是中期‘解析立體主義’的代表作。藝術家好像與我們玩遊戲，畫中沒有分明的前景和背景，而且畫家好像將原來的畫面打碎，我們看到的作品便是他根據個人心思把碎片堆砌出來的結果，讓我們去辨認那些屬於人的部份或屬於吉他的部份與及它們彼此的相互效應。面對的是各樣2維和3維的幾何元素，這片可能是演奏者的臉，那塊彷彿是吉他的弦。如此如此，不要求觀眾有一致的答案。而且，每片幾何元素都含著次元素，柳暗花明，別有洞天似的。

幾何形狀和結構在藝術雕塑與建築的表現更加明顯。例如法國巴黎艾菲爾鐵塔<sup>30</sup>（見圖 3.3），它包含的拱形、三角形、平台架構等幾何元素與及其對稱性都很鮮明。但細看鐵塔任何一部份（見圖 3.3右）有以下特徵：這些結構都不是實心的，其實裡面幾何元素組合密度不高。此外，大型尺度結構都包含著另一層的幾何結構，如此類推。

---

<sup>28</sup> George Braque (1882-1963)，法國藝術家。

<sup>29</sup> Pablo Picasso (1881-1973)，西班牙藝術家。

<sup>30</sup> Eiffel Tower，由居斯塔夫·埃菲爾（Gustave Eiffel, 1832-1923）設計，與 1889 年的世界博覽會建成啟幕。

第三章：分形幾何：包容在歐氏空間普遍而不明顯的結構



圖 3.3 巴黎艾菲爾鐵塔。

我們之所以先從藝術的角度看幾何元素在3維歐氏空間與美感的表徵關係，因為藝術有漫長的歷史，藝術家富於想像力和原創力，部份藝術家也是科學家或工程師，他們的作品有超時代的意義。今天察看自然環境，如圖3.4所示的煙霧、樹皮、花莖甘藍、貝殼、山脈、波浪等，都有類似圖3.2-3.3的從大到小的分層結構，每層都不像幾何元素那麼光滑，密度那麼均勻。



圖 3.4 自然界宏觀景物：煙霧、樹皮、花莖甘藍、貝殼、山脈、波浪。

最後，讓我們從物理的角度考慮微觀（microscopic）世界。我們很可能由於好奇或其他原因而接觸到元素的週期表。稍留心便注意到每元素均有一個晶體結構標記。即是在絕對零度（0K,  $-273^{\circ}\text{C}$ ）熱力學平衡的條件下，該元素的原子都排列成標記的3維晶體結構，是完美、長程序的歐氏幾何晶格結構<sup>31</sup>。只要是達到適當低溫和熱力學平衡，晶體化包括所有的化合物，這是能斯特定理（Nernst's theorem）。可是，在地球大氣的環境和室溫下，熱能引起的原子振動，干預著晶體的長程序。最重要的是大部份的物質都不是晶體狀態。如液體和氣體，原子和分子不斷地發生無規碰撞（或稱隨機碰撞），叫布朗運動（Brownian motion）<sup>32</sup>，數學上一般用

---

<sup>31</sup> 唯一的例外的是氦，在絕對零度下晶體化仍受拒於量子零能量效應，但加壓（約 66 大氣壓）氦便變成晶體。

<sup>32</sup> 由蘇格蘭植物學家 Robert Brown (1773-1858) 提出。  
第三章：分形幾何：包容在歐氏空間普遍而不明顯的結構

無規行走的模式去分析（見第6.4節）。固體也不一定是晶體態，例如常見的玻璃，缺乏長程序的原子排列。化合物的原子或分子被化學鍵連鎖起來，一般比較穩定，除非受到熱力、電磁、輻射或外來化學劑作用而被分解。另外是帶電的原子或分子（離子）之間的相互電磁效應，或處於滲透性壓力影響下的變化，是較柔弱的結合／分離作用。這兩者對維持生命功能都息息雙關，例如養份和藥劑輸送、神經信息的轉遞、蛋白、酵素和激素的化學作用等等。再者，大部份功能材料都不是純化學合成物，而是要經過適當的摻雜程序才能發揮功效。例如電子工業不在於生產純半導體，而是要掌握精確地摻雜有用電導元素的半導體技術，然後再鉗製成微型集成電路結構的晶體管。所以不難想像，在微觀世界的硬體和軟物質，雖然被容納於歐氏空間，但它們的結構是非常複雜，不能用簡單的歐氏幾何元素來表徵。圖3.5 描述將一隻名叫孔雀蝴蝶的翅膀逐步放大映像。說明從宏觀（macroscopic）到微觀世界的複雜結構。其中一些規律性的微結構形成光刪（grating），干涉光波以衍射出鮮明的特別顏色。

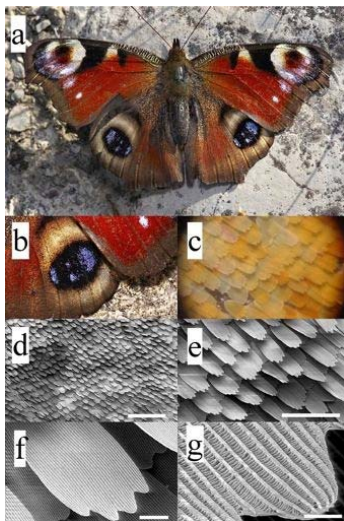


圖 3.5 孔雀蝴蝶翅膀從宏觀 (a-b) 到細觀 (mesoscopic) (c) 到微觀 (d-g) 的內部結構。觀察方法：(a-b) 肉眼，(c) 通過光學顯微鏡，(d-g) 掃描電子顯微鏡 (SEM) 分別由 50, 200, 1000 到 5000 倍放大，白色橫線分別代表 500, 200, 20, 和 5 微米的長度。

([https://en.wikipedia.org/wiki/File:Butterfly\\_magnification\\_series\\_collage.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Butterfly_magnification_series_collage.jpg))

面對各種不同層次的複雜結構及其隨著尺度變異的變化，意味著需要一種新的幾何概念和維數定義來分析其中的對稱性和比例規律。這種新數學工具就是分形幾何。

## 3.2 分形幾何的特色和與歐氏幾何的關係

分形（fractal）這個名詞是近代美·法籍數學家本華·曼德博（Benoit B. Mandelbrot, 1924-2010）在1975年發表的文章內命名的。字源來自拉丁文‘fractus’，是破碎的意思。他當時寫下一個概念性（或物理性）的定義<sup>33</sup>。分形是：

‘一個粗糙或碎屑般的幾何形狀，可以分割成若干部份，而每部份都（至少）是原來形狀的一個縮影。’

以上的定義趨向於物理性質的描寫，數學的定義過於抽象和拘謹，不適合在本書討論。我們作以下的補充解釋。

1 自相似性（self-similarity）：我們可以從圖3.4中找到例子。如樹皮，表面粗糙，有裂痕。若細看分出來小片的表面，還是粗糙和佈滿小裂痕。一縷煙和半縷煙的形態性質基本是一樣。甘藍的幹·分枝、貝殼的螺旋·空腔都是其中每分體的重複結構，山脈的支延與水波的紋路也是一樣。圖3.5 孔雀羽毛從大到小的羽枝元素也有同樣的性質。這叫自相似性<sup>34</sup>。

2 多尺度性（multiscale）：上述的定義只指出空間尺度，我們一定要加上時間的尺度，這樣分形幾何便包括靜態和動態的現象。分形幾何與歐氏幾何不是互斥的。分形物體或進

---

<sup>33</sup> Mandelbrot BB (1975) Les objets fractals, forme, hasard et dimension. Flammarion, Paris.

<sup>34</sup> 注意，分形必備自相似性；但有自相似性的結構不一定是分形。例如直線，它任何一截都自相似，但直線不是分形。

第三章：分形幾何：包容在歐氏空間普遍而不明顯的結構

程包容在歐氏時空間裡面。它們最大的分別是歐氏幾何對事物的描述只用一個尺度，分形幾何包涵了多尺度的特性，即空間和時間尺度的自相似性。

3 分形維數 (fractal dimension,  $d_f$ )：歐氏時空間的維數只限於正整數，其典型元素，即（點、直線、平面、方體，時空）。分別由拓撲維素， $d_t$  (topological dimension)，即 (0, 1, 2, 3, 4) 來代表。當整個分形被容納到相對的歐氏幾何元素內，這元素的維素稱為嵌入維數 (embedding dimension)，用  $d_e$  來代表。 $d_f$  與  $d_t$  之間的差異是  $d_f$  不限於整數。這個理念主要來自分形在時空間表面的粗糙性和內部的空透性（或不規則性）。

4 標度（或尺度變異）定律：導入分形幾何的數學概念使我們更有利地分析自然界的複雜現象，第一章提出的標度定律（見 (1.9)）仍然有效。所以，我們已經掌握分析分形結構的基本數學工具。標度定律說明，分形的特徵（例如長度、時間週期等）隨著量度的時空尺度（或分辨率）的變異而表現比例性的變化。

這些屬性將會在以下各章分別詳述。現先提出一個要點：數學分形的自相似是無窮無盡的，但是現實的分形現象不可能無限地放大或縮小下去，總會有一個極限，超越此極限之後自相似性便不再存在了。科學地測量和了解此極限與及分形的維數在各學科和行業的角色有重要的實用價值，也是第七章的討論重點。



### 3.3 分形幾何的歷史

前面說到，分形物體和進程在自然界如此普遍，為甚麼分形在數學史上要到廿世紀八十年代才出現呢？其實，早在150年前，數學家已有些靈感。分形其中一個特性是粗糙的表面。此特性在數學上表現在連續函數的可微分性。一般的直覺是既定的連續線意味著大部份線段有一定的導數。例如圖3.6(a)的連續函數  $f(x)=1-|x|$ ，是像希臘字母 ‘ $\Lambda$ ’ 形狀的連續線。在原點， $x=0$ ，有一個尖端（或紐結），所以不可微分，但其他任何一點都可，導數（斜率）是  $-1$  或  $1$ 。

$$f(x)=1-|x|=\begin{cases} 1-x, & \text{if } x > 0 \\ 1+x, & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\begin{cases} -1, & \text{if } x > 0 \\ 1, & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

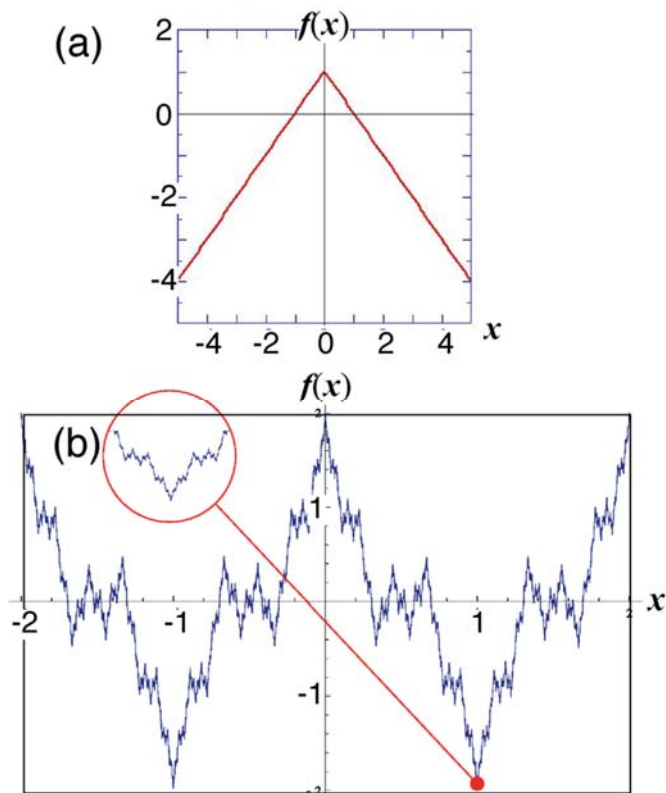


圖 3.6 連續函數。

(a)  $f(x) = 1 - |x|$ 。

(b) Weierstrass function，見

[https://en.wikipedia.org/wiki/W](https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function)

[eierstrass\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function)。

多尖端和紐結就代表粗糙。所以當捷克神學家 Bernard Bolzano 在 1830 年提出一個連續函數而函數的每一點都不可微分<sup>35</sup>，人們覺得不可思議。後來，1860—70 年間，也有幾個數學家<sup>36</sup>提出類似的函數，可是都被認為這些例子不屬於‘主流’，那些函數屬於‘病態性’的例外。文章沒有發表或不受注視。他們的文章沒有發表，都是後來人們在作者遺稿中發現。直至 1872 年德國數學家 Karl Weierstrass 發表他的函數，後稱 Weierstrass 函數：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad (3.3)$$

其中  $0 < a < 1$ ， $b$  是正單整數， $ab > 1 + 3\pi/2$ 。圖 3.6 (b) 是 Weierstrass 函數在  $-2 \leq x \leq 2$  的一個圖示例子。它和 (a) 圖有點相似，但重要的差異是  $x$  每一點都有紐結，所以都不可微分。這每放大部份顯現新的紐結便是分形自似性的表徵。

此外，1872年Felix Klein 從幾何的角度提出將組成圖形的點移動而圖形的整體形狀保持不變的數學特性。1883年Georg Cantor 研究集合論曾舉出某些已定區域并合符理想定義的集合，而在域內任一點集合的元素之間都存在著空間的結構特性。但都沒有被發展成系統性的模式。可見所謂‘主流’意

---

<sup>35</sup> 詳見：Thim, Johan (2003) “Continuous nowhere differentiable functions”, Luleå University of Technology 數學系碩士論文，2003•320 CIV • ISSN: 1402-1617 • ISRN: LTU-EX--03/320—SE。

<sup>36</sup> 例如 瑞士數學家 Charles Cellérier 和 德國數學家 Bernhard Riemann。

識都存在著嚴重的慣性，對革命性的理論有一定的阻力。

### 3.4 分形的類別

1. 幾何性分形： 分形的產生是由於幾何結構的自相似性。

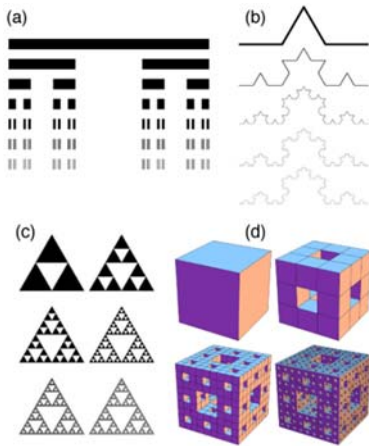


圖 3.7 (a) Cantor dust; (b) Koch curve; (c) Sierpinski triangle; (d) Menger sponge

圖3.7 舉出四個幾何性分形：康托爾塵（Cantor dust），科赫曲線（Koch curve），謝爾賓斯基三角形（Sierpinski triangle），和門格海綿（Menger sponge）。第一，這些分形都是循著逐步替換規律產生的。在數學上用差分方程（difference

equation)，也叫映射（map），來定義：

$$z_{i+1} = g(z_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

$z_i$  是第  $i$  步的輸入； $z_{i+1}$  是輸出，同時也是第  $i+1$  步的輸入； $g(z_i)$  是定義替換規律的函數。不難看出，科赫曲線的產生是從每一直線段分三等份，然後將中段改為兩條同樣長度連起來的直線，如此繼續。我們問：科赫曲線的長度是多少？這就奇怪了，科赫曲線的長度要視乎尺刻度的疏密 – 即分辨率 – 而定。如果有無窮的分辨率， $i \rightarrow \infty$ ，長度  $\rightarrow \infty$ ！

按歐氏幾何來說，曲線是屬於1維。但科赫曲線是分形，它的分形維數不是整數。決定分形維數是分形的自相似性。假設將分辨率改變  $r$  倍，然後產生同形狀的分形部份的數目是  $m$ ，那分形維數便是

$$d_f = \frac{\ln m}{\ln r}. \quad (3.5)$$

這裡也看到分形維數是一個冪定律的指數：

$$m = r^{d_f}. \quad (3.6)$$

先看看科赫曲線（見圖 3.7 b），它的替換規律告訴我們每替換一次直綫度縮短3倍（ $r = 3$ ），而產生4個小三角（ $m = 4$ ）。因此， $d_f = \ln 4 / \ln 3 = 1.2619$ 。科赫曲線的維數高過一般歐氏幾何曲線維數（1）是因為它的自相似輪廓； $d_f$  低於2是因為它不足以覆蓋歐氏幾何的平面（維數 = 2）。一般而言，

$$d_t \leq d_f \leq d_e. \quad (3.7)$$

第三章：分形幾何：包容在歐氏空間普遍而不明顯的結構

$d_f - d_t$  告訴我們以分形代表的系統它的不規則程度，差額越高，不規則程度越大。

至於康托爾塵、謝爾賓斯基三角形與及門格海綿（見圖 3.7 a, c & d），你們能察看出它們的替換規律嗎？<sup>37</sup> 康托爾塵的分形維數是  $\ln 2 / \ln 3 = 0.63093$ ，但碎段的總長為 0！；謝爾賓斯基三角形的分形位數是  $\ln 3 / \ln 2 = 1.5850$ ；門格海綿的分形位數是  $\ln 20 / \ln 3 = 2.7268$ 。

2. 無規性分形：分形的產生由於組織統計值的自相似性。

大部份自然界的分形，如圖3.4的例子，都不是數學差分方程 (3.4) 產生出來的，而是‘參與個體’（因分形而異，可能是原子、分子、細胞、物種、股份等）在一定環境或條件下通過隨機性（stochastic）組織過程產生的合成現象。這合成現象任何一個子群或隸屬組織的統計值，如平均值、方差、高次方矩等，與全局現象有自相似性。

---

<sup>37</sup> 康托爾塵：一條棍子切去中間三分之一部份，經過  $i$  次後棍子便變成  $2^i$  段。謝爾賓斯基三角形：每一步除掉黑色等邊三角形中央 1/4 面積的等邊三角形。門格海綿：每一步於正方體的每面除掉一個 1/3 邊長的正立方體，而不要移動角落或周邊的正方體。

第三章：分形幾何：包容在歐氏空間普遍而不明顯的結構

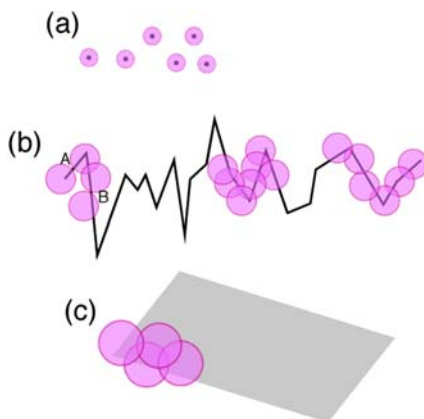


圖 3.8 利用覆蓋方法去決定無規性分形的維數。

無規性分形缺乏數學的產生公式，那就不能利用 (3.5) 方程來計算維數，而要用覆蓋的方法。圖3.8 舉例說明。面對一個圖形或體積，(a), (b) 或 (c)，我們想用最經濟的方法將圖形以圓球或圓盤覆蓋<sup>38</sup>。(a) 是一些沒面積的點，每點可用一圓盤覆蓋，圓盤彼此不接觸，0重疊。(b) 是一條在平面上的線，如果兩個圓盤僅相切地接觸，如(b)左，線上A、B點不算被覆蓋。(b)中，圓盤重疊過多，不夠經濟。(b)右，每雙圓盤重疊一次，1重疊。(c) 是一個平面，最經濟的情況是每三個圓盤重疊兩次，2重疊。（如果1重疊只能覆蓋平面上的曲線，不足以覆蓋平面。）如果圖形是立體，那圓球起碼要3重疊，如此類推。

假設圓球的直徑是  $\varepsilon$ ，至少需要的圓球數是  $n(\varepsilon)$ ，那麼，分

<sup>38</sup> 其實不一定要圓球，2 維的圖形可以用圓盤或方塊，3 維可以用圓球或正立方體。

形維數就是：

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}. \quad (3.8)$$

(3.8) 與 (3.5) 比較之下，(3.5) 的同形狀分形部份數目  $m$  被圓球數目代替，(3.5) 的分辨率改變倍數  $r$  被  $1/\varepsilon$  代替。如果要測量的結構不是分形（如圖3.8），從 (3.8) 會得出  $d_f = d_t$ 。不然 (3.7) 普遍成立。

換言之，分形維數告訴我們在圓球變小（分辨率變高）的情況下所需圓球數目的改變。上述的量度概念，最先由德國數學家豪斯多夫（Felix Hausdorff, 1868-1942）於1918年提出，當時的應用對象是集合論。因此，利用 (3.8) 方程計算的分形維數也稱為豪斯多夫維數。



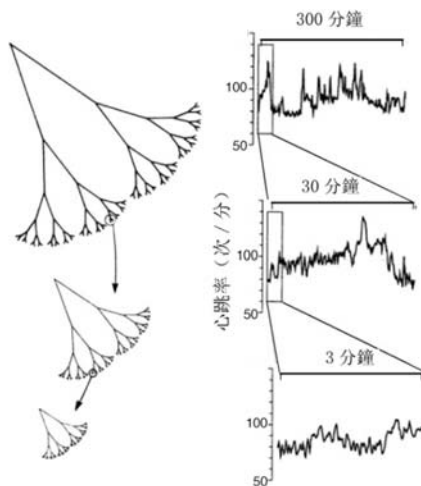


圖 3.9 左：靜態的空間分形，右：健康成人心跳率在時間上的變化，從上到下改變時間尺度，但模式保持自相似性，這是分形的動力結構。取自 Goldberger *et al.* (2002)<sup>39</sup>。

<sup>39</sup> A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, J. M. Hausdorff, P. Ch. Ivanov, C.-K. Peng, and H. E. Stanley (2002), “Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging”, *PNAS*, **99**, 2466-2472.

### 3.5 小結

本章首先指出自然界的物質或其動態進程（統稱為現象）比理想化的歐氏幾何結構元素來得複雜。無論是宏觀世界（日常接觸到的）或者是微觀世界（顯微鏡看到的）的現象很多都存在粗糙的或不規則的組織。但在複雜和不規則性的背後仍有普遍的對稱性，就是自相似性。在數學上，分形幾何模式讓我們能夠分析這些具有自相似性的現象，大大的擴展人們用科學方法去了解自然現象的能力和手段。表徵分形幾何最重要的參數是分形維數，分析分形幾何的自相似性最重要的是坐標定律。這兩個概念跟前兩章的冪指數和冪定律存在深刻的關係。

雖然我們說過維數在時空間包括時間尺度，但本章暫時提到的偏重於空間結構。不過上節談及的無規性分形，已意味著時間的自相似性，是分形動力（**fractal dynamics**）現象的特徵。而且動態性的分形現象十分普遍，包括我們的正常生理狀態。圖3.9 左是空間靜態分形（如圖 3.4 的花莖甘藍），右方是健康成人的心跳率在時間上的變化，從上到下改變三個時間尺度，心跳率保持屬於分形通性的自相似性。全世界的市場交易數據都呈現類似的自相似性，值得用分形幾何的方法分析。固然，時間的分辨率不能無限度的升高下去，到了某短時間的尺度，數據的自相似性便不再存在了。以美日元匯率的例子而言，這最低時間尺度是幾個小時（匯率時間變化的分形結構維持達13 年國際銀行約2千萬個數據點）。此外，匯率的變動除了有明顯的無規性，它還受甚麼參數影

響？這些參數可以從匯率數據決定出來嗎？我們可以通過動力學的分析去預測匯率在某種參數條件下產生的波動，甚至失控地膨脹或崩潰嗎？這都是下面各章的話題。

## 第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回

### 分形

遠在1400年前，中國南北朝梁武帝肖衍提倡普及自然、人文和政治的綜合讀物，命周興嗣編纂《千字文》。一開頭便指出雖然宇宙混沌無窮，但人世間觀察到日月星辰運轉都保持穩定的秩序：“天地玄黃，宇宙洪荒。日月盈昃，辰宿列張。”英國的牛頓於1687年發表《自然哲學的數學原理》，是他研究一個（小）星球與另一（大）星球在引力場下運動所發現的力學原理。這種二體問題（two-body problem）隨後由瑞士數學家約翰·白努利（Johann Bernoulli, 1667-1748）全面解決。可是，三體問題（three-body problem）<sup>40</sup>卻遲遲無人提出答案。直至1885年瑞典數學家哥斯塔·米塔－列夫勒（Gösta Mittag-Leffler, 1846-1927）要求國王King Oscar II 設立專為解答三體問題的獎項（獎金2500瑞典克朗）。參加者於1888年6月1日國王60歲壽辰之前提交解答論文，得獎人的論文將發表在數學雜誌*Acta Mathematica*。當時31歲的數學家昂利·龐加萊（Henri Poincaré, 1854-1912）毅然接受挑戰，於截稿前兩星期呈交158頁的論文。他用幾何方法宣稱証實三體問題存在穩定性的答案，果然獲獎。可是，論文在印刷中Lars Edvard Phragmén (1863-1937)提出質疑，繼而龐加萊發現自己的嚴重錯誤，在11月30日要求停止印刷，翌年1月他

---

<sup>40</sup> 三個既定的質點根據平方反比的引力定律相互作用，假設質點不會碰撞的情況下，用適當的變量函數表示每點的一連串時間性（過去與未來）的位置。

提交長達250頁的修正論文。解釋三體問題不存在普遍答案，因為只要初始條件（initial condition）有些微改變，答案可能會截然不同，甚至會發散，即問題本身存在不穩定性，亦無法預料此三物體的運動軌跡。為了召回已印的雜誌版本，重新加進修改的論文在*Acta Mathematica*，龐加萊一共花了3500瑞典克朗，遠超過他拿到的獎金！

為甚麼數學天才龐加萊也會如此失誤？原因可能是我們常見的三體（甚至多體）問題都具有規律性和可預測性。例如太陽、地球和月亮三者的運轉，不但有永恆的規律，我們還可以用牛頓力學和近似數值方法來計算它們每刻的運動，包括潮汐的起落。很難想像有一天會發生失常的現象。其實非綫性動力學的不穩定性和無法預測性在日常生活上比比皆是。只須走進廚房，拿一柄刀，刀鋒向上，然後在鋒上輕輕地放一隻雞蛋，我們都無法預測雞蛋滑下的方位，而且也無法重複任何一次雞蛋的走向。因為雞蛋的運動狀態對放手時位於刀鋒的情況（初始條件）非常敏感，一點微小的差異就演變成截然不同的走勢。

本章首先介紹動力學系統的數學模式。為了保持簡單、著重概念性而避免複雜公式的闡述，只談一維的動力系統<sup>41</sup>：

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = f[x(t), \{\lambda\}], \quad (4.1)$$

這裡  $x(t)$  是時間（ $t$ ）的函數，頭兩項都是  $x$  的導數，描述  $x$  隨著時間的變化，即動力，這動力由一個函數  $f[...]$  來代

---

<sup>41</sup> 先從簡單動力系統的一階微分方程(4.1)入手，較廣義的是二階微分方程，如朗之萬方程（Langevin equation），見第 6.4 節。

表，其中的自變數包括  $x(t)$  和一些操控參數  $\{\lambda\}$ 。(4.1) 是一條普通微分方程，普通是因為導數只限於時間（否則，例如包括  $x$  的導數，便變成偏微分方程），(4.1) 右方不顯式地包含  $t$ ，叫自控式方程，表示系統與外界環境解耦，不然便稱為被驅動式系統。此外， $x$  的變率，即  $\dot{x}(t)$ ，只取決於  $x(t)$  當時的時間，與之前的時間不相干，即系統對之前的動態不存在記憶能力，這些系統叫馬爾可夫系統（Markovian system）。

#### 4.1 動力學 – 綫性系統：定點之吸引子和排斥子，勢函數<sup>42</sup>

綫性動力系統是指 (4.1) 的  $f$  只含  $x$  的綫性項，即：

$$\dot{x}(t) = \lambda x. \quad (4.2)$$

以上的方程我們已經熟悉，即(1.14)。答案是

$$x(t) = ce^{\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

$c$  是任何一個常數，在無窮盡的答案裡合適的答案由初始條件決定。例如， $x(t=0) = x_0 = ce^0$ ， $\Rightarrow c = x_0$ 。圖 4.1 繪畫  $x(t)$  的三個情況： $\lambda < 0$ （衰變）， $\lambda = 0$ （恆值不變）， $\lambda > 0$ （生長）； $x$  容許負值。

---

<sup>42</sup> 第 4.2 至 4.4 節講解的一維動力系統行為與 A. Fuchs 介紹的類似，見 A. Fuchs (2010), “Dynamical systems in one and two dimensions: A geometrical approach”, in Nonlinear Dynamics in Human Behavior, R. Huys and V. K. Jirsa (Eds.), Springer. p.1.

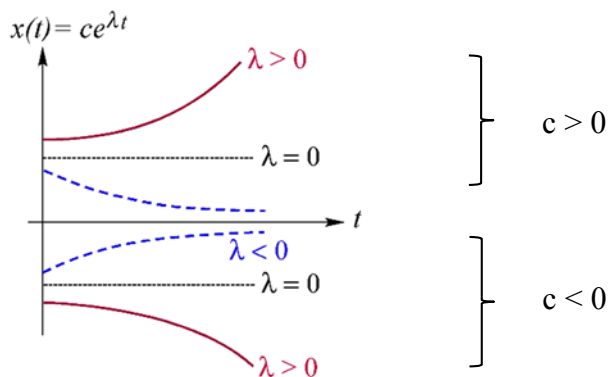


圖 4.1 方程  $\dot{x}(t) = \lambda x$  的三種答案，分  $c > 0, x(t) > 0$  和  $c < 0, x(t) < 0$  兩組。 $\lambda < 0$ （衰變，虛線）， $\lambda = 0$ （恆值不變，點線）， $\lambda > 0$ （生長，實線）。

很多微分方程不容易找出答案，或者我們想在計算答案之前先分析  $x(t)$  的動力性質，這時繪出  $\dot{x}$  相對  $x$  的圖 - 叫相空間圖（phase space plot） - 很有用處，見圖 4.2。

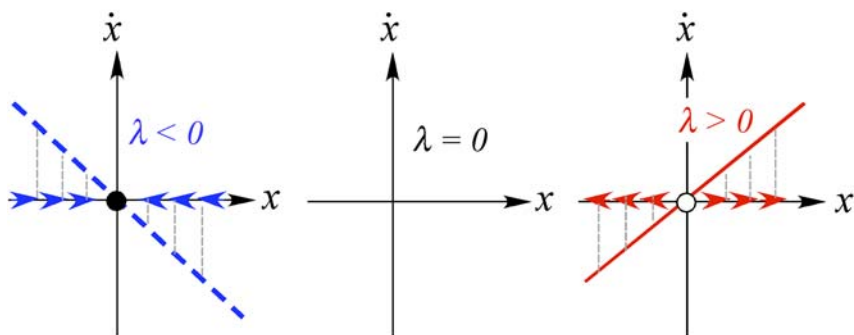


圖 4.2  $\dot{x}$  相對  $x$  相空間圖。 $\dot{x}(t) = \lambda x$  成直線。

隨著  $\lambda < 0$ ， $\lambda = 0$ ，和  $\lambda > 0$ ， $\dot{x} = \lambda x$  分別為負斜率，0斜率，和正斜率的直線。圖4.2 中  $\lambda = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$  不用解釋。圖4.2 左  $\lambda < 0$ ， $x < 0$  則  $\dot{x} > 0$ ，即  $x$  移向正方的0（原點），箭頭的方向，而且  $|x|$  越大， $x$  移動得越快。相反地， $x > 0$  則  $\dot{x} < 0$ ， $x$  移向負方的原點。所以  $x = 0$  是穩定點（stable fixed point），或稱吸引子（attractor），用實心圓表示。圖4.2 右  $\lambda > 0$  與圖左相反， $x$  移離原點，因此  $x = 0$  是不穩定點（unstable fixed point），或稱排斥子（repeller），用空心圓表示。

另一個直覺意識有助於瞭解動力的趨向是勢函數（potential function）， $V(x)$ 。這概念來自物理學，因為作用力， $F(x)$ ，和勢函數的關係是

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (4.4)$$

這樣， $V(x)$ 的極值便是動力系統的定點。勢函數的形狀，例如像山谷、懸崖或巔峰，走勢就好像被作用力推向下坡，谷底便是穩定點，巔峰是不穩定點。所以如果將  $\dot{x}$  理解為作用力，然後計算勢函數：

$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} \Rightarrow V(x) = -\int \dot{x}(x) dx. \quad (4.5)$$

回到(4.2)，根據 (4.5) 計算勢函數。

$$V(x) = -\int \lambda x dx = -\frac{1}{2}\lambda x^2 \underbrace{+ C}_{=0} \sim \lambda x^2. \quad \text{作圖4.3}$$



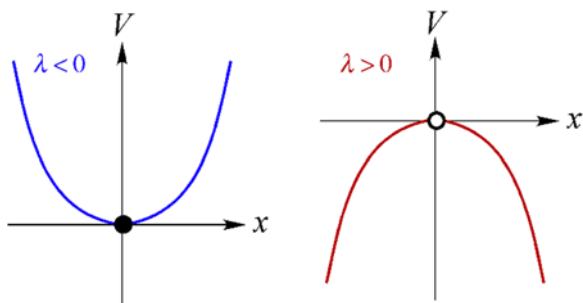


圖 4.3 綫性動力系統 (4.2) 的勢函數。圖左原點是穩定點（實心圓），圖右原點是不穩定點（空心圓）。

總而言之， $\dot{x}$  與橫坐標的交點便是動力系統的定點，參數  $\lambda$  的數值決定那定點的性質 – 穩定點、中性點或不穩定點。值得注意的是，由於是綫性方程，只可以有一個定點，定點得位置不會改變。

## 4.2 動力學 – 非綫性系統

有代表性的非綫性動力系統微分方程，前面已接觸過，見 (1.16)。我們將它寫成：

$$\dot{x} = \lambda x - x^2. \quad (4.6)$$

(4.6) 亦屬於邏輯斯諦方程。 $\dot{x}$  是一條向下伸延的拋物線，與橫坐標相交兩點，其中一點是原點。圖 4.4 是相空間圖及勢函數。

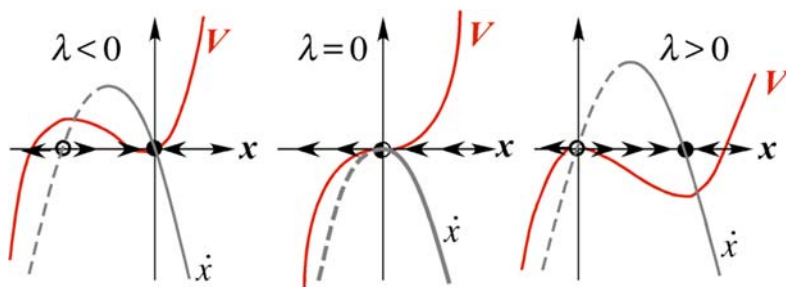


圖 4.4  $\dot{x} = \lambda x - x^2$  的相空間圖和勢函數。

因為拋物線頂峰左邊是正斜率，與橫坐標交點是不穩定點，也是勢函數的局部最高點。拋物線頂峰右方是負斜率，與橫坐標交點是穩定點，也是勢函數的局部最低點。 $\lambda = 0$ （圖 4.4 中）的情況比較突出，原點是唯一的定點，而且是中性點，故用半實心圓表示，它是勢函數的鞍點（saddle point）。

以下我們考慮包括立方項的方程：

$$\dot{x} = \lambda x - x^3. \quad (4.7)$$

並作圖 4.5。

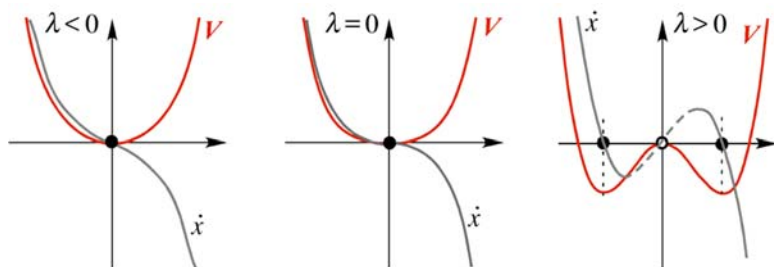


圖 4.5  $\dot{x} = \lambda x - x^3$  的相空間圖和勢函數。

可以看到，當  $\lambda \leq 0$ （圖左及中）這系統只有一個穩定點位於  $x=0$ ，可謂存在單穩定性（monostability）。但當  $\lambda$  轉成正值後，勢函數出現左右兩個局部最低點，而原點變成局部最高點。因此，系統從單穩定性變成雙穩定性（bistability），新的穩定點相應於勢函數的局部最低點，而原來在原點的穩定點則變成不穩定點。 $\lambda_c = 0$  便是參數的臨界值。至於推測系統將落在那個局部最低點需要高分辨率的初始數據。況且，這個變化不是緩慢地過渡，是動力系統突然發生性質的改變。這種現象只能發生在非綫性動力系統。所以非綫性數學模式廣泛地應用在有關物質相變、失控生長、市場動盪、洶湧湍流等理論。

### 4.3 分歧（bifurcation）和臨界現象 – 非綫性動力系統的重要表徵

上節的兩個例子，已意識到非綫性動力系統會當控制參數達

到某臨界值時， $\lambda \rightarrow \lambda_c$ ，動力的性質會出現截然的變化。現在我們講述這變化背後的一些表徵。首先考慮以下方程

$$\dot{x} = \lambda + x^2, \tag{4.8}$$

從而有兩個定點： $\tilde{x}_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ 。圖 4.6 展示相空間圖和勢函數（上）及  $\tilde{x}$  相對  $\lambda$ （下）。

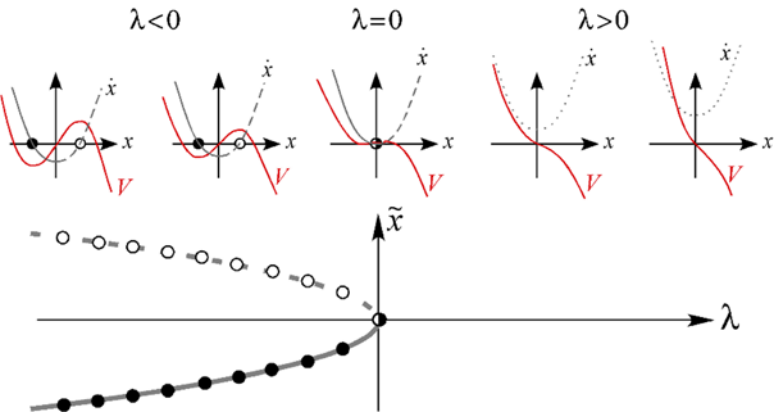


圖 4.6  $\dot{x} = \lambda + x^2$ （灰色向上拋物線）的（上）相空間圖和勢函數（ $V$ , 實線）；（下）鞍結點（ $\tilde{x}$ ）分歧。

方程 (4.8) 是一條向上的拋物線， $\lambda > 0$  不存在定點。原點是中性點，亦是勢函數的鞍點。循著  $\lambda$  的負值增長，中性點分為一個不穩定點和一個穩定點，這叫做鞍結點分歧（**saddle-node bifurcation**），此分歧越來越大。

再看另一方程

$$\dot{x} = \lambda x - x^2, \quad (4.9)$$

如圖 4.7 所示， $\dot{x}$  是一條下延的拋物線，與橫坐標相交兩個定點， $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{x}_2 = \lambda$ ，除了  $\lambda = 0$  時原點是中性點，整個系統分叉出一個穩定點和一個不穩定點，以原點為對稱中心，即定點的穩定性相互對調。這稱為跨臨界分歧（transcritical bifurcation）。

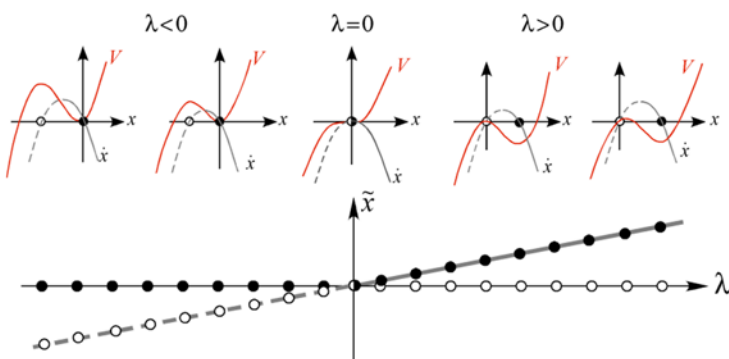


圖 4.7  $\dot{x} = \lambda x - x^2$ , (灰色向下拋物線) (上) 相空間圖和勢函數 ( $V$ , 實線) 和 (下) 臨界分歧。

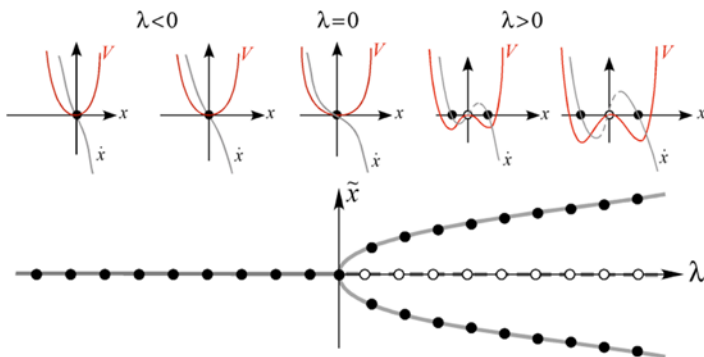


圖 4.8  $\dot{x} = \lambda x - x^3$ （灰色線）（上）相空間圖和勢函數（ $V$ , 實線）和（下）超臨界草叉分歧。

前面說過的 (4.7)，其實是一條與非綫性動力現象有代表性的方程，見圖 4.8。

$$\dot{x} = \lambda x - x^3. \quad (4.7)$$

第一，這方程有高度的對稱性， $x \rightarrow -x$ ， $V$  保持不變。它的三個定點： $\tilde{x}_1 = 0$ ， $\tilde{x}_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$ ，有對稱性，即  $(1 \leftrightarrow 1)$  與  $(2 \leftrightarrow 3)$ ；相空間圖 (4.8 上) 以原點作中心對稱；勢函數以豎坐標作鏡像對稱。第二，系統從單穩定性 ( $\lambda \leq 0$ ) 轉變成雙穩定性 ( $\lambda > 0$ )，見 4.8 中，這種分歧叫超臨界草叉分歧 (supercritical pitchfork bifurcation)，以原點為臨界點。圖 4.8 上左起三個插圖 ( $\lambda \leq 0$ ) 的系統穩定點一直在原點。但當  $\lambda > 0$  後，勢函數變成左右對稱的兩個谷，谷最低點位置稱為穩定點，而原點從原來穩定點變成不穩定點。如果原點上放一圓球，圓球可跌到其中一個谷底。在球未跌之前，上

述的對稱性保持成立，但球一旦跌下任一谷中，對稱性隨即消滅，這叫自發對稱破裂（spontaneous symmetry breaking）。都是自然界屢屢產生的現象，尤其在物理學扮演一個重要的角色。

此外，還有亞臨界草叉分歧（subcritical pitchfork bifurcation），由以下方程代表

$$\dot{x} = \lambda x + x^3. \quad (4.10)$$

它的定點是  $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{x}_{2,3} = \pm\sqrt{-\lambda}$ ，見圖 4.9。

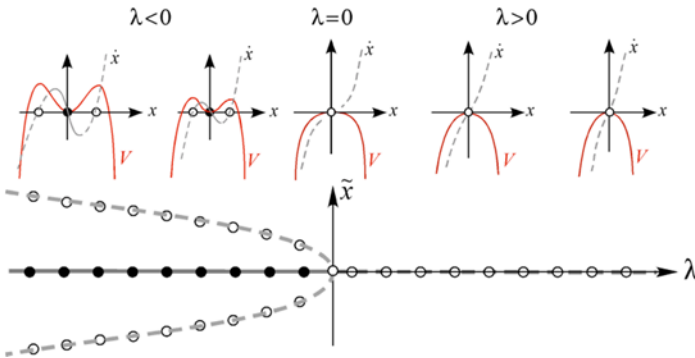


圖 4.9  $\dot{x} = \lambda x + x^3$ （灰色線）（上）相空間圖和勢函數（ $V$ , 實線）和（下）亞臨界草叉分歧。

這與 (4.7) 和圖4.8相似，原點仍是中性定點（也是臨界點），其他定點狀態和圖4.8的情況相反。

## 4.4 滯後（hysteresis）現象

當操作一個動力系統時輸入控制參數值，系統則輸出動力效應。但往往輸出的效應會表現滯後的現象。假設上調輸入參數錄得輸出效應是循著某個軌跡，之後下調參數的效應並不回描該軌跡，而出現環形的路線。例如降溫以凍結和加熱以解凍食物，它的熔凍程度與輸入溫度都會出現滯後現象。有時是由於輸入的速度太高，系統未及時達到平衡，但除此之外，有時是由於操作的步驟與系統內部狀態有一定的關係。如果要預算系統的反應，除了當時輸入的參數值外，還需要之前輸入步驟的信息。

滯後現象不單是出現在物理系統，也發生在生物、經濟等領域（見第6.6）。從數學而言，滯後現象可以利用系統的分歧圖式來解釋。讓我們考慮以下方程：

$$\dot{x} = \lambda + x - x^3 . \quad (4.11)$$

從圖4.10 可見這是分歧情況一個比較特出的例子，系統出現兩個鞍點的中性定點， $\pm\lambda_c$ （見中圖的虛線方格）。當參數從較低值升到正臨界點， $\lambda \rightarrow +\lambda_c$ ，只要是微少的擾動，便會跌進右邊（ $x \uparrow$ ，見圖4.10下排）的勢谷，於是循著躍過 $+\lambda_c$ （往上箭頭）的軌跡。相反地，參數從較高值降到負臨界點， $\lambda \rightarrow -\lambda_c$ ，會跌進左邊（ $x \downarrow$ ，圖4.10下排）的勢谷。這樣就產生滯後的環形路線。



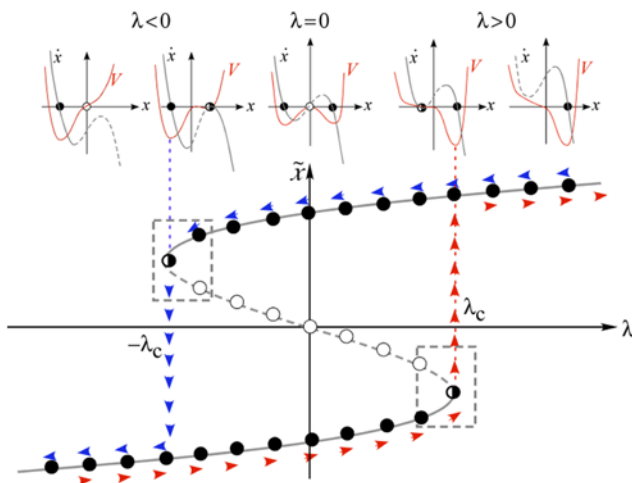


圖 4.10 由於參數升降經過不同的鞍點而引起的滯後現象。

以上我們通過簡單的非綫性微分方程來介紹一維動力系統在不同的控制參數或初始條件下的反應，利用相空間圖和勢函數以解釋動力系統的傾向。其中有穩定點、不穩定點和中性定點，分別相應於此勢函數的最低點、最高點和鞍點，同時出現各種分歧和滯後現象。代表動力系統是連續函數，其變量，如時間，是連續的。假如變量是離散的，例如單利每年派息一次，我們要用差分方程來代替微分方程。差分方程代表的動力系統答案和微分方程的有重要程度不同的複雜性，這便是下節的主題。

## 4.5 差分方程（difference equation）與混沌（chaos）理論

回顧第1.2節韋呂勒於1838年提出模擬人口增長的邏輯斯諦微分方程(1.16)

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad (1.16)$$

時間， $t$ ，是連續的變量。如果按人口繁殖次數， $n$ ，來計算，相對的差分方程是

$$p_{n+1} - p_n = rp_n \left( 1 - \frac{p_n}{K} \right). \quad (4.12)$$

改換變量  $x_n = \frac{rp_n}{K(1+r)}$  和  $\lambda = 1+r > 1$ ，(4.12) 可寫成為邏輯斯諦差分方程：

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), 0 < x_0 < 1 \text{ 及 } \lambda > 1. \quad (4.13)$$

從韋呂勒時代至二十世紀，一般人認為差分方程只是尋求逼近微分方程答案所用有限差分的手段，沒有比微分方程更深入的意義。直至1974年澳大利亞科學家Robert McCredie May (1936- )發表有關一階差分方程蘊藏著意外的複雜動力屬性<sup>43</sup>，人們才對差分方程另眼相看。以下我們用圖解的方法敘述

---

<sup>43</sup> Robert M. May (1974) “Biological populations with nonoverlapping Generations: Stable points, stable cycles, and chaos”, *Science*, **186**, 645; and Robert M. May (1976) “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature*, **261**, 459.

(4.13)的各種動力特性 – 從穩定演變到不穩定、分歧、混沌，然後又連接到分形的自相似性。這樣就概括了一套基本的數學概念和工具，好待往下各章分析物理、生物、經濟等一系列問題。

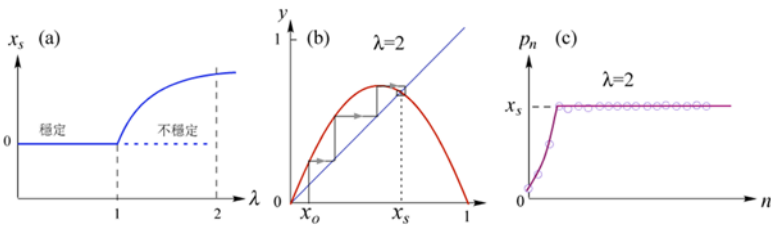


圖 4.11 邏輯斯諦差分方程(4.13)。(a)：人口漸近值隨著控制參數  $\lambda$  的改變。(b 和 c)：  $\lambda = 2$ ，  $x_s$  是  $y = f(x) = \lambda x(1-x)$  和  $y = x$  的交點，人口數值從  $x_0$  一代一代的增長，很快會聚到漸近值  $x_s$  而穩定下來。

方程(4.13)右方規定第  $n$  代的繁殖公式，以供計算第  $n+1$  代的人口，  $x_{n+1}$ 。  $\lambda x_n(1-x_n) \rightarrow x_{n+1}$  是差分方程描述動力系統的映射（亦成邏輯斯諦微映射）。相對的微分方程是  $f[x(t), \{\lambda\}] \rightarrow \dot{x}(t)$ ，例如4.2和4.3節的方程，稱為流程（flow）。我們目的是探求社會經過長時間歷程保持的人口數值，即與  $n$  無關的漸近值（asymptotic value），  $x_s$ 。取決於  $x_s = \lambda x_s(1-x_s)$ ，即  $x_s = 0$  或  $x_s = 1-1/\lambda$ 。圖4.11 (a) 表示漸近值  $x_s = 0$  只能在  $0 < \lambda < 1$  的情況下保持穩定，這是零生長的不重要狀況，不值得考慮。賸下來有研究價值的是當

$\lambda > 1$ 時  $x_s$  的變化和穩定性。這便是現在要討論的中心。

設定

$$f(x) = \lambda x(1-x), \quad (4.14)$$

和某  $\lambda$  的參數值， $x_s$  是  $y = f(x)$  和  $y = x$  的交點，見圖4.11 (b) 的下朝拋物線和直線。從  $x_0$  開始，每代人口數值可以根據

據  $f_{n+1}(x) \equiv f\left(\underbrace{\dots f(f(x_0)) \dots}_{n \text{ times}}\right)$  計算，由逐代累積的數值點，

$\{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots\}$ ，形成的線稱為軌道 (orbit)。當  $\lambda = 2$ ，可見人口數值軌道很快地會聚到漸近值  $x_s$ ，之後保持穩定不變，見圖4.11 (c)。圖4.11 (b) 是屬於相空間圖，可見  $x_s$  是圖中的一個穩定點。這與微分方程 (1.16) 的答案和圖1.6是一致的。但這穩定性會隨著  $\lambda$  的增加而保持不變嗎？不會，複雜的動力現象馬上要發生了。

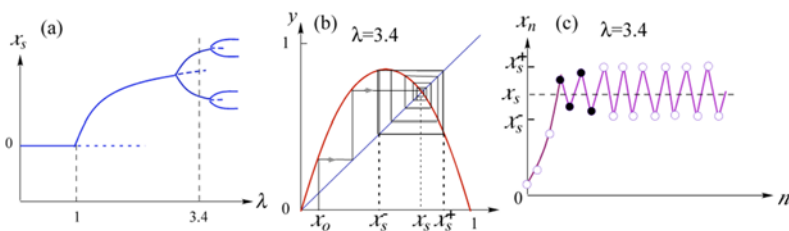


圖 4.12 當  $\lambda > 3$ ，軌道開始出現不穩定狀態，例如 (a) 表示分歧造成的2週期和4週期的循環。(b, c)  $\lambda = 3.4$ ，軌道不能會聚到漸近點，而徘徊在兩個週期值。

圖4.12 (a) 描述  $\lambda$  剛超過 3 的情況，軌道出現分歧性的不穩定。圖4.12 (b, c) 描述  $\lambda = 3.4$  的軌道不能會聚到漸近點  $x_s$ ，開始幾次迭代  $x_j$  飄離  $x_s$ （黑點），是因為經過圖(a)虛線代表的不穩定區，繼而數值穩定下來，徘徊在  $x_s$  兩側的  $x_s^+$  和  $x_s^-$ ，稱為2週期的輪換。隨後  $\lambda = 3.42$ ，分歧在出現，造成 4 週期的輪換<sup>44</sup>。這些分歧和多週期輪換的密度會越來越大，而且越來越複雜。

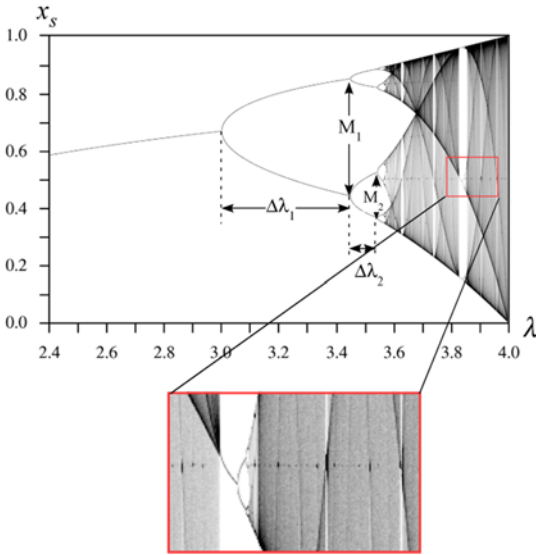


圖 4.13 邏輯斯諦差分方程 (4.13)  $2.4 \leq \lambda \leq 4$  的軌道圖。 $\lambda > 3$

<sup>44</sup> 2 分歧造成的 4 週期輪換也可以用圖解分析，圖 4.12 (b) 的拋物線要改換為  $y = f_2(x)$ ，是呈現雙峰的曲線，與  $y = x$  有多處交點，因而引致 4 週期輪換或甚至更複雜的倍週期輪換。

區包含在  $x_s$  輪廓內白色的部份代表穩定下來的空間。黑線代表不穩定無週期性  $x_j$  值的分佈，也是混沌區域。但混沌區之間亦存在穩定區。方格部份放大後示於下圖，可見裡面充滿自相似性結構。

圖 4.13 是邏輯斯諦差分方程在  $2.4 \leq \lambda \leq 4$  範疇的軌道圖。除了上述談過的特徵外，我們指出以下的重點：

1. 差分方程顯現的動力結構比相應的微分方程來得豐富和複雜。
2. 根據控制參數  $\lambda$  的遞增，動力系統呈現以下特徵：  
 $\lambda \leq 1$ ，負或零生長率，漸近值為0，無實際意義；  
 $1 < \lambda \leq 3$ ，存在唯一的穩定漸近線，符合相應的微分方程的答案；  
 $3 < \lambda < 3.569\ 945\ 672\dots$ ，出現一序列的分歧和  $2^j$  週期的漸近值,  $j = 1, 2, 3, \dots$ 。圖 4.13 的  $M_j$  及

$\Delta\lambda_j$ ，都可以用數值方法計算<sup>45</sup>；

$3.569\ 945\ 672\dots < \lambda < 4$ ， $x_n$  數值沒有穩定性和週期性（圖中黑線區），此現象稱為混沌。但混沌區之間仍存在穩定的週期輪換空間（白色部份）； $\lambda > 4$ ，基本全是混沌， $x_n$  變成無規數（random number）<sup>46</sup>。

<sup>45</sup> 混沌理論還有其他數學因子，如李亞普若夫指數（Lyapunov exponent）等，其數學定義都超過本書的範疇。

<sup>46</sup> 邏輯斯諦差分方程  $\lambda > 4$ ，即  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ ，有閉式答案， $x_n = \sin^2(2^n \theta \pi)$ 。它的始初條件取決於另一參數

注意： $\lambda > 1$ 區內的結構密度視乎計算數值的分辨率而定，分辨率越高，結構的密度越大。這純屬數學理論結構無法用實驗證明，因為觀察測量必有實驗誤差。

3. 整個混沌區的軌跡結構具有自相似性，適合用分形幾何方法分析。
4. 當穩定的漸近線存在時，例如  $1 < \lambda < 3.569\,945\,672\dots$  區內，軌道不受始初條件影響。但在混沌區內，軌道（黑線）對始初條件非常敏感。兩個相差極微少的起點，只經過幾個迭代後的軌道便完全不同。因此，若然處於混沌的情況下，數據分析特別困難，準確地預測未來數值幾乎是無可能的。
5. 以上的動力性質不單是屬於邏輯斯諦差分方程，而是所有非綫性映射差分方程的通性。例如美國數學物理學家米切爾·費根鮑姆（Mitchell Feigenbaum, 1944-）證明所有二次方單峰映射的一維差分方程都有同樣的分歧常數，也稱費根鮑姆常數：

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 4.669\,201\,609\dots, \quad (4.15)$$

$\lambda_j$  是  $\lambda$  的第  $j$  個分歧的倍週期值。圖4.13裡第一輪的

$\Delta\lambda_1 / \Delta\lambda_2 = 4.75059\dots$  已接近這常數。可見差分方程在

---

$\theta = \sin^{-1}(\sqrt{x_0})/\pi$ 。如果  $\theta$  是無理數， $\{x_n\}$  沒有週期性，不會重複。

數學家 Stanislaw Ulam 和 John von Neumann 早在 1947 年用此差分方程作為無規數產生器。

第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形

混沌理論的重要性。

6. 我們每天遇到各式的動力系統（氣象、河流、人口、市場等），數學將它們理解為一些度量空間（metric space，屬於集合之一）的元素根據某函數映射到另外的度量空間元素，那映射可以通過微分方程或差分方程來表達。這些方程表面上看來不同，動力系統的表徵現象也不一樣，但不等於是說這些動力系統就沒有類同之處。其實，本書的目的正是希望分析現象的異同和背後的一些規律。上面介紹邏輯斯諦差分方程(4.13)從穩定到混沌的狀態，要經過一番功夫，倘若我們遇到代表另一動力系統的差分方程，最好是在仔細分析之前，能夠鑑定這差分方程是否與其他差分方程同類。如果找到同類的方程，便可以將該方程已知的答案適當採用，可省卻不少力氣。而且還可以將兩個表面不同的動力系統的性質聯接理解，這不是我們的目的嗎？

怎樣試探兩條差分方程是否‘類同’，數學上有一套正規抽象的方法叫同胚（homoemorphism），這手段的細節不是我們探索的焦點。這裡僅舉一例子，考慮一對差分和微分方程

$$x_{n+1} = x_n^2 + \mu; \quad g(x) = x^2 + \mu. \quad (4.16)$$

（ $x$  和  $\mu$  都是實數），它是邏輯斯諦方程

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad f(x) = \lambda x (1 - x). \quad (4.17)$$



的同胚。這因為(4.16)和(4.17)存在著一個綫性共軛（linear conjugacy）： $h(x) = -\lambda x + \lambda/2$ 。即

$$h \circ f = h(f(x)) = -\lambda(\lambda x(1-x)) + \lambda/2 = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 x + \lambda/2,$$

$$g \circ h = g(h(x)) = (-\lambda x + \lambda/2)^2 + \mu = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2/4 + \mu,$$

所以同胚的關係成立，即  $h \circ f = g \circ h$ ，則

$$\mu = (2\lambda - \lambda^2)/4. \quad (4.18)$$

我們找出(4.16)與邏輯斯諦方程(4.13)的同胚條件，就是綫性共軛  $h(x)$  和兩個參數的關係(4.18)。同胚的重要是肯定這兩方程的動力表徵－從穩定性、漸近值、分歧、倍週期輪換到混沌－之間1對1相應關係。因此，邏輯斯諦差分方程(4.13)分析得來的結論，可以應用到差分方程(4.16)，詳見第4.7 節的討論。

## 4.6 蝴蝶效應（butterfly effect）

前面提到昂利·龐加萊研究三體問題的一段故事，在十九世紀八十年代經過不少努力，他發表了一系列有關微分方程動力系統的文章，其中包括這番話：

“如果我們完全正確地懂得自然界的規律與及宇宙始初的狀態，我們應該可以正確地預知這宇宙之後任可時間的情況。不過儘管自然界的規律已不再是祕密，我們只能近似地知道宇宙的始初狀

態。那麼我們至少能夠以同樣的近似程度去預料所有根據自然規律產生的現象。但這卻不全對；有可能輕微差異的始初條件會產生最後現象的巨大變化，從前的微少誤差將導致後來嚴重的過失。故此無法預算未來，我們才遇到出人意表的現象。”<sup>47</sup>

龐加萊這個經驗總結，好像沒有被人重視。其實那已是混沌理論的萌芽，可是要到廿世紀六十年代美國氣象學家愛德·諾頓·勞倫次（Edward Norton Lorenz, 1917-2008）發表使用計算機程序模擬大氣現象<sup>48</sup>，其中有關輸入始初條件差異引起非綫性微分方程答案的不穩定性質，又再一次配合當時電子計算機科技重申龐加萊的勸說。從那年代開始，混沌理論才蓬勃發展。但這卻不是由於勞倫次的論文引起的<sup>49</sup>。直至1972年勞倫次在美國科學促進會（American Association for Advancement of Science）年會上演說，題目是“預報能力：在巴西的蝴蝶拍一下翅膀能否導致德薩斯州發生龍捲風？”，這回就達到眾所矚目的地步。這個蝴蝶效應的隱喻，雖然

---

<sup>47</sup> H. Poincaré. (1908). *Science et Méthode*. Paris: Editions Kimé (1999).

<sup>48</sup> E. N. Lorenz, (1963), “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmos. Sci.* **20** 130.

<sup>49</sup> 可能勞倫次是氣象學家，他1963年的論文（見上43註）一直沒有被當時輩出研究混沌理論的專家－例如 Stephen Smale, Benoit Mandelbrot, David Ruelle, Floris Takens, Jerry Gollub, Harry Swinney－提起。一直到1974-5年才被物理學家 John McLaughlin 和 Paul Martin 在研究流體力學與及 Hermann Haken 研究激光時發現出來。1963－1973年勞倫次的論文被其他作者引用過10次（每年少於1次），但1975－2003年則被引用過3300次（每年114次）！

第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形

從前也有人提出過類似的譬喻，卻匪夷所思。今天的計算機功能比勞倫次時代先進何只千倍，數學的發展也邁進了一大步，但面對複雜無常和混沌不清的動力現象還比比皆是。有可能達到準確預報之前，首先要洞識雜亂無章中的規律性，混沌旋渦裡的條理性。數學是最基礎的科學方法之一。

## 4.7 複數映射（complex maps）：

### 從曼德博集合（Mandelbrot set）回到分形

上述微分方程和差分方程的變量（ $x$ ）和參數（ $\lambda$ ）都只限於實數，我們可以繪畫以  $\lambda$  和  $x_s$  為橫直坐標的軌道圖，如圖 4.8 和 4.13 等。但如果是複數的映射，變量與參數都有它們的實數和虛數，無法一起被容納在一個平面圖內。

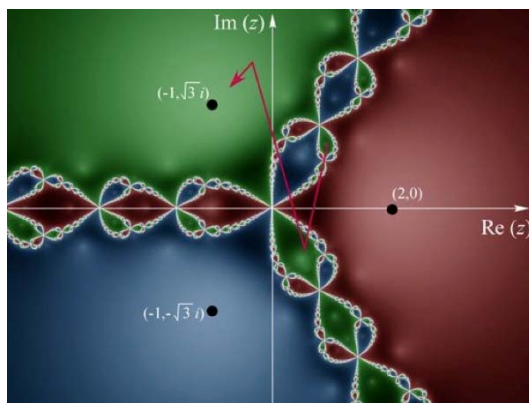


圖 4.14  $z^3 - 8 = 0$ . 黑點是方程的三個根，分別用不同顏色代表其吸引區域，吸引區域之間的界限有類似分形的結構。影響動力收斂的勢函數也很複雜，收斂的軌道視乎始初點的位置，圖中

（有箭頭的線）畫出一個可能的軌道。

先舉一個例子，考慮以下方程：

$$z^3 - 8 = 0, \quad (4.19)$$

如果  $z$  是限於實數，只有一個實數根  $z = 2$ ，就是一維勢函數的最低點。但如果  $z$  是複數，圖4.14 描畫  $z$  的三個根， $2, -1 \pm \sqrt{3}i$ ，在複平面上，分別位於不同的吸引區域（basin of attraction），吸引區域的交界處有複雜的分形結構，代表相應勢函數的複雜性。收斂的軌道視乎始初點位置，圖中畫出一個可能的軌道。吸引區域顏色的色度越深，收斂需要的迭代數越多。

有關描繪複映射的方法，我們只講述著名的曼德博集合這個例子。它的映射是複二次多項式迭代：

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{C}; \quad z_0 \equiv 0. \quad (4.20)$$

這集合是由不同複數值  $c$  組成的序列：

$$\left\{ c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \left( (c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c, \dots \right\}. \quad (4.21)$$

這序列的元素  $z_n$ （無論  $n$  有多大）只有兩個可能性：絕對值發散到無限大，或者絕對值維持有界的數值。我們將後者的  $c$  繪畫在複平面上，這便是曼德博集合。例如： $c = 1$ ，(4.21) 成為  $\{0, 1, 2, 5, 26, \dots, \infty\}$ ，所以1不屬於曼德博集合。 $c = -1$  則為  $\{0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$ ，所以  $-1$  屬於曼德博集合，見圖4.15

。黑色部份就是有界  $c$  的分佈。但如果  $c$  點排成一直綫，因為綫沒有闊度，所以不容易看出來。例如往左沿著負實軸至-2的直綫，與主體相連。

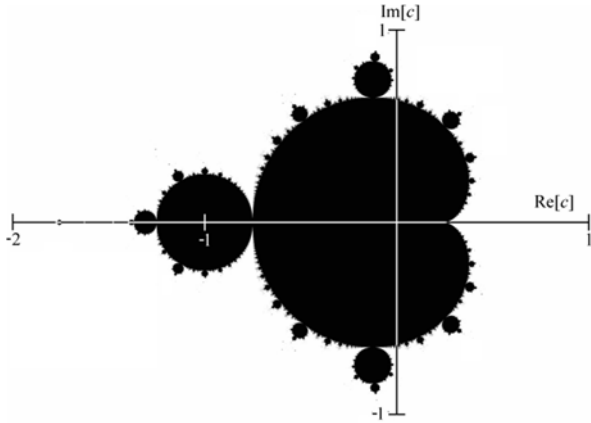


圖 4.15 曼德博集合。

曼德博集合(4.20)在實數軸的動力變化正好符合(4.16)的差分方程，回顧4.5節第6點說明這方程與邏輯斯諦差分方程(4.13)的同胚關係，容許我們就曼德博集合和邏輯斯諦差分方程在動力特徵作1對1 的比較。根據(4.18)，彼此參數的區域是  $\lambda \in [1, 4]; \text{Re}[c] \in [-2, \frac{1}{4}]$ 。圖4.16 比較邏輯斯諦差分方程的軌道圖和曼德博集合在  $\text{Re}[c] \in [-2, \frac{1}{4}]$  的相應結構。可見曼德博集合的心形主體（  $\text{Re}[c] \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$  ）是分歧出現前的漸近值區，左邊的圓是2週期的輪換區，然後4、8週期區加上無序混沌般的軌道，還看到自相似的小圓相對與那片穩定空間等等。還有，圍繞心形和圓形外有無數樹枝形的支流

，那是在若干（例如20次）迭代還未發散掉的  $z_n$  點，以顯示曼德博集合的動力狀態。

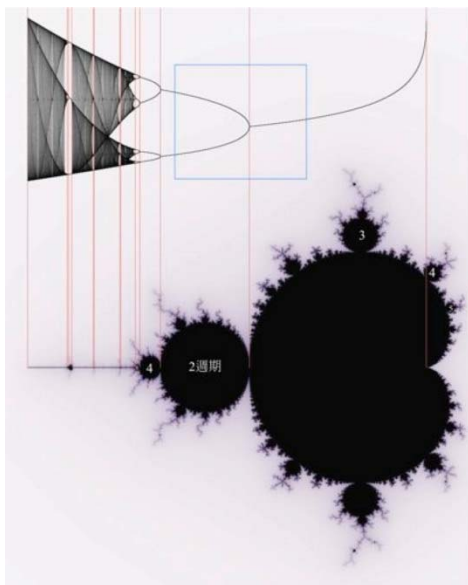


圖 4.16曼德博集合在實數軸與邏輯斯諦差分方程軌道的比較。（  
<https://en.wikipedia.org/wiki/File:Verhulst-Mandelbrot-Bifurcation.jpg>  
）

圖4.16 顯示曼德博集合豐富和漂亮的自相似性圖像。其中有無盡的細緻結構，都是利用計算機和高分辨繪圖發現，仍是現今研究的對象。曼德博集合與之前的朱利亞集合（Julia set）<sup>50</sup>有一定的互補關係。

說到這裡，我們回顧第四章從分形的靜態幾何與及無規性結構，介紹分形維數。接著本章進入非綫性動力系統的討論，系統由微分和差分方程來代表。我們只談相當簡單的一維函數方程，但已發現各種既有代表性而又複雜的動力屬性和混沌理論。這些屬性的描述又將論點帶回分形的問題。再加上第1-2章的尺度變異和冪定律的概念，讀者大概可以感覺到我們一直用數學的石階鋪蓋分析自然現象的道路，因為這些石階都是相輔相連的，而這路又是海闊天空的，正是意味著數學在科學應用上的基礎性和廣義性。可是，在要邁進以後幾章的應用課題之前，我們還有介紹兩個重要的函數，在下節講述。

---

<sup>50</sup> 根據法國數學家 Gaston Maurice Julia (1893-1978) 的研究命名。  
第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形

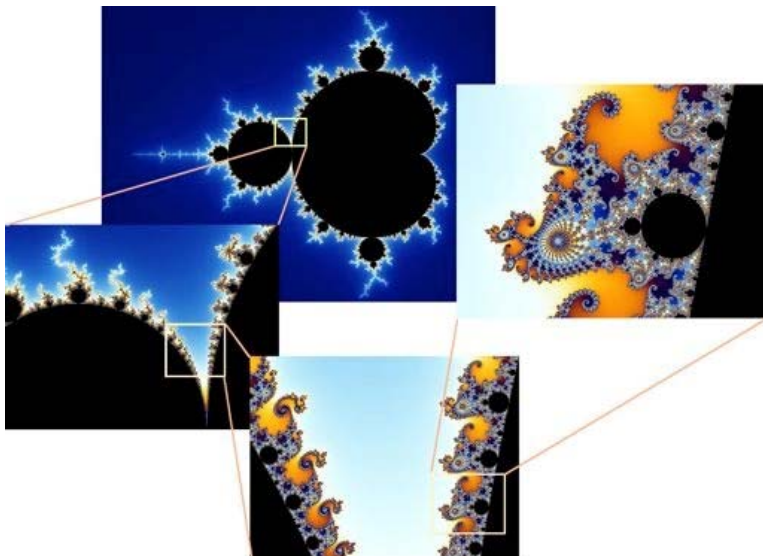


圖 4.17 曼德博集合的自相似性。  
([https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set))



## 4.8 關聯函數（correlation function）和功率譜（power spectrum）

本章一開始說過，三體問題不存在普遍答案。那麼一個動力系統裡面由無數的個體，每個都影響別個和受別個影響，既然普遍答案不存在，怎樣才能建立近似而可信的答案呢？我們用一個比喻說明。假如有一群人在玩一個類似大富翁的遊戲，所有人都沒有自由意志，只根據定義好的遊戲規則進行。我們的目的是從觀察這遊戲的動態情況，從開始時毫不知情地去弄懂遊戲的規則，繼而能夠準確地預測遊戲的程序和結果。那應怎樣下手？我們可以紀錄每人在每刻擁有的財產作為分析遊戲規則的數據，但更有效的方法是紀錄每兩個人（因為三體問題沒有答案）的財產在時間上的關聯變化。例如從某時刻( $t$ )  $A$  的財產  $P_A(t)$  開始，紀錄  $B$  相對  $A$  的財產在不同外界參數  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  的環境下隨著時間的變化，即  $P_{BA}(t + \Delta t)$ ， $P_{BA}(t + 2\Delta t)$ ， $P_{BA}(t + 3\Delta t)$ ， $\dots$ ， $P_{BA}(t + n\Delta t)$ ； $C$  相對  $A$  的： $P_{CA}(t + \Delta t)$ ， $P_{CA}(t + 2\Delta t)$ ， $P_{CA}(t + 3\Delta t)$ ， $\dots$ ， $P_{CA}(t + n\Delta t)$ ；如此類推  $D, E, F, \dots$  相對  $A$  等等，這就是關聯函數，如果是  $A$  相對於  $A$  的，便是自關聯函數（autocorrelation function）。其實，關聯函數就是遊戲規則的一種表徵。從關聯函數可以統計地分析一對參加遊戲者，或一參加者個人，在參數環境下的行為，計算遊戲的後果，例如個人財產的增減或團體資產的交易分配等等。關聯函數有多種，用以計算或預算動力系統的行為反應。通過實驗觀察系統的狀態可以測量關聯函數，如果測量和理論的函數相符，就證明我們成功地了解整個多個體動力系統的結構和

第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形

運轉規律。但是，不一定所有純數學的關聯函數都可以用實驗方法量度。所以在數學的角度來看，設計適當的關聯函數是重要的課題。這裡我們所謂的數學，也包括計算機程序和模擬的結果。最後補充，除了時間性的演變，關聯函數還可以加進空間變量（例如一對參加者的距離或一個參加者個人走的均方路程），能夠刻劃系統的動靜態結構。

上述的關聯函數以時空為變量，讀者們可能會感覺陌生，我們熟識的光電器材如電話、收音機、電視等，都能夠將信息組織成不同波長和波強的音像，然後發送顯示到我們的感覺器官。關聯函數記載複雜的動力過程，如發散或收斂軌道、單週期或多週期性振動、無序不規則運動、甚至混沌或湍流等現象，總覺得不容易領悟。沒問題！數學裡早已有一個有效的方法，將時空關聯函數轉變成頻譜（spectrum）：

$$S(\omega) = \int \exp(i\omega t) C(t) dt, \quad (4.22)$$

這裡  $\omega$  是波頻（波長的反比）， $C(t)$  是關聯函數（為求簡單只表示時間變量）。(4.22) 稱為傅立葉變換（Fourier transform）<sup>51</sup>，供實驗測量的是功率譜：

$$P(\omega) = |S(\omega)|^2. \quad (4.23)$$

無論讀者對傅立葉變換的不同熟悉程度，我們可以將它看成一個過濾器，如果動力軌道收斂成單週期振動，功率譜就顯示一個強峰在該週期的頻度位置；如果多週期振動則在相應頻度顯示多個強峰；如果是無序甚或混沌情況，功率譜便出

---

<sup>51</sup> 為紀念法國數學物理學家 Joseph Fourier (1768-1830) 的研究命名。  
第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形

現無明顯波峰較寬闊的分佈。換言之，從功率譜在波頻範疇的分佈寬度和強弱，就能定量地分析動力反應的行為。以後幾章談到數學應用於各種自然界和社會現象的分析，我們在第七章將簡略介紹關聯函數和功率譜的性能。

## 4.9 小結

前面說到的Robert McCredie May教授，他出生在澳大利亞的悉尼市，1959年在悉尼大學獲取理論物理學博士。他1974和1976 年的文章大大啓發了人們對差分方程代表的動力系統的興趣。但他認為，從定義明確的命題，通過完整的邏輯論證，最後達成的數學結論，例如指出從簡單而且確定性的差分方程出發，只要滲入足夠的非綫性成份，便可以導致無法預測的混沌結果，這是無可否認的“數學真理”（包括那些若干年前數學家提出，既不能推翻但卻無人能證明的數學定理）。可是數學真理要和“科學真理”聯手，才能發揮它的真正意義。這裡的“科學”可視為“有組織的懷疑論（organized skepticism）”。這些懷疑要經過實驗去排除和去蕪存菁，科學真理永遠不會是絕對的，有待考驗和優化，使之強固而更接近真相。數學在這強固的過程扮演一個重要的基礎角色<sup>52</sup>。所以，May的兩篇文章雖從數學出發，卻強調在人口學和生態學的應用。1979年他入選英國皇家學會（後來2000-2005年成為皇家學會會長），1988至1995年間擔任牛

---

<sup>52</sup> 見 “Biological Sciences – Biodiversity – Sustainability”, in Balzan Symposium 2008, Ed. N. Mout and W. Stauffacher (Springer, 2010) p. 65.  
第四章：從非綫性動力學到混沌理論再返回分形

頓大學和倫敦大學帝國學院教授，繼而（1996-2000）出任英國政府首席科學顧問。他從研究生態學又轉向免疫學和生物學，著作包括 “Infectious Diseases of Humans (1991, 和Roy Anderson 合著) 與及 “Virus Dynamics, The Mathematical Foundations of Immunology and Virology (2000, 和 Martin Nowak合著)。這說明數學應用對促進社會發展的力量。在以下各章的數學應用例子，我們將談談怎樣將數學概念延伸到科學的課題和社會現象。

# 第五章：協同學：一門共同合作的科學

怎樣將數學方法應用到其他科學的課題，包括社會現象？關鍵就是協同學（synergetics）。“協同學－共同合作的科學”，這是最早由德國Hermann Haken（1927－）教授提出來的<sup>53</sup>。Haken 開始主攻數學，拿的是數學博士學位。但很快轉研理論物理，繼而又通過建立斯圖加特理工大學（Technical University of Stuttgart）理論物理組、國際合作和專題年會延伸到工程、化學、生物醫學、社會學等各領域。圖 5.1 列出他畢生以協同學為中心開展到各科技的成就。

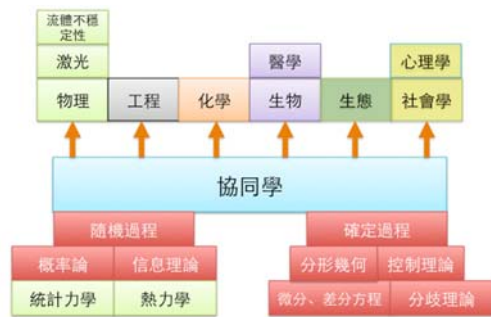


圖 5.1 Haken 提倡協同學的基礎和應用範疇。

Haken 發表超過600篇文章。他還是一個了不起的教育家，編著23本教科書，在他栽培過的63名博士生，其中至少16人

<sup>53</sup> H. Haken & R. Graham: *Synergetik - die Lehre vom Zusammenwirken*. Umschau in Wissenschaft und Technik (1971), 191–195. Umschau 是一本科普雜誌。

成為大學教授。圖5.1 表示協同學的基礎主要是數學（紅色）和物理（綠色）。數學方面的微分及差分方程、分歧、控制理論、和隨機及確定過程，我們在前幾章已經講過。現在先談談信息理論和概率論。

## 5.1 信息理論（information theory）－極值信息原理

信息是一個含義廣泛的詞彙，讓我們用一個實例說明。假如信息（ $I$ ）代表對一件事情的瞭解程度，而這事情有  $R_0$  個可能性，每個可能性都獨立發生，而且發生的機會相等。例如擲一個硬幣  $R_0 = 2$ ，擲一枚骰子  $R_0 = 6$ 。如果我們對  $R_0$  個後果一無所知，那麼手裡的信息是零， $I = 0$ ；如果只知道一部份（ $n$  個）的後果， $n < R_0$ ，信息就不足以瞭解全面。所以  $I$  的定義必然與  $R_0$  有關。另外，倘若遇到兩個獨立的事情，分別有  $R_{01}$  和  $R_{02}$  的後果，合起來後果的總數是  $R_{01}R_{02}$ ，而總信息便是兩件事情信息的總和：

$$I(R_{01}R_{02}) = I(R_{01}) + I(R_{02}) \quad (5.1)$$

符合這條件的答案是

$$I = K \ln R_0. \quad (5.2)$$

$K$  是一個常數，如果事件都是二進的，例如計算機二進的比特(bit), 0或1，那麼由  $n$  個比特組成的字則有  $R_0 = 2^n$  個可能性

，可證明  $K = 1/\ln 2 = \log_2 e$ ，即

$$I = \log_2 R_0. \quad (5.3)$$

上面(5.2)的定義不大適於應用，因為一般情況下都不容許掌握所有可能性的信息<sup>54</sup>，卻只知道某些現象或場合及其發生的相對概率（ $p_j$ ，例如擲一骰子投中某一面的相對概率是  $1/6$ ， $\sum_j p_j = 1$ ）。不難證明(5.2)可以改寫為<sup>55,56</sup>：

$$I = -K \sum_j p_j \ln p_j = -\sum_j p_j \log_2 p_j, \quad (5.4)$$

或者，

$$I = \sum_j p_j f_j; \quad f_j = -\log_2 p_j \quad \text{and} \quad p_j \neq 0. \quad (5.5)$$

這樣，信息便是  $f_j$  的平均值，以  $p_j$  為  $j$  項的權重<sup>57</sup>。

在信息理論裡信息與它的內涵意義或真假無關，信息是代表

---

<sup>54</sup> (5.2)的定義可以被解釋為量度我們對事件全部可能性的無知程度。

<sup>55</sup> 可以用例子求證。例如用  $N_1$  和  $N_2$  個比特排成由  $N = N_1 + N_2$  個比特組成的字，共有  $R_0 = N!/N_1!/N_2!$  個可能性， $p_1 = N_1/N$ ， $p_2 = N_2/N$ 。放進(5.2)出來的  $I$  用 Stirling's formula  $\ln N! \approx N(\ln N - 1)$  簡化，導出(5.4)。

<sup>56</sup>  $I$  也稱為 Shannon Information，取名自美國數學家、電子工程師和密碼學家 Claude Shannon (1916-2001)，他被稱為信息理論創始人。

<sup>57</sup> 美國物理化學家約西亞·吉布斯 (Josiah Gibbs, 1839-1903) 曾之為“相的概率的平均指數”（“the average index of probability of phase”，第五章：協同學：一門共同合作的科學

一個系統的表徵。例如，假定你的出生月份是一個系統。它的表徵有12個可能性：一月 $(1,0,0,\dots,0)$ ，二月 $(0,1,0,\dots,0)$ ， $\dots$ ，十二月 $(0,0,0,\dots,1)$ 。和你真正出生月份無關，也不在考慮之中。根據(5.3)， $I = \log_2 12$ ，如果獲得這個信息值就表示掌握系統的全部信息。但收集數據時我們很可能只找到部份的可能性，例如只有 $(1,0,0,\dots,0)$ ，故此  $I^{(1)} = \log_2 1 = 0$ 。另一個可能是由於我們不知道答案，便將概率平分到每個月份，即 $(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{12})$ ，那麼根據(5.4)，

$$I^{(2)} = -12 \left( \frac{1}{12} \right) \log_2 \left( \frac{1}{12} \right) = \log_2 12. \quad (5.6)$$

很明顯， $I^{(2)} > I^{(1)}$ ，不獨如此， $I^{(2)}$ 的數值等於最高值，已具備全部信息。所以，如希望最高實用價值的信息，我們要求它是一個最大值。

$$I = -K \sum_i p_i \ln p_i = \text{maximum}. \quad (5.7)$$

(5.7)被成為最大值信息原理（maximum information principle）。這是信息理論非常重要的原理<sup>58</sup>。

---

<sup>58</sup>為甚麼是最大值（maximum）而不是極大值呢？這是觀點與角度的問題， $I^{(1)}$ 只提供一個可能，可以說提出者認為他對系統有百份百的了解； $I^{(2)}$ 提供所有機會均等的可能性，即提出者對系統毫不知情。因此，信息(5.4)的定義亦可詮釋為  $I$  代表對系統無知的程度。這個定義的字眼不很重要。



## 5.2 統計力學和熱力學 – 熵極量增長原理

統計力學和熱力學屬於物理學的支流，但對象包括任何物理系統，前面第3.1節說過的宏觀世界和微觀世界，從水滴裡的分子到宇宙的星際，都離不開統計力學與熱力學，所以是協同學的基礎環節（見圖5.1）。我們較熟識的是宏觀世界物體狀態：如溫度（ $T$ ）、體積（ $V$ ）、壓力（ $P$ ）、能量、密度、電流、磁化強度、黏性等，屬於熱力學的範疇。微觀（或細觀）世界的狀態則是粒子的位置、速度、電荷、磁矩、極化率等。因為粒子既多<sup>59</sup>（ $\sim 6.02 \times 10^{23}$ ）且小（納米以下），只能將粒子的微觀物理效應結果用統計方法（通過平均值、高次方矩、關聯函數等）表徵。但微觀的結論必須以宏觀的實驗結果或理論原理為依歸。這裡就有很奧祕的規律。試想，宏觀世界的相態有限，例如氣態、液態、固態、磁相、等離子態等，況且由一個相態轉成另一個相態時 – 如液態變氣態 – 系統的宏觀性能，如密度和壓力，都在到達臨界點（例如沸點）那一刻發生猝然的變化。但構成系統的微觀粒子雖然有千千萬萬的自由度，卻在此刻 – 除了溫度改變，沒有受外界影響（例如播入種子）下 – 同時服從一個命令性的變化。例如氣態的分子都在活躍飛行，很少碰到其他分子的情況下而變成液態的凝聚環境，乖乖地拘束在比氣態小數十甚至數百倍的空間，頻密地和鄰近的分子碰撞。這種高度性協同現象正是這本小冊子主題。協同學的好處是讓我們認識自

---

<sup>59</sup> 阿伏伽德羅常數（Avogadro constant），Amedeo Avogadro (1776-1856) 是意大利物理學家，以首倡分子理論著名。

然事物和現象背後微觀元素的運作規律，而且能將發生在不同領域的變化如圖5.1所示意作綜合性的分析。

不難想像，當一個系統跨越臨界綫時，粒子的秩序（order）和彼此的關聯都改變很大。物理學用以表徵系統信息稱為熵（entropy）或信息熵（information entropy），定義是

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \quad (5.8)$$

其中的  $k_B$  是玻爾茲曼常數（Boltzmann constant）<sup>60</sup>， $i$  是代表物理系統的組成部份屬性的指數（如原子的位置或速度）。首先談談熱力學的第二定律：一個封閉熱力系統不能與外界溝通（能量和質量不可以進入或輸出系統）或與外界發生作用，它的熱力狀態演變過程中，熵不可能減少，只會增加，直至最大值時即達到熱力平衡。熵愈大，微觀元素（粒子）的無序性愈高。假設一個系統有左右兩個間隔，左邊的充滿密度高的分子，右邊則真空，這環境（有與無分開）的無序性較低，間隔連通後分子從左方流進右方，無序性增加，直至左右分子和溫度的平均值各相等，達到熱力平衡，熵的數值最大。這就是熵極量增長原理（principle of maximum entropy production）。經驗證明，總是分子從高密度流往低密度方向，從來不會逆向。所以熱力學第二定律提供了時間的進行方向：光陰一去不復返。不過其他物理基礎運動都是時間對稱的（即是：將時間變量  $t$  改成  $-t$ ，運動方程式保持不變，所以粒子前進與後退機會均等）。還有，前面第3.1節

---

<sup>60</sup>  $k_B = 1.3806488 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ，取名自奧地利物理學家 Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906).

說過，所有物質在低溫下都趨向結晶化，原子作長程有序排列，無序性大大降低；又如太陽能坡度分佈(如季節、晝夜)於生物圈內所培養出有秩序的生態，那都豈不是違反第二定律嗎？不會。原因是第二定律的生效只限於封閉熱力系統，但須要降溫或接受太陽能，系統要和外界交換熱能，就再不是封閉了。況且，自然界大部份的系統 – 包括我們感興趣非綫性的數學動力系統 – 都是開放的，演變方向是不可逆轉的（irreversible）。對這些開放系統的非平衡和不可逆轉現象，今天熱力學和統計力學仍是未能完全解答所有的問題。

比利時籍化學家和物理學家伊利亞·普里高津（Ilya Prigogine, 1919-2003）和他的合作者將熱力學第二定律延伸至非平衡開放系統，熵的演變率分成兩部份：

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt}, \quad (5.9)$$

第一部份， $dS_i/dt \geq 0$ ，是熵由不可逆轉過程引起有增無減的改變，第二部份， $dS_e/dt$ ，是與外界交換功能產生可正可負的熵轉變。總合起來熵的數值可以減少，因而系統演變成更有序的結構。普里高津推斷一個系統存在著雙重的傾向：在接近熱力平衡的環境下綫性作用造成不聯貫的無序狀態；當遠離平衡的情況下而接近臨界點時，一直存在著的漲落（fluctuations）會呈現指數式的劇增，非綫性動力成為主流作用，繼而產生相干性的有序狀態。還有最耐人尋味的是這些開放系統與外界交換能量或質量 – 如熱能、電磁波、或離子通量等 – 其方式均不存在決定系統臨界後所演變成有序結構的因素，而是粒子間相互作用自我組織成的（self

organization)。不同系統 – 包括跨領域系統 – 內部粒子或元素作用固然不同，但都出現類似的臨界現象（critical phenomenon），這叫做普適性（universality）。如果能有一個基於數學為主導的方法有系統性地分析這些既是複雜而又圍繞著我們的事物和現象，這便是協同學，目的是要了解事物和現象背後的規律。

### 5.3 淺談協同學

從圖5.1可見協同學有深厚的數學砥柱，但演繹長篇大論的數學方程不是本書的目的。這裡我們嘗試簡明扼要地介紹協同學的核心數學概念而已。

首先，僅以一維動力系統為對象的(4.1)方程要擴展為

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{q}}, \alpha) + \bar{\mathbf{F}}(t), \quad (5.10)$$

這裡  $\bar{\mathbf{N}}$  是代表動力系統的非綫性函數， $\alpha$  是控制參數， $\bar{\mathbf{F}}$  是來自外界隨時間變化的作用力。 $\bar{\mathbf{q}}$  是包含所有微觀態的矢量，包括接近熱力平衡較穩定的和遠離平衡不穩定的態。第一步是尋找  $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$  隨著  $\alpha$  改變的穩定性（只取綫性項）

$$\left. \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{q}} + \bar{\delta}, \alpha) \right|_{\bar{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{q}}_0} \cong \dot{\bar{\delta}} = \lambda \bar{\delta}, \text{ 因此,}$$

$$\bar{\delta}(t) = e^{\lambda t} \bar{\mathbf{v}}. \quad (5.11)$$

而  $\bar{\mathbf{v}}$  是不含  $t$  變量的矢量。從(5.11) 可分判  $\bar{\mathbf{q}}$  的不同穩定性的

界限：

$$\begin{aligned} \text{不穩定: } \lambda_u > 0, \bar{\mathbf{v}}_u, \\ \text{穩定: } \lambda_s > 0, \bar{\mathbf{v}}_s. \end{aligned} \quad (5.12)$$

為求簡化，我們只保留不穩定的部份<sup>61</sup>，將 $\bar{\mathbf{q}}$ 寫成

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}_0 + \sum_u \xi_u(t) \bar{\mathbf{v}}_u + \dots, \quad (5.13)$$

於是定下系統從遠離平衡以至臨界出現的序參量（order parameter） $\xi_u$ 。這序參量扮演聯繫微觀態和宏觀變量的關鍵角色。更重要的是 $\xi_u$ 服從冪定律：

$$\xi_u \propto (\lambda_u)^\kappa, \quad \kappa > 0. \quad (5.14)$$

最後，協同理論能概念性地推斷在臨界間序參數的兩大特性：  
：1）勢函數和序參數的相互影響；與及2）序參數的時間演變，用圖5.2 和 5.3表示。

---

<sup>61</sup> 實際上， $\bar{\mathbf{q}}$ 的演變須要結合穩定和不穩定模式，是(5.13)未寫完的部份。

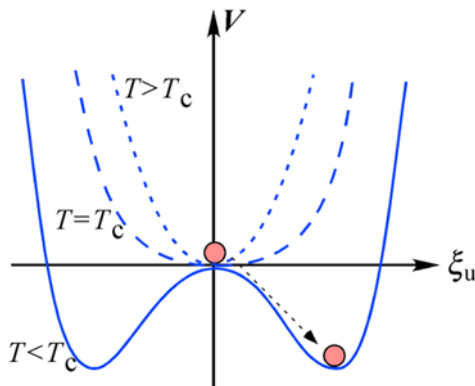


圖 5.2 示意勢函數隨著序參數在臨界前後的變化。假設一圓球滑向勢函數的最低點。遠離臨界時（例如  $T > T_c$ ，溫度高過臨界點）勢函數是一條曲率高向上的拋物線，球穩定在谷底。正當臨界點（ $T = T_c$ ）勢函數的曲率大幅度降低，球受漲落影響變成不穩定，臨界後（ $T < T_c$ ）勢函數變成雙谷，球落在右面的低谷，序參數改變它的數值。

圖5.2是一個示意圖。在未達到但接近臨界時勢函數是一個左右對稱的雙谷，系統的粒子就好像位於勢鞍點的圓球，處於極不穩定狀態。如果一切保持絕對恆久，系統雖然不穩定也不會發生變化，可是這一刻系統微觀態的漲落特別厲害，不單是粒子各自獨立波動，而是所有粒子聯手起來造成自發性的波動，將整個系統作性質上的改變。一旦臨界，粒子在勢函數的分佈打破了臨界前的對稱性，這叫對稱破缺（**symmetry breaking**）。臨界後系統達到新的結構。試想，系統有 $\sim 10^{23}$ 這麼多的粒子（或自由度），在臨界那一刻同時聯合起來，服從支配系統的物理、化學、生理、或經濟等原理去進行改變，是何等微妙的現象。**Haken**稱之為勞役原理

（slaving principle），比喻微觀粒子像奴隸般的服從驅使，這用詞當然沒有映射人類的行為。但在當今對人權敏感的社會，我們姑且用‘命令機動原理’來代替吧。

序參數在臨界前後的變化是表徵臨界現象和確定普適性的重要尺度。圖5.3 表示序參數過渡臨界點的時間性演變。

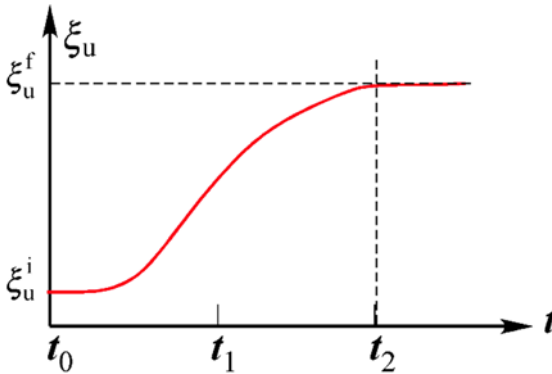


圖5.3 序參數從臨界前（ $t_0$ ）至臨界後（ $t > t_2$ ）的變化。

序參數是一個宏觀的變量，舉個例子，一個系統從氣態變成液態時，溫度（ $T$ ）是控制臨界過程的因子，臨界溫度和臨界密度（液氣併存）分別為  $T_c$  及  $\rho_c$ ，序參數可以定義為氣態密度（ $\rho_g$ ）和液態密度（ $\rho_l$ ）的差分，在合併(5.14)：

$$\xi \equiv \rho_l - \rho_g = \rho_c \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^\kappa, \quad (5.15)$$

$\kappa$  就是臨界指數。怎樣將宏觀的序參數聯繫到系統的微觀變量？這要利用關聯函數（見第4.8節）。氣態的關聯函數可以

表達成

$$G(r) \approx e^{-r/\eta}, \quad (5.16)$$

$r$  是系統內一雙原子或分子的距離， $\eta$  稱為關聯長度（correlation length）或相干長度（coherence length）。氣態在動力平衡時的  $\eta$  很短，大概等於一雙原子或分子的平均最短距離， $\eta \ll \bar{r}$ 。所以  $r > \eta$ ,  $G(r) \rightarrow 0$ 。但當接近臨界點時，系統遠離熱力平衡，漲落加劇， $\eta$  增長以至散發，表現與方程 (5.15) 的冪定律行為，即

$$\eta \approx \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-\nu}. \quad (5.17)$$

前面說過，系統趨向動力平衡則增加無序性（和熵）。遠離動力平衡再加上非綫性作用和與外界感應，系統發生自組織的臨界現象，無序的對稱破缺，系統呈現新的有組結構。圖 5.4 示意這個從無序到有序的過程，(5.9) 的  $dS_e/dt < 0$ ，以致總熵值減少。



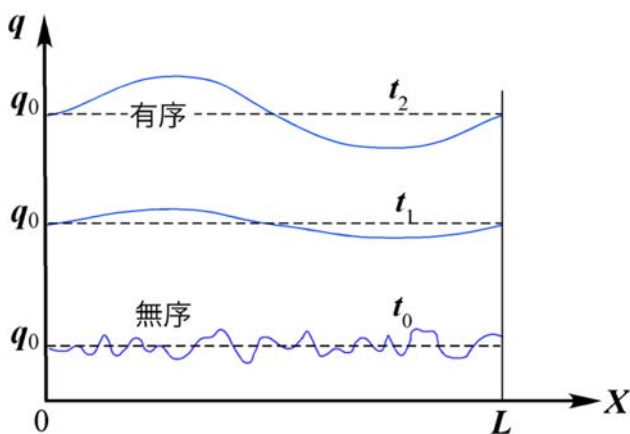


圖 5.4 通過臨界現象（ $t_0 \rightarrow t_2$ ）系統從無序到產生有序結構。 $t_0$  的漲落沒有固定的週期或幅度， $t_2$  後系統呈現由粒子集體聯貫成的有序模式，這裡用一週期的正弦波來代表。

## 5.4 小結

前面四章談到有關數學函數和幾何概念，並涉及分析非線性動力系統的方法，好比零碎的磚石。本章將它們集中起來，鋪砌成一個臺階，又添加了一點熱力學和統計物理學的理論，好比灌入一點凝脂，使臺階牢固，以支撐一條協同學的橫梁。有了這橫梁，上面便可搭蓋各式的應用平臺，包括和物理、化學、生物、經濟、甚至心理學等有關的複雜系統。這些平臺驟眼看來互不相干，但在協同學的探燈下，可以洞識其中互通的源頭、普遍的行為和共有的規律。且看下一章：從數學模式到跨學科研究。

## 第六章：從數學模式到跨學科研究

本章不是與大家研究物理、生物、經濟、或社會科學，裡面任何一個環節都需要長篇敘述，包括背景、目的、方法、結果等，不是這小冊子的主旨。我們希望指出前面所講過的數學工具怎樣應用到跨學科的問題，以證明數學是協同學的中流砥柱，有廣泛的、高度分析能力的、和合成規律性發現的潛力。

### 6.1 好看而不現實的正態分佈（normal distribution 或 Gaussian distribution）

假如有人問你，一個普通成人超出或低過你身高一倍的可能性是多少？你（也是普通成人）的答案應該是可能性很低，甚至是零。因為你會聯想：一般成人的身高大概是1.65米（地區、人種略有差異），高過或低於自己十分之一（約17厘米）的人大概有多少，差距超過一倍的成人相信不可能吧！倘若換成比較體重或體形，那是有可能，但差距再大，例如兩倍以上的體重，可能性就越越來越低了。因為我們腦海都出現正態分佈的形象，如圖 6.1，是一條鐘形的左右對稱曲線，它的定義：

$$P_G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (6.1)$$

其中平均值（ $\mu$ ），標準差（ $\sigma$ ）或方差（ $\sigma^2$ ），都是我們第六章：從數學模式到跨學科研究

熟悉的。

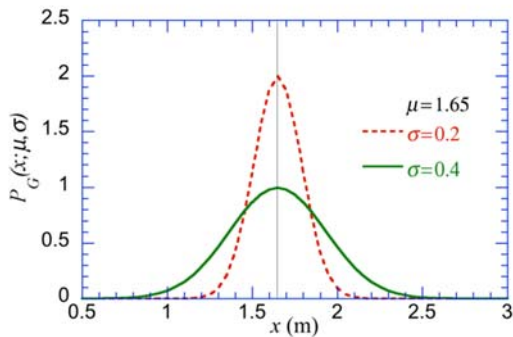


圖 6.1 根據方程(6.1)的正態分佈。

從數學的角度看，正態分佈是無規變量在一定概率下發生大量個案的漸近值分佈，例如前面提到擲硬幣、投骰子、或無規行走等，經過無數次嘗試的後果統計便是正態分佈<sup>62</sup>。這個趨勢便是有名的中心極限定理（central limit theorem）。在日常生活以至科學應用，正態分佈配合中心極限定理都存在一定的價值。例如根據一般人身高和體重的正態分佈，個人交通工具，從自行車到汽車、船艇等都設計成適合絕大多數人使用。不少天文學、氣象、物性、價格等數據都用與正態分佈有關的方法去分析。老師給學生考試的成績都以‘合理’的正態分佈為標準。但現實真的符合理想嗎？不少雇主有這個經驗：底下大部份員工的業績都平平無奇，只有其中一

<sup>62</sup> 在有限的次數下，概率分佈函數（probability distribution function, pdf）是二項分佈（binomial distribution），統計分析用泊松分佈（Poisson distribution）處理。

兩個是特別出色，認為合理加薪分佈應是大部份員工不給或只限低幅度加薪，而那一二傑出者的薪酬則大大增加，顯然與正態分佈不同。又常常聽到很多火車和飛機的乘客（多是體形偏大的）抱怨，說一般的座位空間太小，因而有價格不同艙位的設立。如果在某個公眾場合，人們會不自覺地將自己的收入（或財產）與在場者的平均收入（或財產）作為參考，從而估計眾人的行為習慣。但倘若團體內包括類似李嘉誠或蓋持（**Bill Gates**）的大財主，這些比較和推理便完全失去意義了。這個可能性絕不是虛構的，因為社會裡擁有極大財富的人雖少但大有人在。換言之，人類文明史裡財富的分佈從來不是根據正態分佈的。

## 6.2 自然而不自在的冪定律分佈

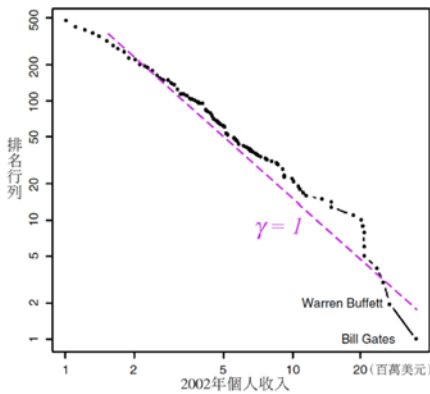


圖 6.2 根據Forbes data，世界排名最富有500人於2002年個人

收入的log-log plot. 改自Patelli (2006)<sup>63</sup>

第1.1節介紹的冪定律，方程(1.8)： $f(x) = kx^\alpha$ ，卻往往與自然和人為的狀態十分相似，如圖6.2 標出2002年世界最富有的500人當年收入，數據與  $\alpha \approx -1$  頗為接近。可是， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \infty$  的發散行為是不合理的，所以冪定律一般應用時要求  $x$  大於某最低值， $x_{\min}$ 。

所以，如果  $\alpha \neq 1$ ，冪定律可以改寫為：

$$P_{PL}(x) = \frac{\gamma - 1}{x_{\min}} \left( \frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\gamma}, \quad \text{if } \gamma > 1. \quad (6.2)$$

再者，冪定律分佈拖著一條長‘重’的尾巴，這叫‘heavy-tail phenomena’。它代表偏差極大的重值既罕見但存在，這不可以用差分來表徵，因為冪定律分佈沒有第二矩的定義。圖 6.3 將正態分佈，方程(6.1)和冪定律分佈，方程(6.2)繪出的比較，可見它們分別很大。

---

<sup>63</sup> P. Patelli (2006) “Nonlinear dynamical systems in Economics”, in *Universality of Nonclassical Nonlinearity*, Ed. P. P. Delsanto, (Springer).  
第六章：從數學模式到跨學科研究

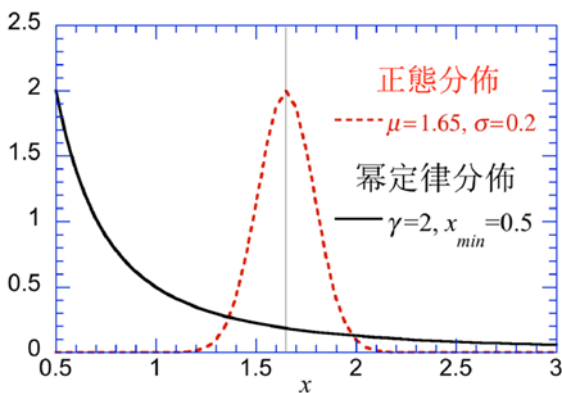


圖 6.3 幂定律分佈與正態分佈的比較。

前面多次提到，自然界和人類社會的現象就偏偏傾向於幂定律分佈，主流的個體都集中在低值的位置，但總有很少數個體處於極高位。這念頭可能已成為人們潛意識默認的一部份，所以人會冒險，企圖僥倖，會覺得幸運兒雖少，但總有可能是自己！圖 6.4 集合 12 項跨領域的調查數據 log-log plots，除了局部  $x < x_{\min}$  範圍，數據都呈現幂定律分佈。其中(a)關於書籍裡各個字出現的次數依從幂定律分佈，最早由美國語言學家George Kingsley Zipf提出：任何字出現的次數與它排名成反比，例如‘the’，‘and’等字，次數最多，排名最前。一本巨著其中一半的篇幅往往只包含一百多個生字。這屬性亦通用於其他言語和書籍，被稱為Zipf’s Law。全球地震次數與強度的關係－圖 6.4 (f)，亦即第1.3節的古登堡－黎克特定律。 $x < x_{\min}$  區的地震次數既多且強度很低，很可能數據不完全準確。至於 (j) 是有關個人收入或資產的幂定律分佈

，最早由經濟學家及工程師Vilfredo Pareto 於1896年發現，故稱Pareto law.

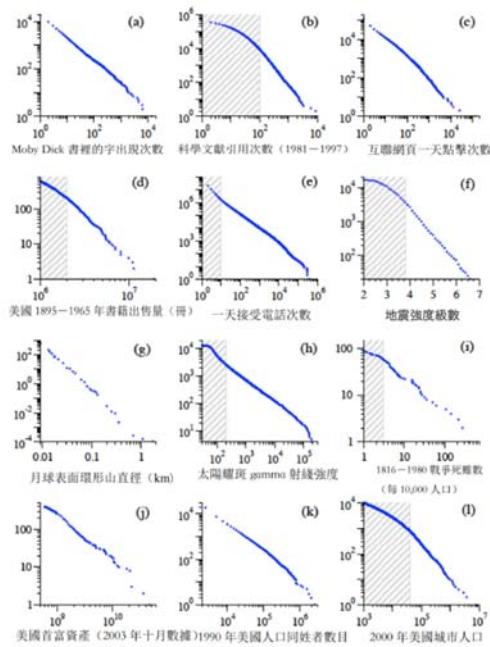


圖 6.4 (a)-(l) 是的12項不同的調查數據，都呈現不同程度的冪定律分佈。斜線區即  $x < x_{\min}$  的數據不納進計算冪定律分佈指數。改自Newman (2006).<sup>64</sup> (arXiv:cond-mat/0412004 [cond-mat.stat-mech])

<sup>64</sup>M. E. J. Newman (2006), “Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law”.  
第六章：從數學模式到跨學科研究



## Pareto law和財富分配

自從Pareto提出社會財富的冪式定律分佈後，無數的社會經濟學家分析世界上各時代地區的社會財富分配，發現Pareto law基本符合現實數據（例如美國、日本的私人和公司財產或收入）。不禁引起很多經濟學家質疑：Pareto law是不是一條自然的經濟規律？我們在這裡介紹部份簡單的分析。

我們的數學模式源自物理熱力學。系統是由  $N$  個成員組成的團體。假設每個成員的資產是  $x_i$ ,  $\{x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, N\}$ ，整個團體的總資產， $X = \sum_i x_i$ ，和平均單成員資產， $\langle x \rangle = X/N$ ，保持不變。在某一刻（ $t$ ）成員  $i$  無規地和另一成員  $j$  交易，但是所有成員都有一個同樣的儲蓄習慣，即留下一部份（ $\lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$ ）的資產不在交易之內，兩者的無規交易則用一個無規變量， $\varepsilon_{ij}$ ，代表。如此，這兩成員在交易後下一刻（ $t+1$ ）的資產是

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \lambda x_i(t) + \varepsilon_{ij} \left[ (1-\lambda)(x_i(t) + x_j(t)) \right], \\ x_j(t+1) &= \lambda x_j(t) + (1-\varepsilon_{ij}) \left[ (1-\lambda)(x_i(t) + x_j(t)) \right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

而交易額是

$$\Delta x = (1-\lambda) \left[ \varepsilon_{ij} \{x_i(t) + x_j(t)\} - x_i(t) \right] \quad (6.4)$$

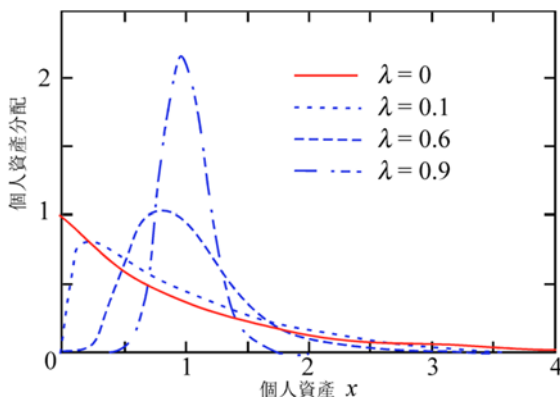


圖 6.5 根據方程(6.3)和(6.4)的交易和儲蓄規則，個人資產平均值不變， $X/N \equiv 1$ 。100成員組成的團體形成個人資產分配的結果。見 (Patriarca and Chakraborti 2013)<sup>65</sup>

圖 6.5 是由一百成員（ $N = 100$ ）團體根據上述交易和儲蓄規則的結果。從方程(6.4)可見，交易活動與儲蓄份量有直接關係，如果每人儲蓄多（ $\lambda \rightarrow 1$ ），交易少，個人資產都集中於平均值， $X/N \equiv 1$ ，分佈幅度很窄。但減少儲蓄，鼓勵交易，個人資產分佈則自發地變成不對稱（不平等），大部份人資產較少，很小部份人特高資產的‘重尾’分佈，如  $\lambda \rightarrow 0$  所示。

以上的模式限制每成員的儲蓄率一致，不合現實。我們讓儲

<sup>65</sup> M. Patriarca and A. Chakraborti, “Kinetic exchange models: From molecular physics to social science”, *Am. J. Phys.* **81**, 618-623, 2013.  
第六章：從數學模式到跨學科研究

蓄率隨成員改變， $\{0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, N\}$ ，(6.4) 變成為

$$\Delta x = \varepsilon_{ij} (1 - \lambda_j) x_j(t) - (1 - \lambda_i) (1 - \varepsilon_{ij}) x_i(t) \quad (6.5)$$

但成員的個人儲蓄率不能隨交易時間或次數而改變。根據這樣情況用計算機模擬一個  $N = 1000$  的團體經過一段時間交易的結果，然後重複多次的模擬，再將所有結果平均起來，最後的個人資產分佈以圖 6.6 表示。可見資產分佈從  $x > x_{\min} \approx 10$  開始，很精確地表現Perato 的冪定律分佈，Perato指數  $\approx 2$ 。我們還未有定義交易的經濟形式、資本回報、物價浮動等因素，但冪定律分佈以自發性地形成。所以，財富不平等分佈很可能如歷史所記載，是一個必然的社會現象。當然，要真正判斷和預測現實情況，須要注入高深的社會經濟因素和數學理論，這都是目前社會經濟學家的研究對象。

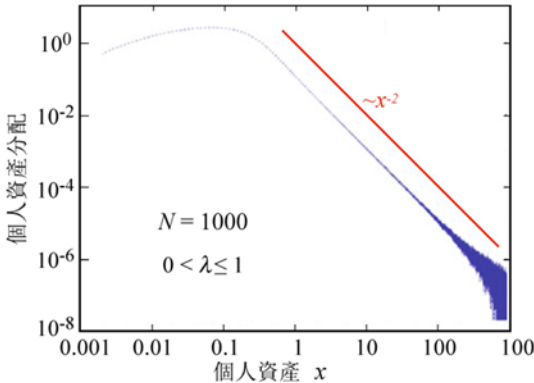


圖 6.6 計算機模擬一千名成員的團體在分佈性儲蓄率環境下交易的個人資產分佈結果。個人資產平均值仍保持是  $X/N \equiv 1$ 。改自

(Chakraborti *et al.* 2015) <sup>66</sup>

看過無所不在的冪定律分佈和它那費解的重尾巴現象，以下幾節簡單地談談冪定律分佈的成因，先從物理學入手。

### 6.3 物理學的相變（phase transition）－序參數和臨界指數

一般而言，物相可以屬於簡單系統或複雜系統，兩者的宏觀性能往往都標誌於不同的冪定律。理想氣體（ideal gas）是最簡單的系統之一，其中較熟識的理想氣體冪定律：

$$\frac{1}{V} = \frac{P}{k_B} T^{-1}, \quad (6.6)$$

即在熱力平衡狀態氣體的體積（ $V$ ）與溫度（ $T$ ）成正比（ $P$ 是壓力， $k_B$ 是玻爾茲曼常數）。這冪定律也存在 $T \rightarrow 0$ 時發散的問題和 $V \rightarrow 0$ 的不合理情況。因為統計力學對待氣體

的分子，只考慮它們的動能，即 $E = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}$ ，（ $p_i$  和  $m_i$ 分

別為第 $i$ 個分子的動量和質量），而為了計算簡單，分子與分子間的作用便假設不存在。理想氣體無論怎樣降溫都不會

---

<sup>66</sup> A. Chakraborti, Y. Fujiwara, A. Ghosh, J. Inoue, and S. Sinha (2015), “Physicists’ approaches to a few Economic problems”, in “Econophysics and Data Driven Modelling of Market Dynamics”, F. Abergel *et al.* (Eds.), Springer.

液化和固化 – 沒有相變！同樣地，一個固體磁性系統，每個原子的電子軌道都帶著磁矩（好像一桿納米大小有南北極的磁鐵），為了簡單，我們將原子的磁矩視為氣體分子，磁矩互不相干，這‘氣體’在沒有磁場的環境下，原子的磁矩南北極都各自朝著隨意方向，總和起來磁化強度（magnetization,  $\vec{M}$ ）是零，（此所謂順磁性，paramagnetism）但一旦外界輸進設定南北方向的磁場（ $\vec{H}$ ），所有原子的磁矩都會看齊朝著此南北方向排列。系統的平均磁化強度便與磁場強度成正比，根據以下冪定律（Curie law）：

$$\vec{M} = C\vec{H}T^{-1} \quad , \quad (6.7)$$

$C$ 是Curie constant。正因為忽略磁矩的相互作用，系統沒有相變。我們都知道，這都與事實不符，在低溫下磁矩的相互作用增強（通過帶磁性的基態或低能級波函數（wave function）），一般會在某溫度發生自發性的磁有序（magnetic order）。

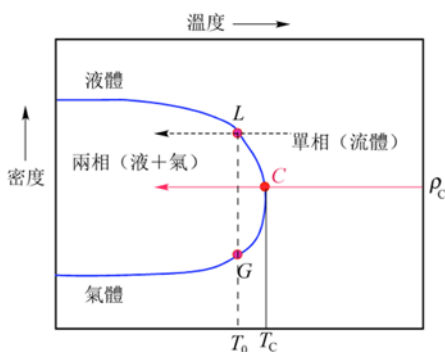


圖 6.7 密度 – 溫度相圖。曲線是液氣共存綫，分開液態、氣態、

液氣混合兩相、和流體單相。如果流體沿虛線箭頭通過  $L$  點進入兩相區，屬於一級相變，進入兩相區時（ $T_0$ ）出現液滴和氣泡，各有不同的密度（ $L$  和  $G$  點），熱力變量（例如  $P$ ,  $V$ ）發生不連續的躍變。倘若沿實綫箭頭通過臨界點（ $C$ ）進入兩相區，液氣的密度一致，熱力變量保持連續性的變化，屬於二級相變。臨界點  $C$  也是分歧點，此相圖可與圖4.16（邏輯斯諦差分方程軌道）表示產生分歧的上方長方形區比較。

前面5.3 節已提到氣體 $\leftrightarrow$ 液體的相變，圖6.7 繪出概念性的  $\rho-T$  相圖（phase diagram）。曲線是液態和氣態的界面（液氣併存）， $C$  是臨界點，也是液氣和流體共存點。通過  $C$  點的相變屬於二級相變（second-order phase transition），熱力變量如  $P, V, \rho$  等保持連續性的變化，但這些變量的第一導數，如壓縮率（compressibility），則出現不連續的發散。沿著其他，如通過  $L$  或  $G$  點，的相變是一級相變（first-order phase transition），熱力變量發生不連續的躍變。 $T > T_c$  是無序性高和液氣對稱的流體態， $T < T_c$  分子結成液體和氣體，無序性降低，對稱亦破缺。其中數學基礎和動力分差方程一週期分歧到兩週期的現象相似，見圖6.7。

以上的相圖，其基本形式和概念－臨界點、分歧現象等，不限於液氣，其他系統如二元液體或合金、磁性、鐵電體、超導體等也有類似的相圖，只是相對的熱力電磁變量不同而已。至於計算臨界行為，首先要建立系統粒子的相互作用模式，這是一個典型的多體問題（many-body problem），在數學上無法完整解答（見第四章），統計力學（包括計算機模擬

）只能用平均場理論（mean-field theory）的近似方法。在分析實驗數據方面，首先準確地測量序參數於臨界階段的數值，假設依隨冪定律轉化，方程 (5.15) 和 (5.16) 便是其中例子，通過擬合優度去獲得臨界指數。表 6.1 列出液氣和鐵磁相變兩個系統的臨界指數。首先，實驗測出的指數精確度很高。第二，雖然是兩個性質不同的系統，但彼此相對的臨界指數十分接近，這就是第五章講到的臨界時系統粒子互不相干的自由度被命令機動原理牽制而出現普適性的臨界行為。第三，理論，包括Ising模式和平均場理論對指數的計算結果不如理想。其實平均場論不能推斷臨界指數的冪定律，真正證明冪定律臨界行為要到70 年代 Wilson<sup>67</sup> 和合作者提出重正化群理論（renormalization group method），是目前最成功理解物理相變的理論。

表6.1 比較從實驗測出的和從理論估計的臨界指數。<sup>68</sup>

| 屬性        | 理論            |       | 實驗          |            |
|-----------|---------------|-------|-------------|------------|
|           | 二維 Ising 模式指數 | 平均場指數 | 液－氣相變       | 鐵磁相變       |
| 比熱        | 0             | 0     | 0.113±0.005 | -0.03±0.12 |
| 密度差/磁化強度差 | 1/8           | 1/2   | 0.322±0.002 | 0.37±0.01  |

<sup>67</sup> Kenneth Wilson (1936-2013), 美國理論物理學家，1982 年以他研究的相變理論獲諾貝爾物理學獎。

<sup>68</sup> A. Lesne and M. Laguès (2012), “Scale Invariance” (Springer).

|             |     |     |                   |                 |
|-------------|-----|-----|-------------------|-----------------|
| 壓縮率／<br>磁化率 | 7/4 | 1   | $1.239 \pm 0.002$ | $1.33 \pm 0.15$ |
| 關聯函數        | 1/4 | 0   | $0.017 \pm 0.015$ | $0.07 \pm 0.04$ |
| 相干長度        | 1   | 1/2 | $0.625 \pm 0.006$ | $0.69 \pm 0.02$ |

Haken用協同學理念，例如勢函數和序參數在臨界前後的關係（見圖5.2），認定一組主方程（master equations），可以廣義地應用到不同的物理系統，例如激光、超導、鐵磁等。再進一步從跨學科的步驟入手，他認為其他科學系統也有臨界的場合，可以訂立相對的序參數，然後採用協同學方法進行分析處理。這些序參數可能是分子數（在化學或生物學方面）、跳動率（神經網絡）、動植物種類數（生態學）、投資回報（市場經濟）、持意見人口（社會學）等等。

## 6.4 擴散 – 布朗運動及無規行走

第3.1節提到液體和氣體的原子和分子不斷地發生隨機碰撞，導致很多有趣的自然現象。現在談一下這種擴散運動的數學基礎，其結論不但用於解釋自然現象，還可以應用到經濟和社會學方面。

**布朗運動** 1827年布朗仔細地研究浮游在水中的花粉，觀察花粉不斷而無常的振動，即後人稱為的布朗運動。如果花粉（質量  $m \sim 4 \times 10^{-15} \text{ kg}$ ，直徑  $a \sim 10^{-6} \text{ m}$ ）的密度和水差不多，重力與浮力抵消。餘下是與速度（ $\vec{v}$ ）和水黏度（ $\varepsilon \sim 10^{-3} \text{ kg/m/s}$ ）成比例的摩擦力， $-6\pi a \varepsilon \vec{v}$ ，牛頓定律決定運



動方程：

$$d\vec{v} = -\frac{\vec{v}}{\tau} dt + \sigma \xi(\vec{W}), \quad (6.8)$$

其中  $\tau = m / (6\pi\epsilon a) \sim 2 \times 10^{-7} \text{s}$  是花粉的平均振動週期，最後那項代表在水裡遇到的無規性漲落  $\xi(\vec{W})$ ， $\sigma$  是漲落系數。我們感興趣的是無常運動的平均值  $\langle \dots \rangle$  和漸近值，例如

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_0 e^{-t/\tau}, \langle \vec{x} \rangle = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \tau - \vec{v}_0 \tau e^{-t/\tau}, \quad (6.9)$$

$\vec{v}_0$  和  $\vec{x}_0$  分別是速度和位置的初始值。當觀察時間大大超過振動週期， $t \approx \tau$ ， $\langle \vec{v} \rangle = 0$ 。也可以證明

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} \tau \sigma^2 + \left( \vec{v}_0^2 - \frac{3}{2} \tau \sigma^2 \right) e^{-2t/\tau}. \quad (6.10)$$

所以，當  $t \gg \tau$ ，花粉忘記初始速度，加上熱力學的動能與溫度（ $T$ ）的關係則獲得

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} \tau \sigma^2 = \frac{3k_B T}{m}. \quad (6.11)$$

因此，從宏觀變量－水溫和黏度，我們估計到微觀的花粉平均屬性， $\langle \vec{v}^2 \rangle$ 。再進一步可證明花粉位移變量的差分與時間成正比，即

第六章：從數學模式到跨學科研究

$$R^2(t) = \langle \vec{x}^2 \rangle - \vec{x}_0^2 = 2\tau \langle \vec{v}^2 \rangle t = \frac{k_B T}{\pi \epsilon a} t = 2Dt, \quad (6.12)$$

其中  $D$  是擴散係數（diffusion coefficient）<sup>69</sup>，它的量綱是面積×時間。

$$D = \frac{k_B T}{2\pi \eta a}. \quad (6.13)$$

這是布朗運動的一個重要屬性。在常溫下（ $\sim 300\text{K}$ ）花粉的方均根速度（root-mean-square velocity）是  $\sim 2 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ ，而水分子的方均根速度為  $\sim 600 \text{ m/s}$ 。而且水分子之間距離很短  $\sim 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。這高密度的媒體是布朗運動的重要環節，讓浮游粒子受到高頻率的媒體分子碰撞。還有，粒子重量對布朗運動有決定性的影響，倘若粒子的密度大於水，粒子會因重力而下沈，到達容器底部會反彈，如果粒子重量未超過一個所謂膠體極限（colloidal limit），粒子會再被分子碰撞作用而浮游，不然便會澱積，布朗運動則告終止。換言之，形成布朗運動的先決條件是容許忽略粒子的慣性質量。

此外，擴散系數和溶液黏度成反比，和溫度成正比。擴散係數和粒子的大小成反比，這對生物藥劑學很重要。例如，一般藥劑的分子較小，在常溫水裡  $D \approx 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ ，大概需要17分鐘擴散1毫米的距離。但一個蛋白質分子，例如胰島素  $D \approx 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$ ，需要1700分鐘擴散1毫米。

---

<sup>69</sup> 方程 6.12 由愛因斯坦於 1905 年提出，又成為愛因斯坦公式（Einstein's formula）。

上述方程(6.10)至(6.13)利用擴散效應的重要條件，即粒子擴散運動的時間尺度大大長於粒子與媒體分子碰撞的時間， $t \gg \tau$ 。這與第6.3節的臨界現象相反，所以正常擴散發生在系統接近熱力平衡階段，遠離臨界區的自我組織以致相變行為。

### 無規行走 (random walk)

無規行走是形容理想布朗運動的數學工具。行走者從時間和地點源頭開始在一維、二維或三維的空間行走，這裡取其簡單用一維空間描述。假設行走者在 $t$ 那一刻走到 $x(t)$ ，他無規地走下一步需時 $\tau$ ，距離是 $l(t)$ ，用以下方程表示：

$$x(t + \tau) = x(t) + l(t). \quad (6.14)$$

無規即所有步伐都是獨立（沒有記憶）和長短一致的分佈，如果步數 $\rightarrow \infty$ ，便是正態分佈。如果行走了 $N$ 步後到達 $x(t)$ ， $x(t) = l(t - \tau) + l(t - 2\tau) + \dots + l(\tau) + l(0)$ ，行走者的平均漂移距離是擴散問題的重要變量。

$$\langle x(t) \rangle = \sum_i^N \langle l_i \rangle = N \langle l \rangle, \quad (6.15)$$

因為第 $i$ 步的位置可以寫成 $l_i \equiv l((i-1)\tau)$ ;  $l_0 = 0$ 。行走者位置的差分是

$$\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\langle l_i l_j \rangle - \langle l_i \rangle \langle l_j \rangle] = N\sigma^2, \quad (6.16)$$

$$\text{其中 } \sigma^2 = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2. \quad (6.17)$$

擴散是  $t \gg \tau$  的現象，即  $N = t/\tau \rightarrow \infty$ ，所以擴散系數  $D$  和位置差分的關係是

$$\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = 2Dt, \quad D = \frac{\sigma^2}{2\tau}. \quad (6.18)$$

這結果與方程(6.12)是一致的。

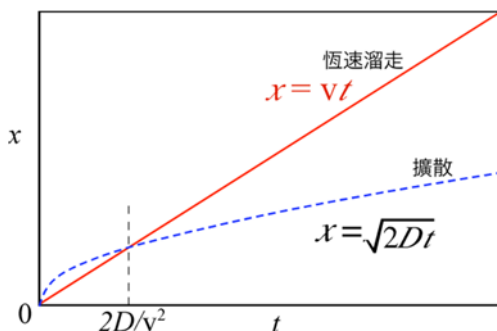


圖 6.8 擴散和恆速溜走方均根位移的比較。

短時間（ $t < 2D/v^2$ ）近距離的擴散比恆速溜走快。

圖 6.8 比較擴散與恆速溜走（ $x = vt$ ，例如對流）的移動效率。可見擴散的移動效率很低，因為  $x \sim \sqrt{t}$ <sup>70</sup>。但在很短距離的環境或  $t < 2D/v^2$ ，擴散卻比恆速溜走快。這屬性對生物轉遞或交換溶質有很大意義，如果只限於細胞之內或通過

<sup>70</sup>例如，暖化一個 20 立方米的房間單靠擴散需時約 10 小時，但對流只需約 5 分鐘。

細胞膜與貼鄰的毛細管，擴散十分有效，但如要抵達其他器官，擴散則效率太低，非依賴體內循環系統用對流（convection）的方式協助轉遞不可。另一情況是媒體的特殊構造，如由大分子交叉耦合造成的凝膠，嚴重阻止對流作用，擴散成為重要的功能。

## 擴散與分形

首先從代表理想化擴散的無規行走入手，圖6.9(a) 表示無規行走在二維空間（平面）的軌跡，如果將空間尺度放大  $k$  倍（圖中  $k = 4$ ），軌跡的無規統計性保持不變（見圖6.9(b)），因為在放大的尺度下可以看到粒子被媒體分子碰撞更微小的軌跡。同理，從方程(6.12)，即  $R(t) \propto \sqrt{2Dt}$ ，如果將時間尺度縮小  $k^2$  倍無規統計性也是一樣。所以擴散作用在時空上具有自似性，也就是屬於分形幾何，可以用分析分形的方法處理。解釋擴散動力微觀行為的數學方法有擴散方程（diffusion equation）或菲克定律（Fick's law）<sup>71</sup>和朗之萬方程<sup>72</sup>等。分析布朗運動的一維朗之萬方程來自方程(6.8)：

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = \sigma \xi(t), \quad (6.19)$$

$\varepsilon$  是摩擦力系數，無序行走的漲落力以正態分佈為代表的

---

<sup>71</sup> 解釋宏觀擴散行為的數學方法首先由德國生理學家 Adolf Eugen Fick (1829-1901)研究。他早期學習數學和物理，後來轉唸醫學。與菲克第二

定律直接關聯的是擴散方程，一維的微分方程是： $\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ ， $\phi$  是粒

子在媒體的濃度， $D$  是（宏觀）擴散系數。

<sup>72</sup> Langevin equation，由法國物理學家保羅·朗之萬（Paul Langevin, 1872-1946）於 1908 年提出。

第六章：從數學模式到跨學科研究

$\xi(t)$ ， $\sigma$  是常數。這正態分佈的平均值是0， $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ；漲落力各自獨立，沒有關聯，即如  $t \neq t'$ ， $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 0$ ，否則  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 1$ 。

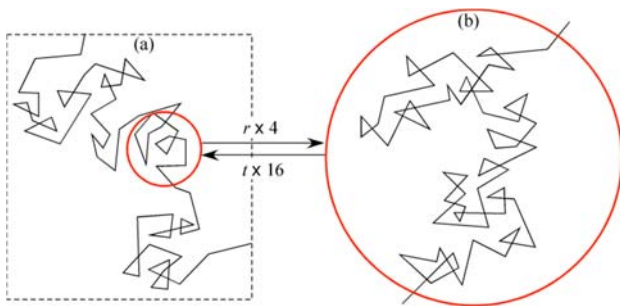


圖 6.9 無規行走運動在時空尺度變異的自似性。從 (a) 到 (b) 空間分辨率增加4倍，從 (b) 到 (a) 時間分辨率減少16倍。

我們一直用粒子浮游在媒體裡的布朗運動和無規行走來理解擴散，粒子（如花粉）比媒體分子（如水）大很多。但常見的擴散往往是兩種流體的互相溶混，如一滴墨在水裡擴散，而墨分子和水分子大小差不多。其實，這兩者都源自分子間的高頻、無定向、無序和無記憶碰撞，同出一轍。圖 6.10(a) 描述兩種液體在低溫（ $T < T_0$ ）下不能溶混，如麥芽糖在冰水中，它們的界面是平滑的（除卻各自的密度漲落）。但當溫度高過  $T_0$  時，擴散開始。它的縱切面交界的輪廓呈現分形結構，在不同時間，如圖 6.10(b) 和 (c)，界面輪廓有自似性。

從無規行走到擴散界面形成的分形幾何都是十分鬆透的結構，所以擴散的分形維數都低於系統的嵌入維數（見第3.2節）。三維擴散界面的分形維數要視乎粒子的微觀結構，如粒子

硬度或其相互作用等，一般  $d_f \approx 2.5$  至  $7/4$ 。如果將嵌入維數廣義化至  $d_e > 3$ ，理論證明  $d_f \approx d_e - 1$ 。

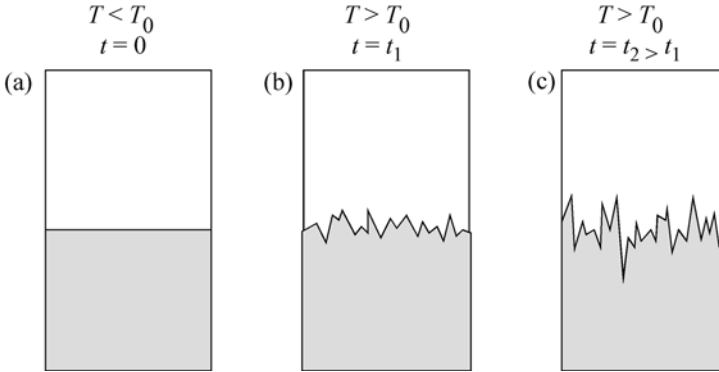


圖 6.10 兩種液體從低溫無擴散 (a) 到  $T > T_0$  擴散展開後，(b)和 (c)，界面的自似性和分形結構。

## 擴散與生長

明顯地，擴散涉及微粒在媒體空間的移動，當然與生長有關。這種生長是隨機性的，跟第1.2節的確定性生長不一樣。我們關注的名叫擴散置限聚集（diffusion-limited aggregation）<sup>73</sup>。其生長過程是從一粒種子開始，在遠處一漂游的粒子通過擴散作用以概率  $p$  的機會黏附到種子上，變成聚集體的一部份。然後再產生另一粒子，它擴散黏附到聚集體任何一粒子的概率仍然是  $p$ ，如此下去造成聚集體的生長。這生長方式的重要因素是漂游粒子的數目不多，不

<sup>73</sup> 由美國物理學家 T. A. Witten & L. M. Sander 於 1981 年提出。  
第六章：從數學模式到跨學科研究

致互相干擾造成凝聚。只要粒子間吸引的關聯函數一致，聚集體的分形維數都一樣。擴散置限聚集的分形維數一般介乎1.3-2.0 之間。圖6.11 (a) 與 (b) 所示的是從種子 ( $N=1$ ) 到  $N = 2, 10$  和  $N = 10^5$  粒子的生長過程。可見形成出樹枝形狀 (dendrite) 的結構，它本身有自似性，所以屬於分形。這樹枝形狀與自然界一些現象吻合。例如在電鍍過程中，電解液裡的金屬離子通過擴散黏附到電極，生長成如圖 6.11(c) 所示的聚集。又如將種子穩定在容器的底面 (d)，生長成有方向性的樹枝 (e)，這與絕緣介質擊穿 (dielectric breakdown) 放電 (f) 或神經細胞的樹枝狀末端相似 (g)。此外擴散置限聚集還可以應用來闡述其他的生長現象。

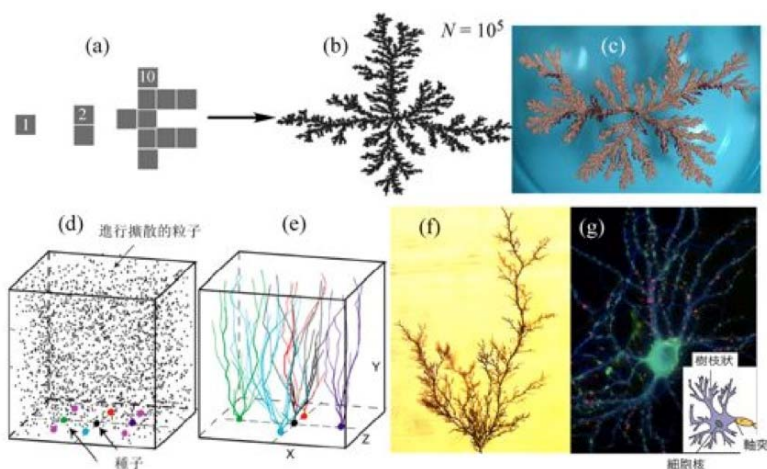


圖 6.11 用無規行走模擬擴散置限聚集，從單粒種子開始，被第二粒、第10粒黏上 (a)，直至於10,000粒子聚集成樹枝形結構，比較電解液中金屬離子通過擴散置限聚集生長成的結構 (c)。第六章：從數學模式到跨學科研究



(d, e) 方向的擴散置限生長（計算機模擬），和（實驗觀察得的）介質擊穿的放電（f）和神經細胞的樹枝狀末端（g）比較。

### 異常擴散（anomalous diffusion） – Lévy flight

以無序行走為代表的理想化擴散建立在下列三個先決條件：

1. 位移都各自獨立，每次與前者無關。
2. 每位移的概率分佈函數一致，所以運動過程保持定態性（stationary）。
3. 位移的概率分佈函數的平均值和方差是有限的，例如正態分佈。

從而，理想化擴散服從菲克定律，和無序行走的冪定律（見方程(6.12)或(6.18)）：

$$R^2(t) = \langle x^2 \rangle \propto t. \quad (6.20)$$

同時，無序行走產生分形幾何結構，不同的概率函數引致各種普適性的分形維數。

但自然界和社會常見的運動，如鳥群或魚群的移動路線、人類狩獵和採集的方式、甚至捉迷藏等，都很明顯地不服從上述條件，這統然列為異常擴散現象（其實並不異常，只是非理想化而已）。對如此異常擴散作初步了解，我們可以將上述結果廣義化，例如將方程(6.20)寫成

$$\langle x^2 \rangle \propto t^\gamma, \quad (6.21)$$

$\gamma = 1$ 則回復(6.20)。如果位移愈來愈短，甚至停止， $\gamma < 1$ ，屬於次擴散（subdiffusion）；如果位移加長，或保持同一方向， $\gamma > 1$ ，屬於超擴散（superdiffusion）。

在各種異常擴散模式中特別著名的是Lévy flight（又稱 Lévy walk或Lévy jump）<sup>74</sup>。它也是無序行走的一種（條件1），但違反條件2和3。Lévy flight 的軌跡脫離定態性，如圖6.12表示，其運動先是多次的短距離位移，接著特發性長距離跳動，隔著長距離跳動中間都經過若干次短距離位移，和軍事突襲行動類似。考慮朗之萬方程(6.19)的漲落力時，Lévy flight 採用另一分佈函數，其中包括冪定律：

$$P_{\text{Lévy}}(x, \alpha) \sim \frac{a}{|x|^{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (6.22)$$

代替無序行走的正態分佈， $\alpha$ 被成為Lévy指數。注意當 $x$ 的數值很大時這冪定律拖著一條重尾巴（見方程(6.2)），和正態分佈 $P_G(x \rightarrow \infty) = 0$ （見方程(6.1)，服從條件3）截然不同

。圖 6.12 是根據方程(6.22)以 $\alpha = 1.5$ 模擬Lévy flight 1000個位移的結果。仍然是分形結構，其分形維數和 $\alpha$ 有直接關係，與布朗運動無序行走的分形維數略有不同。如果 $\alpha = 2$ ，Lévy flight會回復到理想化擴散行為。一般而言，Lévy flight（ $\alpha < 2$ ）的擴散效率高，屬於超擴散。因此，Lévy flight模式特別受生態學重視。

---

<sup>74</sup> 由法國數學家 Paul Lévy (1886-1971)提出。  
第六章：從數學模式到跨學科研究

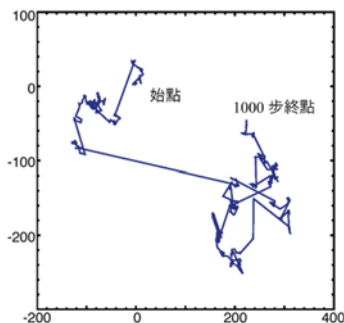


圖 6.12 Lévy flight 的典型軌跡。這與的無序行走（圖6.9）的軌跡有明顯的區別。（<https://en.wikipedia.org/wiki/File:LevyFlight.svg>）

前面第6.3節說過，世界上現象普遍呈現帶重尾巴分佈，而不是正態分佈，所以Lévy flight模式很受生態學重視，往往和植物種子轉播、動物（如信天翁、大黃蜂、鹿）的漂泊、捕食者（如蜘蛛猴、鯊魚）的突擊行為比較。我們介紹一個有趣的研究報告，由英國、澳洲、新西蘭、和美國的團隊（Sims *et al.* 2008<sup>75</sup>）用實驗方法收集海洋動物捕掠時的躍進步程，他們通過附著動物體上的電子紀錄器，從7類物種（31樣水生動物）收集超過一百萬次順時間的躍步（垂直）高度（ $x$ ）數據，分析不同高度躍步的次數（ $N$ ）分佈。發現捕掠者尋找到襲擊獵獲物的進程和Lévy flight十分相似。圖6.13描述其中之一結果。

<sup>75</sup> D. W. Sims et al. (2008), “Scaling laws of marine predator search behaviour”, *Nature* **451**, 1098.

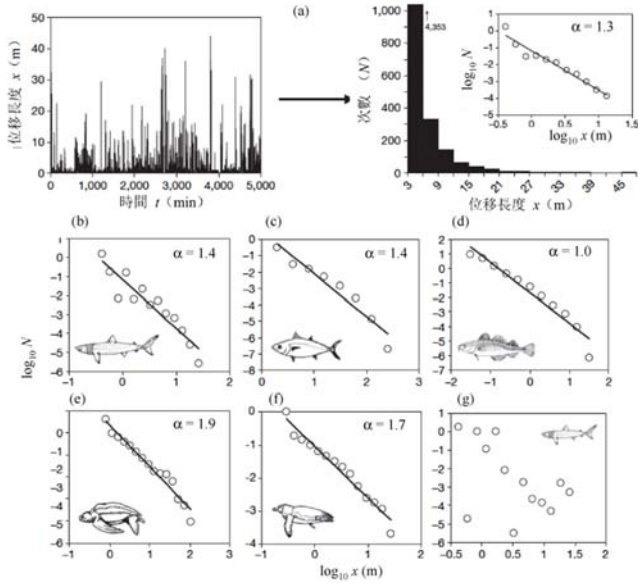


圖 6.13 海生脊椎動物躍步分佈的尺度變異定律。(a)左：從姥鯊（basking shark, *Cetorhinus maximus*）佩帶紀錄器收集的躍步數據，顯示出在三天半內運動過程間歇性的長距離躍跳。(a)右：30天以來姥鯊躍步次數（ $N$ ，共 43,200 次）相對於躍步長度（ $x$ ）的綫性圖，呈現出符合 Lévy flight 幂定律（方程(6.22)）的重尾巴分佈（見圖 6.3）。（插圖）：從 log-log plot 擬合線斜率得到的 Lévy 指數， $\alpha = 1.3$ 。其他動物的類似分析。(b) 次成年和成年姥鯊，總次數  $N = 503,447$ ；(c) 大眼金槍魚（bigeye tuna, *Thunnus obesus*） $N = 222,282$ ；(d) 大西洋鱈魚（Atlantic cod, *Gadus morhua*） $N = 94,314$ ；(e) 大海龜（leatherback turtle, *Dermochelys coriacea*） $N = 4,393$ ；(f) 麥哲倫海峽企鵝（Magellanic penguin, *Spheniscus magellanicus*） $N = 9,272$ ；(g) 2.5 米長 1 歲以下的姥鯊。詳見（Sims *et al.* 2008）

第六章：從數學模式到跨學科研究

從圖中看出，假如被捕食群體隨機性出現，捕掠者可能經過長期進化養成高效率的捕獵方法，即有超擴散性能的Lévy flight模式。反過來說，獵物們又用甚麼方法逃避捕食者呢？根據研究，獵物群也採用效率高的Lévy flight模式來逃避掠食者。這種掠食者－獵物的關係，早在二十世紀初美國數學家 and 物理化學家阿弗雷德・洛特卡（Alfred James Lotka, 1889-1949）和意大利數學家和物理學家維多・沃爾泰拉（Vito Volterra, 1860-1940）進行研究。著名的洛特卡－沃爾泰拉方程（Lotka–Volterra equation，別稱掠食者－獵物方程（predator-prey equation））是一階非綫性微分方程，也屬於邏輯斯諦方程的一種（見第1.2 節），視乎其中參數，答案存在著不穩定、分歧、甚至混沌而與現實生態環境有關的可能性。

## 擴散和反應的結合生長

生長是一個非常複雜的現象。第一章首先談及的是無控幾何級數生長，之後斐波那契的延時生長（見圖1.4）。這兩種都是不合現實的模式，接著介紹韋呂勒的邏輯斯諦方程，，加上環境資源的限制，本章又提出擴散置限聚集的生長（見圖 6.11和註65的擴散方程）。為了逐步趨近真實，數學家和理論生物學家將這些模式結合起來，例如將擴散和環境資源因素合起來，便成為費雪－柯爾莫哥洛夫方程（Fisher-Kolmogorow equation）：

$$\frac{d\phi}{dt} = D \frac{d^2\phi}{dx^2} + r\phi \left(1 - \frac{\phi}{K}\right), \quad (6.23)$$

真正的生長須要源材料，例如系統裡面或粒子本身包含某化合物叫成形成素（morphogen），可以通過擴散時互相發生化學效應而改變系統組織的成份（ $\phi$ ），這便是著名的反應－擴散方程（reaction-diffusion equation）：

$$\frac{d\phi}{dt} = D \frac{d^2\phi}{dx^2} + f(\phi, t), \quad (6.24)$$

其中代表反應的函數隨系統結構的深奧程度而定，一般都包含較複雜的參數，但可以通過計算機模擬結果。此反應－擴散方程首先由英國數學家、計算機科學家、和密碼分析家艾倫·圖靈（Alan Mathison Turing, 1912-1954）作理論研究。後來其他理論（或數學）生物學家，如英／美數學生物學家 James D. Murray (1931-) 和實驗生物學家，如日本大阪大學的 Shigeru Kondo, 繼續研究。我們在這裡只介紹一個例子，希望引起讀者進一步探討的興趣。圖6.14 是 Kondo 研究組觀察魚身體的圖紋和應用反應－擴散方程計算模擬的結果<sup>76</sup>。(a) 和 (b) 分別為神仙魚（*Pomacanthus imperator*）的條紋和鯰魚（*Plecotoms*）的斑點生長（上排）與模擬（下排）。可見生長過程中條紋的分枝和小斑點的形成然後增大都和反應－擴散方程的計算結果一致。

有些生物學家對反應－擴散方程這數學方法提出爭議。因為微分方程答案指出行波（traveling wave）的產生。意思是系

---

<sup>76</sup> S. Konda and T. Miura (2010), “Reaction-diffusion model as a Framework for understanding biological pattern formation”, *Science*, **329**, 1616-1620.

第六章：從數學模式到跨學科研究

統內每種成形成素擴散時各自形成行波，這些行波在行走中彼此通過它們的不同參數而發生反應作用，產生規律化的圖紋生長。生物學家對行波的是否存在和如何發生反應有不同的看法。從數學的角度上假設影響參數的決定性因素是：成形成素組織內（如胚胎細胞）有否認‘預設’圖案的基因，系統（動物）的邊界條件，如身體次單元形狀和當地環境，與及生長的初始條件。我們提供圖6.15 的動物毛皮圖案，基本定義：脊椎動物的身體一定比肢體和尾巴寬。讓讀者考慮這些因素造成的規律：(1) 正常情況下身體和尾巴受控於同一個反應－擴散機制，所以條紋的身體會有條紋的尾巴，如老虎，斑點身體和尾巴也如是，如成年豹；(2) 常用的邊界條件和初始條件預估斑點產生在寬的部份（身體），條紋（環節）產生於窄的部份（肢體或尾巴），如非洲鹿（okapi）；(3) 斑點身體而條紋尾巴的動物較罕見，如麝貓（genet）；(4) 如果尾巴頭部寬末端窄，多是頭部斑點尾部環節，如獵豹（cheetah）和初生豹；(5) 幾乎沒有純斑點的蛇；(6) 小動物單純顏色，如松鼠，小狗；(7) 大動物如有紋理，紋理多是很細緻，如大象和熊。話說回來，自然界無數的物種，真可能用數學方程覆蓋它們的生長形態嗎？數學家會不會像那假設圓球形牛馬的物理學家過份簡化事情呢？我們建議讀者們參考生物學家Sean B. Carroll的著作，如“Endless Forms Most Beautiful” (W.W. Norton & Co., New York), 2005. 其實，人類和蒼蠅的基因組相差不算太大，與猩猩的有98%的類同。那為甚麼人類長成人類，不像蒼蠅或猩猩呢？Carroll介紹近廿年生物研究發現基因（從單細胞到複雜器官的製造藍圖）和胚胎發育的配合發展過程，統稱為“發展生

物學與進化發展生物學（developmental biology and evolutionary developmental biology, or *Evo Devo*）”。裡面有不少以數學為主導的有關規律。

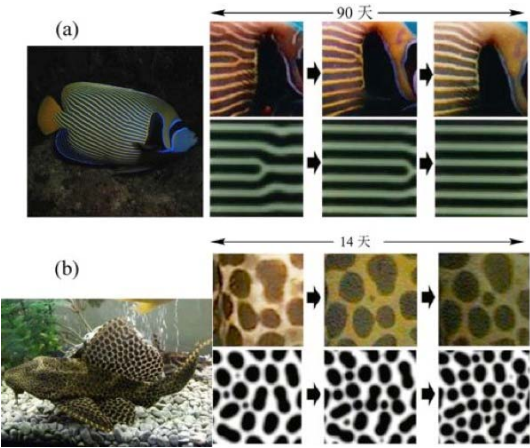


圖 6.14 神仙魚 (a) 和 魮魚 (b) 魚身圖紋生長分別在90和14天的變化。條紋會出現分枝，然後增長最後分枝消失。斑點間先出現小點，之後小點變大。這都與反應-擴散方程的計算結果一致。部份取自S. Konda and T. Miura (2010).



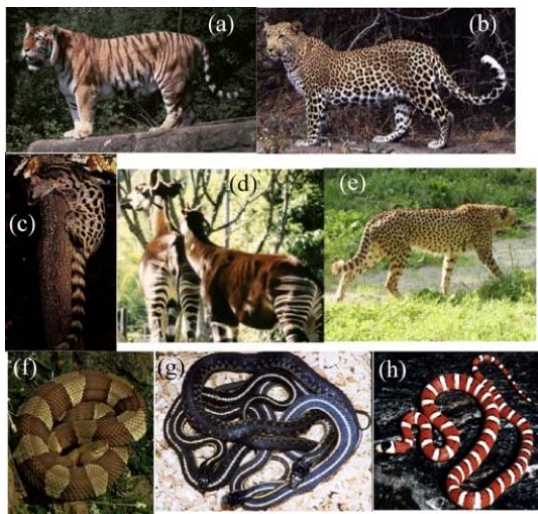


圖 6.15 反應 – 擴散方程預估脊椎動物身體條紋或斑點的圖案。  
 (a) 老虎（身體條紋，尾巴條紋，肢環節）；(b) 成年豹（身體斑點，尾巴斑點）；(c) 麝貓（斑點身體，條紋尾巴）；(d) 非洲鹿（肢體條紋）；(e) 獵豹（斑點身體，尾巴頭度斑點，末端條紋；  
 (f-h) 蛇 只 有 條 紋 ， 或 環 節 ， 沒 有 斑 點 ） 。  
 (<http://jxshix.people.wm.edu/math490-2009/>)

## 6.5 崩塌（avalanche）– 能量猛烈釋放現象

能量在非綫性過程從集中、遞升、飽和而抵達臨界，以至最終釋放時爆發般的行為，這就是崩塌。我們希望通過數學分析可以估計能量強度增長與釋放隨時間變化（功率）和崩塌的次數（頻率）。我們將看到這些變量呈現冪定律的變化，而且這些規律性的結果不限於雪崩和泥沙傾塌，還可以應用

第六章：從數學模式到跨學科研究

在動植物的漂移、太陽耀斑和宇宙綫的引發、核作用連鎖反應、人口增長、市場交易起落等。

首先，能源何來？宇宙的能源體系有多個層次，從核子天體物理（**nuclear astrophysics**）的核效應到太陽系、到地球大氣層和生物圈的各種物理、化學作用和生物的新陳代謝。。。在日常局部環境裡，能源的演化往往是綫性的，例如流進發電站的水量與發電量成正比。但在多元化的大環境，例如氣象狀態或全球經濟，外界能源輸入都是非綫性和無法預知的（見第4.6節蝴蝶效應）。所以從數學出發，我們不妨假設非綫性能量提升是根據指數函數生長，見方程(1.15)，

$$W(t) = W_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_G}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (6.25)$$

$W_0$ 是閾能， $\tau_G$ 是量度生長時間（ $t$ ）的常數，直至  $t = \tau$ ， $W(\tau) \equiv W_s$ 是飽和能量。 $W_p = W_s - W_0$  便是最高的能量釋放值。

接著的是能量飽和以至於耗散，這是屬於自我組織的臨界現象（見第5.2節）。沙堆便是一個典型例子，讓散沙不停地墜落於一個固定位置會造成沙堆，形成像圓錐狀的沙堆逐漸地穩定性的增大，圓錐的角度是34-37°不等（視乎沙粒的均勻度、顆粒度、含濕度等），直至沙堆斜度的臨界點，不穩定狀態觸發崩塌，這些崩塌的大小和發生頻率與墜沙的速度無關，即飽和時間 -  $\tau$  的數值 - 是無序的。所以我們以無序指數函數代表  $\tau$  的分佈概率：

$$N(\tau) = \frac{N_0}{t_s} \exp\left(-\frac{\tau}{t_s}\right), \quad (6.26)$$

$N_0$ 是崩塌的總次數， $t_s$ 是量度 $\tau$ 的時間常數。

從方程(6.25)和(6.26)可以計算出能量貯升和耗散的時間變化，見圖6.16。崩塌的發生次數和最高能量釋功率（ $W_p$ ）的關係是：

$$N(W_p) = \frac{N_0(\alpha_p - 1)}{W_0} \left(\frac{W_p}{W_0} + 1\right)^{-\alpha_p}, \quad (6.27)$$

其中

$$\alpha_p = \left(1 + \frac{\tau_G}{t_s}\right). \quad (6.28)$$

可見崩塌的次數相對於最高功率釋放值是取決於冪定律，其中的指數包含能量生長時間常數和飽和時間常數的比例。造成低冪指數 $\alpha_p$ 即由於生長常數小加上飽和時間長，引致功率貯值高，冪定律說明能達到多次數的大幅釋放崩塌。

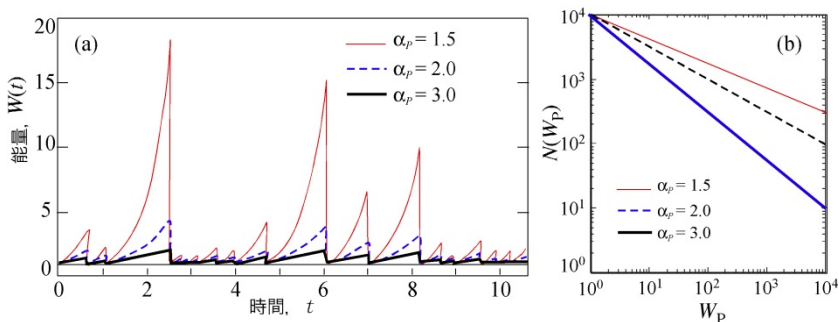


圖 6.16 能源在指數函數生長以至崩塌式的釋放，根據三個不同  $\alpha_p$  數值的演化。(a) 功率的貯升和釋放。(b) 產生崩塌的次數與功率最高釋放值的冪定律。見 (Aschwanden 2011)<sup>77</sup> (<http://www.openacademicpress.de/ojs2/index.php/socs>)

其他參數還有崩塌過程的時間 ( $T$ )，釋放能量的總值 ( $E = \int_0^T [W(t) - W_0] dt$ )。崩塌次數與  $T$  和  $E$  有類似的冪定律

。各參數的彼此關係是： $E \propto (W_p)^2$ ,  $T \propto W_p$ ,  $E \propto T^2$ 。

從上述的例子可以看出，一個十分複雜的崩塌現象，通過簡單的非綫性假設前提，如方程(6.25)和(6.26)，便找到系統自我組織的臨界流程，而最重要的是聯繫各參數的冪定律。由於冪定律的普適性，這方法和答案可以轉用於其他領域的問題。只是更換適當的參數，或用更符合問題的假設，例如用邏輯斯諦方程代替方程(6.25)或通過適合度檢測尋找合乎實驗數據的參數等等，從而預估系統的進化規律。

<sup>77</sup> Markus Aschwanden (2011), “Theoretical models of SOC systems”, in “Self-Organized Criticality Systems”, Ed. M. Aschwanden, Open Academic Press.

## 6.6 滯後 – 能量釋放的控制和利用

前面第4.4節介紹徘徊在非線性方程(4.11)兩個鞍點所出現的滯後現象，是由於系統面臨分歧時受到對局部狀態記憶（例如以前輸入的極限值）的影響而選擇的流程途徑，一般出現滯後回綫（hysteresis loop）。在現實世界中，滯後現象與能量、資源或意識的釋放有關，但與上節的崩潰時釋放不同。滯後分兩種：與加載／減載的速率（如充電或減壓的速度）有關或無關，我們只考慮後者。通過對現象的了解與數學分析，會產生對物性利用、經濟規劃，甚至思維認知的正面價值。

鐵電體（ferroelectrics）的滯後性是物理學中一個典型例子。鐵電材料能夠自發地產生和保持其原子或分子的電子極化（electronic polarization）順序，這性能已經廣泛地應用在計算機和電子儀器數據儲存上，例如鐵電隨機存取器（ferroelectric random access memory, FeRAM）。

圖6.17 是兩種鐵電體（實線和虛線）的極化 – 外加電場回綫（ $P$ - $E$  loop）。回綫和  $x$  軸的交點是矯頑電場（coercivity,  $E_C$ ），即能夠抵抗逆轉極化的最高電場；和  $y$  軸的交點是剩餘極化強度（remanence,  $P_R$ ），即在脫離外加電場後保持的極化程度。為了維持存儲資料的穩定和持久，理想FeRAM的回綫應接近長方形（淺色-□-線），保持平穩而高值的  $P_R$ 。

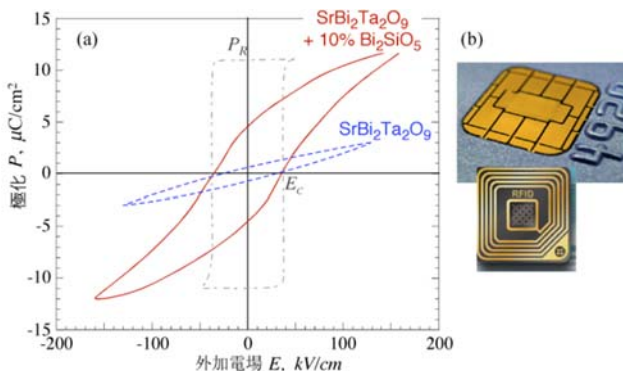


圖 6.17 (a) 兩種鐵電體（實線和虛線）的 $P$ - $E$  loop，實線代表的有較大的實用價值，因為較接近長方形（淺色— $\square$ —線）的理想回綫，詳見 (Idemoto *et al.* 2006)<sup>78</sup>。(b) 常見的鐵電隨機存取存儲器的應用硬件。

黏彈性（viscoelasticity）是混合綫性彈簧（胡克定律，見方程(1.4)）與非綫性減震器（dashpot， $F(t) = -c v(t) = -c \frac{dx(t)}{dt}$ ），應力和速度成反向正比， $c$ 是阻尼系數=damping coefficient）的實用物性。其應力（單位面積的作用力， $\sigma = F/A$ ）－應變（形變， $\varepsilon = \Delta L/L$ ）關係呈現滯後回綫。圖6.18 是四種鋪墊材料的應力－應變滯後回綫。回綫內的面積等於鋪墊從受壓、收縮以至鬆弛過程所吸收的能量，這是設計防撞安全裝置（例如頭盔）的重要因素之一。

<sup>78</sup> Y. Idemoto, T. Takahashi, N. Koura, and C.-K. Loong (2006), “Crystal structure and ferroelectric properties of Si added  $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$ ”, *Jap. J. Appl. Phys.* **45**, 5091-7.

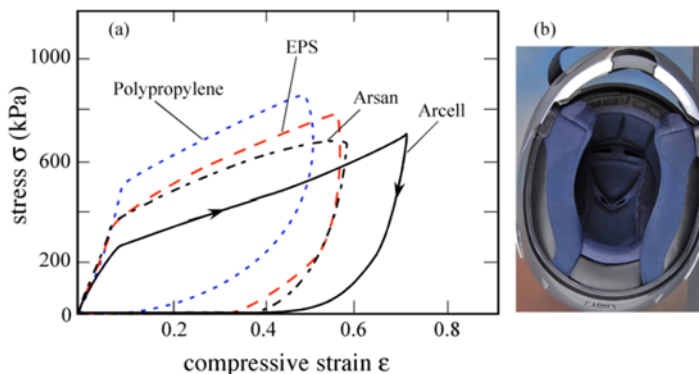


圖 6.18 (a) 四種鋪墊材料的應力 - 壓縮形變滯後回線，詳見 (Newman 2002)<sup>79</sup>。適用於防撞安全裝置，如頭盔 (b)。

有關生理學的滯後現象也不少，從細胞分裂到凋亡過程、神經細胞與周圍膠質細胞的動力反饋、眼角膜的扁平與壓力調節等等。我們呼吸時肺體積（ $V$ ）受橫膈膜和肋間肌的壓力（ $P$ ）週期改變呈現 $V-P$ 的滯後回線，見圖6.19。各樣肺病會導致對肺組織柔量、肺體積和氣道阻力不同的影響，所以這 $V-P$ 關係對診斷呼吸系統疾病十分重要。

<sup>79</sup> J. A. Newman (2002), "Biomechanics of head trauma: Head protection", in *Accidental Injury*, 2<sup>nd</sup> Ed., A. M. Nahum and J. W. Melvin (Eds.), Springer.  
第六章：從數學模式到跨學科研究

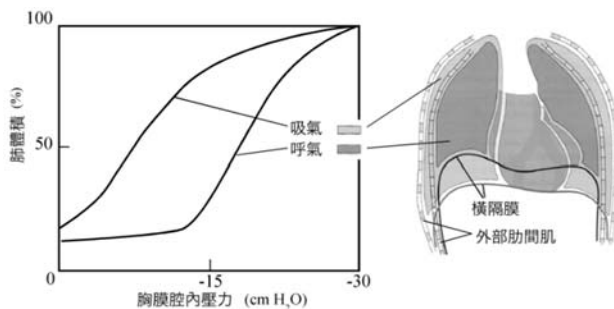


圖 6.19 呼吸週期肺的  $V-P$  滯後回綫 (a)。胸膜腔內壓力來自橫膈膜和肋間肌的張縮 (b)。

**Haken** 提出人類視覺認知也有滯後效應。圖6.20 是他舉的一個例子。沿上排左至右到下排左至右觀察圖案，一般人會在下排倒數第三個（左二）圖案產生由臉孔轉變成女像的意識，但如果沿反方向回看，女像變臉孔的認知不發生在下排左二位置，而發生在上排左三。**Haken**假設此滯後現象可以用勢函數解釋，正如圖 4.10，上述兩個過渡點分別發生於勢函數的中性點  $\pm\lambda_c$ 。滯後現象可能是由於神經細胞感應的時間尺度（ $\sim$ 毫秒）和大腦認知的時間尺度（ $\sim 0.1$ 秒）不同與及神經網絡信息傳遞結構所致。



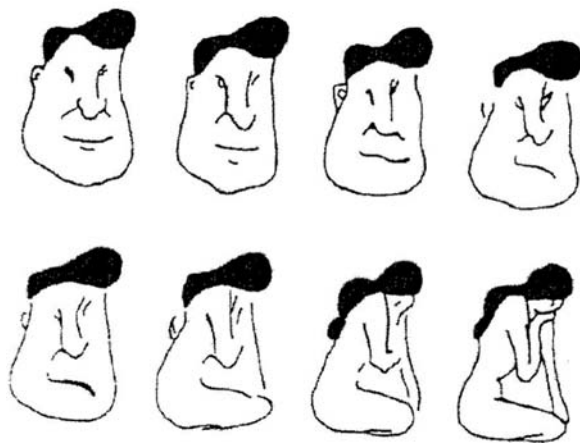


圖 6.20 Haken提出的視覺認知滯後作用的圖案。見 (Haken 2008)<sup>80</sup>  
([http://www.scholarpedia.org/article/Self-organization\\_of\\_brain\\_function](http://www.scholarpedia.org/article/Self-organization_of_brain_function))

在微觀經濟學範疇，一間公司的業務會出現生產－價格的滯後回綫。如果公司從未出產過某商品，假設商品的成本價是  $c_i$ ，當賣價開始超過  $c_i$  時，公司仍不願意投產，因為除了成本，還要投資一筆開業的沉沒成本（sunk cost） $f_i$ 。所以等到賣價達到  $c_i + f_i$  後，才開業投產，即循著圖6.21(a)的A-B-C線進行。但如果公司已在生產此商品，以前投入的  $f_i$  已得回報，雖然賣價低於  $c_i + f_i$  還繼續生產，直至賣價低於  $c_i$  後才停產，即循著C-D-A線走。宏觀經濟由所有公司業務的集成，產量和市價很可能出現類似圖6.21(b)的滯後回綫，經

<sup>80</sup> H. Haken (2008), “Self-organization of brain function”, *Scholarpedia*, **3**(4), 2555.

過時間  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ，產額會隨著價格徘徊漲落。類似的數學方法也可以應用到貨幣匯率、經濟增長－就業率走勢和國際交易等問題。

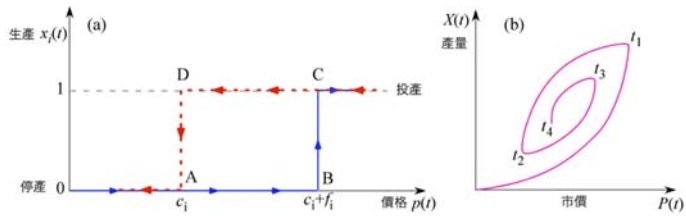


圖 6.21 (a) 公司決定投產和停產商品的生產－價格的滯後回綫。(b) 宏觀經濟可能出現的產量－市價滯後進程， $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ 。

我們介紹了滯後效應在不同領域的例子，各個系統有明顯不同的複雜結構和屬性，但它們的滯後回綫都表現類似的式樣，這意味著可以通過相關的數學模式進行分析。雖然這小冊子無法將深奧的數學模式解說，希望讀者能被這些例子引起興趣和領會到數學強大的功能。

## 6.7 網絡（network）－自然規律和人類文明的命脈？

根據物理學的標準模型（The Standard Model），宇宙形成後不夠幾分鐘，所有物理和化學作用都根據永恆不變的自然規律演化。今天我們建造巨型的機器（如在CERN的大型強子對撞機）、超快的計算機、或發展微型的納米和DNA工程技術等，通過數學方法和邏輯思維，無非是為了證明我們目前掌握的理論和假設是否符合自然現象與規律，尋求進一步的優化理論，讓我們可以系統地分析幾億年前在宇宙任何某角落發生的現象（可惜無法知道當時的初始條件！），或預測將來事物在不同程度上的演變，包括人類社會的發展。明顯地，如此複雜結構和（非綫性）動態的交錯體系，其中在時空間信息交流必須通過一個高效率的網絡。也不難相信這網絡的聯系結構必然反映出前面說過的數學模式和規律。讓我們作以下的講解。

根據愛因斯坦的相對論，有物理意義的信息轉遞不能超過（在真空裡的）光速， $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ 。而且，這限制使過去和未來的時空分隔：已逝去的不能‘回到未來’或時光不會倒流。這與熱力學定律和不可逆轉的宏觀物理反應有關，見第5.2 節。但時間的方向性不是本書的主題，我們這裡關心的是信息怎樣從一個成員（可以是計算機、動物－包括人類、細胞、基因、參考數據、城市、投注站等等）轉遞到同系統或跨系統的另一成員（避免複雜的三或以上多體問題）。馬上想到的是網絡的連接（linkage）結構，可以用一個

平面網代表，如圖6.22。每一成員屬於一結點， $x$  (node)，連接兩結點的直綫叫邊 (edge)，連接到一結點的邊的數目稱為該結點的度， $k(x)$  (degree)。專研究網絡問題的數學支流是圖論 (graph theory)。

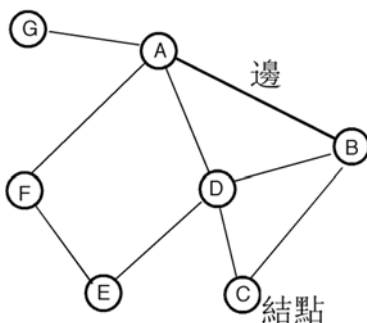


圖 6.22 一個結點群的接連例子。

講到網絡，最易領會的例子要算是社交網。在社交圈內，每人和他的朋友各是一結點，兩者朋友關係是連接這兩結點的邊。深交的謂強連接 (strong link)，淡交謂弱連接 (weak link)。交遊廣的人的結點度高，陌生者的結點度低。社交活動既複雜而非綫性，網絡交通充滿高頻、高動力性的運作。因為網絡幅度大和結點多，只適合用統計方法去量度網絡的功能和成績，由於近廿年來計算機、智能手機和互聯網的發展，大量的數據支持和鞏固這統計路徑的可行性。例如，匈牙利數學家保羅·埃爾德什 (Paul Erdős, 1913-1996) 曾提出所謂‘流言問題 (gossip problem)’：如果某成員在社交網上發放一流言，甚麼是網絡的起碼連接條件才能讓流言散播到所有成員？照統計的意義，答案是網絡邊的數目 (即度) 平均值至少要1， $\langle k(x) \rangle \geq 1$ ，即平均每成員有至少一個連接。再者，某些連接可能發生斷折，正如互聯網每刻平均有

約3%的服務器或網址失去聯接。網絡也受到外界的衝擊和干擾，信息以外有各樣的噪音，不時引起波動。那麼我們問：當今成千上萬的超巨型網絡聯繫結構和運作經驗，它們有否進化成某些普適性的結構和運作特徵？答案是有，而且有點意想不到！

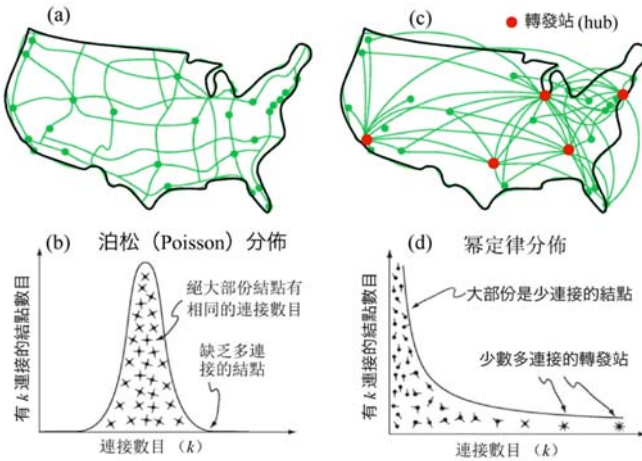


圖 6.23 隨機圖設定泊松分佈的，(a) & (b)，和冪定律式設定的，(c) & (d)，交通網。見 (Barabási 2005)<sup>81</sup> ([http://21st.century.phil-inst.hu/eng\\_volumes.htm](http://21st.century.phil-inst.hu/eng_volumes.htm))

首先再來一個比喻，假設我們要設計一個聯繫美國城市的交通網，有人會提議類似高速公路網的聯繫，如圖6.23 (a)。可

<sup>81</sup> A.-L. Barabási (2005), “Science of network from society to the Web”, in A Sense of Place: The Global and the Local in Mobile Communication, K. Nyiri (Ed.), p.415.

行的方法之一是Erdős–Rényi model<sup>82</sup>，或稱隨機圖（random graph）。假設有 $N$ 個城市（結點），邊的設立是無序地和獨立地根據某既定不變的概率， $p$ ，來連接兩點，結果是一系列的隨機圖，以分佈函數 $G(N, p)$ 代表，其中一個可能類似圖6.23 (a)。我們特別感興趣的是隨機圖的度分佈， $X(k)$ ，即有 $k$ 個連接的結點的相對數目。數學計算告訴我們 $X(k)$ 應該合乎泊松分佈，見註58。泊松分佈有像正態分佈的鐘形輪廓，但沒有理想鐘形的左右對稱，右邊（高 $k$ 值）的尾巴根據指數函數衰降，沒有重尾巴。它的 $k$ 平均值與連接概率成正比， $\langle k \rangle \propto p$ ，差分 $\propto \sqrt{p}$ 。換言之，連接每城市公路的數目基本相同，網絡的聯繫尺度取決於概率 $p$ 。

可是，隨機圖模式不是符合在現實世界的網絡結構。真實的答案是與航空網相似，見圖6.23 (c)。它的度分佈服從我們一再提起的冪定律：

$$X(k) \propto k^{-\gamma}, \quad (6.29)$$

$\gamma$  是冪定律指數<sup>83</sup>。圖6.23 (d)表示大部份的結點只有少個連接。因為冪定律有一條重尾巴，網絡有很少量的結點具有特多的連接，這名叫轉發站（hub）。

為甚麼隨機圖不符合實際？原因很多，一是隨機圖假設統一性的概率 $p$ 用於所有結點，忽略局部環境存在的差異（例如某城市可能獨備作轉發站的天時地利條件），二是假設加減

---

<sup>82</sup> 由保羅·埃爾德什和另一匈牙利數學家 Alfréd Rényi (1921-1970)於1959年提出。

<sup>83</sup> 冪定律指數 $\gamma$ 一般介乎1至4之間。

任何兩結點的接連都與其它接連獨立，這往往和群體交際意向並不一致。假如圖6.22中剛加了連接AB的邊，可能會引致下一步是GC的連接，因為GC分別是AB的接鄰，會因AB加邊而受到影響，還可能有更迂迴的連鎖效應<sup>84</sup>。總之，隨機圖沒有顧及網絡的複雜動態反應和結點個別的特性。果然事實證明，有幂定律表徵的網絡能夠達到較高的操作效率和穩定性。例如由於轉發站的密集連接，這些網絡能夠連接的結點比隨機圖高出兩倍以上<sup>85</sup>。在一系列的優點裡面，其中有两个特色值得一提。

1 ‘這個世界小小小’（small-worldness）：現今社會網絡發達和效率高，世界仿佛變得小了很多！其實，不只是今天。1967年美國社會心理學家斯坦利·米爾格拉姆（Stanley Milgram, 1933-1984）進行一個‘小世界’實驗，他要求在Omaha, Nebraska 隨機選出的160人各自將一郵件轉遞到波斯頓地址的人，但發信者只能交給一個以名字（first name）相稱的熟朋友，然後一個接一個同樣地轉送，直至成功地抵達目的者。他發現結果只需要經過平均6次轉遞。之後人們重覆這實驗無數次，結果保持一致。

2 弱連接不甘示弱：前面說弱連接用於不大相熟的朋友。廣義的弱連接是指那些連接如被加進網絡或從網絡抽走都不致影響網絡的統計屬性。現在證實，擁有大量弱連接的網絡

---

<sup>84</sup> 為了補救過分強調結交的獨立性，數學家設計所謂‘偏向附屬’（preferential attachment）機制，以輔助網絡的伸延。

<sup>85</sup> 其中 Almaas & Barabási (2006) 研究的一個方案是 60:27 的比例。  
第六章：從數學模式到跨學科研究

有很多好處。它們幫助貫通網絡的長程轉遞，促進噪音的擴散和吸收，過濾錯誤，從而增加網絡的穩定性。Péter Csermely 專為弱連接寫了一本書，趣味性和可讀性很高，值得推薦<sup>86</sup>

在自然界和現實世界呈現冪定律的網絡何止上述交通網的例子。此現象廣泛地遍佈原子／分子網絡（如蛋白－蛋白作用網、基因功能網），生態網絡（如食物網、微生物代謝網），社會網絡（電郵、電話、異性接觸、學術交流網等），資信網絡（WWW, Web of Science），科技網絡（數碼電子線路、互聯網、電力網等）和其它網絡。當然，在生態圈和社會環境裡，這些網絡都不是獨立的，而是在它們各自的約束下聯成十分複雜的網絡體系。Almaas & Barabási (2006) 提出一個根據生物級系合成而又依照冪定律進行的聯網<sup>87</sup>。這個研究方向仍待進一步的開展。

---

<sup>86</sup> Péter Csermely (2009), “Weak Links – The Universal key to the stability of networks and complex systems”, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg).

<sup>87</sup> Eivind Almaas and Albert-László Barabási (2006), “Power laws in biological networks”, in Power Laws, Scale-Free Networks and Genome Biology, Ed. E. V. Koonin, Y. I. Wolf, and G. P. Karev (Eurekah.com and Springer)



## 6.8 小結

本章內容可說是前面各章的結晶。之前從介紹幾個基礎的函數開始，帶到其扮演於非綫性動力學和分形幾何架構的角色，導出重要的自我組織臨界現象，并通過協同學理論強調其中的普適性規律，例如屢見不鮮的冪定律行為。看了本章之後，讀者應該領會到這套數學工具，居然能夠用於配合分析自然界和社會種種複雜的系統行為，包括物性變相、擴散式的生長和結合對環境的反應、崩潰和滯後現象、以至網絡的運作，跨越物理、化學、生物、生態、經濟、心理學、信息技術等領域。在這裡面，網絡的結構和功能又是整套數學概念協同運作的縮影。網絡的主要任務是將信息真確地、穩定地和迅速地收集、轉遞或存放。它的拓撲結構－結點的連接形式和佈局－會反映系統等級層次的自似性，適合分形幾何表徵。網絡正常運作狀態是趨向平衡，波動幅度低，好讓信息蔓延，屬於擴散行為。可是，網絡不斷受本身的噪音和外來的擾動衝擊，這些噪音不全是壞分子，在適當情況下可能引起隨機共振（stochastic resonance），將平時難以意識的弱信號放大到可測領域，這是擴散和反應的結合。從吸收外界刺探至基於記憶性地釋放能量會引起信息滯後現象。倘若外界影響或內部動力漲落強化至能量不及通過局部的波動方式耗散，網絡會發生崩潰，或者驅使系統遠離平衡以致自我組織下的臨界點，網絡產生拓撲相變（topological phase transition）。這都是我們日常生活（極端情況例如股市風暴、交通癱瘓等）目睹過的現象，估不到和短短幾章的數學原理有如此密切的關係吧！

可是，至今最基本的問題還未嘗試解答：事物這麼多變，環境這麼複雜，為甚麼無數的不同系統會呈現性質相同的冪定律特徵呢？我們引用Csermely在他的書裡解釋網絡的普適性冪定律行為來回答。網絡（可延伸到生命、社會）的安寧和高效運作需要資源，倘若資源是無限的，理論上可以將全部成員連接成晶格式網絡，而且全是強連接，以求網絡穩定和長短距離交流暢通。但這是不可能的。支持網絡（或生命、社會、星系如太陽系、甚至宇宙）的資源是有限的，而且系統的結構要符合自然規律（例如晶格式強連接的社會不符合人性）。所以，冪定律體制是在資源有限的環境下而協調自然和成員屬性演化出來的規律表徵，呈現普適性。但這表徵不是永恆的。Csermely用細胞網和動物網做比喻。網絡可以從隨機圖進化為冪定律式。如果在極高的壓力下，網絡會將能源集中到一小撮的結點，僅支持偏向的功能和職務－例如細胞只顧維持三磷酸腺苷（ATP, adenosine triphosphate）的供求能量；社會從眾言堂變成一言堂。Csermely稱之為明星相（star phase）。最後網絡支離瓦解，細胞死，社會崩潰。

## 第七章：微觀尺度的實驗測量

我們一直談的是自然界、生態圈或社會裡的複雜系統，描述的不是某一或某小撮成員的個別行為，而是集體的、貫徹全幅時空尺度的結構和動力現象。數學方法主要針對非綫性行為作統計性的分析，所以理論上能概括整個變異尺度的規律－如特別值得重視的冪定律，通過規律的普適性和特徵參數，可以洞識（甚至預估）系統的尺度變異行為，還可以與其它系統或現象作定量性的比較。但是，世界上沒有真正放諸全尺度－從天文到亞原子空間或從宇宙年紀到核分裂時間單位－而皆準的物性和現象。一尺之棰，日取其半，但至剩下一個‘棰分子’的時候，再取其半便不再是棰了；彎曲的海岸線，不可能無限制地放大或縮小仍會保持自似性的彎曲，分形幾何的概念總會在一定尺度範圍外失去意義。因此，在進行數學分析之前，首先要制定科學假設和收取精確的客觀數據。在財經、公眾安全、教育、勞工等宏觀問題，資料多來自國際、國家、和地區級的專門機構或統計局的數據庫。但在微觀的世界裡，時空的尺度往往是在納（nano＝毫微＝十億份之一）米或秒的值域。測量這樣的微觀物性須利用特別的裝置和儀器，本章淺談觀測納級尺度的實驗方法。

## 7.1 光子和中子探針

為了分辨亞原子的空間（ $\sim 10^{-10}\text{m}$ ）和時間（ $\sim 10^{-12}\text{s}$ ）尺度，可利用的探針只限於有相對同等尺度的粒子，其中最有效的莫如電子、X 射綫（屬於光子，電磁波的一種）和慢中子。電子顯微鏡能夠觀察原子，但只限於靜態和樣本的表面，而且錄得的原子數目有限，不宜作統計性的分析。X射綫和中子也可以用來照相，但要測量微觀系統由原子和分子組成的結構與及動力行為 – 包括非綫性性能，散射的方法較為有效。原理也不複雜，如圖7.1所示，讓X 射綫或中子束引射到樣本，光子或中子 – 這裡統稱為量子（quantum, 複數 quanta） – 和樣本的原子、分子或核子發生碰撞，量子被折射，並可能與樣本交換能量（但不會破壞化學鍵），折射後的量子由探測器錄取。通過數學和物理分析收集量子的方向（散射角）和能量變化，我們可以重建出一個樣本的微觀原子／分子合成的靜態或動態結構模式，這就是X 射綫或中子散射（x-ray scattering or neutron scattering）方法。實驗可以在樣本接受外加溫度、壓力、電磁場等情況下進行，所以能夠測量物體於熱力平衡或非平衡、綫性或非綫性的統計性結構（如原子／分子排列序態、電磁化）與及動力感應（如高頻振動、擴散、相變）等行為。由於樣本系統越來越複雜，對光源或中子源的通量、譜儀的分辨率、探測器的靈敏度和效率，還有數據分析方法等要求也越來越高（見圖7.1）。前面第4.8節提及的關聯函數和功率譜，最適宜應用散射譜儀進行測試。第7.3節將介紹先進X射綫和中子散射設施的發展。

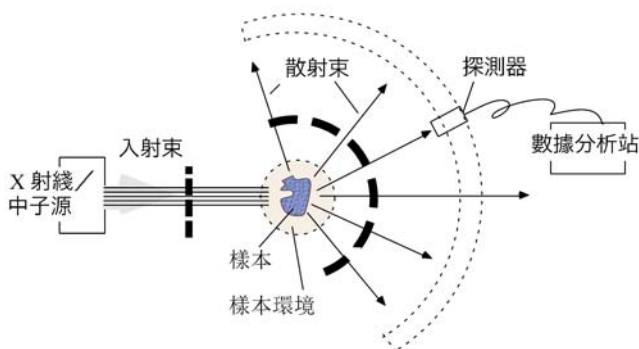


圖 7.1 X射綫和中子散射方法示意圖。入射量子（X射綫或中子）束從源引射到樣本，被散射後由探測器收錄。通過分析量子從入射前到散射後的屬性改變，科學家可以重建樣本微觀原子／分子合成的靜態或動態結構模式。為了分辨量子屬性，包括飛行時間（中子）、能量、電磁極化等，要嵌入各種裝置，用粗虛線代表。為了高效率地收集數據，探測器發展成各種大型、像素化和專長化的儀器系統，數據處理和分析也需要先進的硬件和軟件。世界級X射綫和中子源的散射譜儀規模頗大，體積從一個大房間到一棟兩或三層的屋子不等。

## 7.2 納米構造淨化汽車排放的催化劑 – 從凝膠到分形到晶體的測定

汽車內燃機排放有害氣體主要有三種：一氧化碳（carbon monoxide, CO）、氮氧化物（nitrogen oxide, NO<sub>x</sub>）和碳氫化合物（hydrocarbon, HC）。從1981年開始汽車採用三元催化結語

轉換器（three-way catalytic converter），將這三種污染氣體轉成氮、水和二氧化碳。見圖7.2。二氧化碳雖然無毒，但屬於溫室氣體（greenhouse gas），大量排放會影響全球氣候。再者，要發揮三元催化轉換器的最高功能，輸入內燃機的空氣和汽油比例必定要限制在很窄的數值區，但現代先進的節能‘綠色’引擎（green engine）可用較高得空氣－燃油比例，所以繼續優化轉換器的催化劑是重要的研究項目。

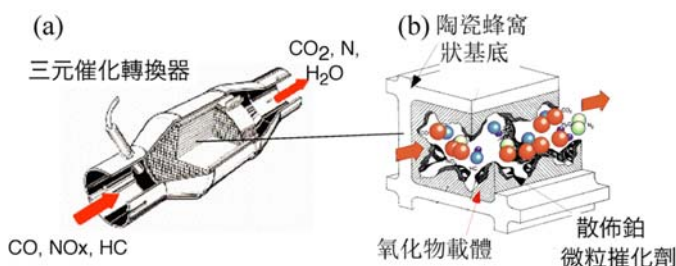


圖 7.2 (a) 三元催化轉換器；(b) 催化劑（鉑微粒）和載體（多孔氧化鋯）

轉換器的催化劑本身是貴金屬－如鉑、銨等<sup>88</sup>微粒，要散佈在催化劑載體（catalyst support）上，載體是氧化物，常用的是氧化鋯（zirconia,  $\text{ZrO}_2$ ）或氧化鋁（alumina,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ）粉末合成的固體，但粉末的微粒務求細小，形成載體充滿小孔，以致每單位重量的表面積非常高，意味著納米結構（nanostructure）。這樣污染氣體分子通過轉換器時，有足夠機會產生淨化的化學作用。內燃機排放的氣體很熱，達

---

<sup>88</sup> 研究可以取替貴金屬（例如用鐵或銅）的催化劑是個重要項目。  
結語

800°C，一般多孔的氧化物在高溫下會產生燒結作用（sintering），粉末粒子變大，表面積減小，催化效率下降。因此，化學家希望採用納米方法合成表面積既高而又耐熱能抗拒燒結的催化劑載體。最好可以在每合成步驟監視中間物以致最後產品和它受熱過程的變化。

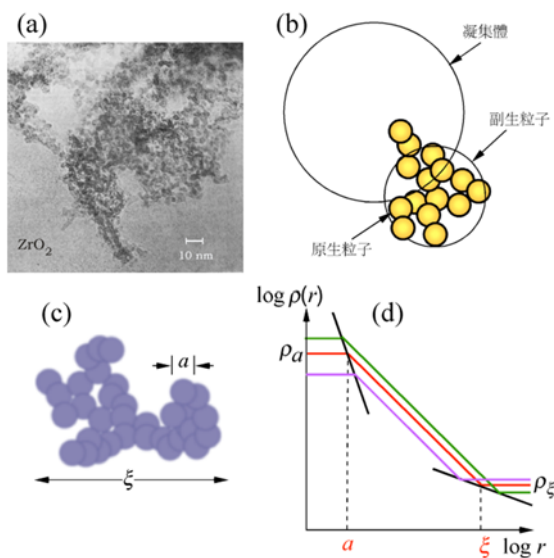


圖 7.3 (a) 低溫溶膠－凝膠方法合成多孔氧化鋯粉末的電子顯微鏡圖像。(b) 假設粉末的微結構。(c) & (d) 介乎原生粒子直徑  $a$  和關聯長度  $\xi$  之間，粉末呈現質量分形幾何結構。分形維數是  $d_f$ 。

化學家 Masakuni Ozawa 利用低溫溶膠－凝膠方法（sol-gel method）合成多孔氧化鋯粉末，圖 7.3 (a) 是電子顯微鏡錄得結語

此粉末的圖像，粉末十分鬆透（多孔，表面積大），有無數球形、次納米大小的微粒聚集一起，但每一微粒都由很多更小的粒子合聚而成（圖像分辨不清楚），而且這些球形微粒也互相聚集成更大的凝集。這意味一個納米尺度的分形結構，最適於用中子散射方法測証。首先我們作出一個假設：在溶膠－凝膠過程的化學基礎上，最先沈澱出來的氧化鋇粒子－稱為原生粒子（primary particle），體積小而密度高，因為結合力主要是原子間的化學鍵，我們以直徑 $a$ 的圓球代表，其密度是 $\rho_a$ 。原生粒子互相由較弱的力－如范德瓦爾斯力（van der Waals force）－吸引，造成副生粒子（secondary particle）。這些副生粒子再相互聚成較大的凝集體（agglomerate）。在粉末裡選擇任何一點為原點，當 $r > a$ 時，局域密度 $\rho(r)$ 會從高值的 $\rho_a$ 隨著 $r$ 的增加而減少，見圖7.3 (d)，這是因為副生粒子和凝集體充滿小孔和空隙。但 $\rho(r)$ 當然不能無限的下降，當 $r = \xi$ ， $\xi$ 是一個空間關聯長度（correlation length），見圖 7.3 (c)， $\rho(r)$ 會等於粉末的宏觀平均密度 $\rho_\xi$ ，見圖 7.3 (d)。溶膠－凝膠過程不可能沈澱出完全一樣大小的原生粒子，圖7.3 (d)舉出三個 $a$ 值，和它們相應的局域密度隨 $r$ 的增加變化，如圖所示的log-log plot，三條密度直線有相同的斜度，這就是質量分形（mass fractal）的結構，分形維數是 $d_f$ 。



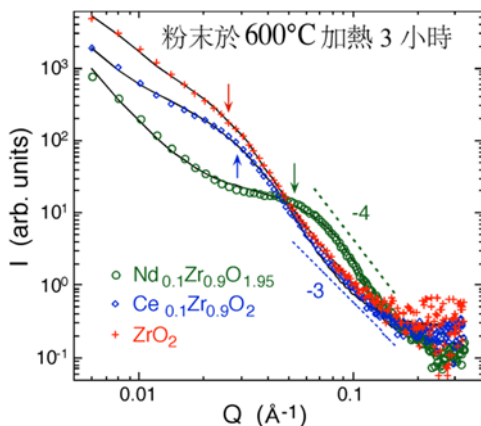


圖 7.4 小角中子散射測量三種氧化鋯粉末微結構的實驗結果。見 (Loong et al. 1997)<sup>89</sup>

測驗以上的假設的實驗方法是小角中子散射（small-angle neutron scattering, SANS），目的是測量  $a$  和關聯長度  $\xi$  的平均值。值得注意的是以分形幾何解釋粉末的微觀納米結構只適用於  $a < r < \xi$  區內。同時我們希望估計原生粒子大小尺寸的分佈、分形維數值、孔的平均體積及其分佈。圖7.4 是 SANS測驗三種氧化鋯粉末（純ZrO<sub>2</sub> 和ZrO<sub>2</sub>混入10% Nd 和 Ce）的實驗數據。是收錄散射中子信號強度( $I$ )與波矢（wave vector,  $Q$ ）的 log-log plot。實線是假設的分形結構的最佳擬合，可見擬合十分滿意。箭頭指是實線出現肩峰的位置，反映原生粒子的平均尺寸，可見SANS對粉末粒度十分

<sup>89</sup> C.-K. Loong, P. Thiyagarajan, J. W. Richardson, Jr., M. Ozawa, and S. Suzuki (1997), "Microstructural evolution of zirconia nanoparticles caused by rare-earth modification and heat treatment", *J. Catalysis*, **171**, 498-505.  
結語

敏感。虛線代表參考斜率（冪指數）。

表7.1 三種氧化鋯粉末的微結構經小角中子散射測量結果。

|                      | Nd: ZrO <sub>2</sub> | Ce: ZrO <sub>2</sub> | ZrO <sub>2</sub> |
|----------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| <i>a</i> (nm)        | 6.56 ± 1.17          | 20.6 ± 1.44          | 22.8 ± 1.49      |
| <i>ξ</i> (nm)        | 575 ± 15             | 500 ± 20             | < 20（非分形）        |
| <i>d<sub>f</sub></i> | 2.97 ± 0.02          | 2.92 ± 0.02          |                  |
| 孔平均體積<br>(ml/g)      | 0.163                | 0.130                | 2.51             |

實驗證明，見表7.1，低溫溶膠－凝膠方法成功地合成氧化鋯的納米分形微結構。但經600°C加熱後，只有混進稀土（Ce或Nd）的氧化鋯能抵抗燒結作用，保持分形結構小孔和高表面積屬性。所以稀土滲入的氧化鋯是較優勝的催化劑載體。

以上僅是檢測催化劑載體粉末合成微結構和抵抗燒結性能的一個例子。散射實驗方法還可以追蹤原生粒子的前體在溶膠－凝膠的合成過程、氣體分子通過催化系統的擴散、和化合物－載體－催化劑的化學作用等。

### 7.3 X 射綫源

上一節介紹的是中子散射實驗，X射綫散射也有類似的特長。其實這兩探針是互補的，由於X射綫源的通量高，比中子實驗所需的樣本量（摩爾，mole）少很多，數據收集需時短。但中子穿透力強和對輕元素較敏感（尤其是氫、氧等生物學重要元素）。為了深入研究複雜系統的各個屬性，合併X射綫和中子實驗的需求越來越多。設立接鄰的X射綫和中子源，以方便用戶充份同時利用這兩探針的優點，是目前先進科研中心的發展趨向。

以下我們要簡單講述的X射綫和中子源，是現代發達國家和地區重視的高通量、多用途、為學術界和工業界不同領域用戶服務的研究中心。由於這些源的廣泛應用層面，特別雖要納進特設的數學方法（包括大型計算機模擬）幫助處理和分析數據（用戶們不是數學家）。我們只談中國大陸有代表性而正在開展的設施，它們將帶給應用數學界難得的機遇。

大型X射綫源有上海同步輻射光源（Shanghai Synchrotron Radiation Facility, SSRF）<sup>90</sup>，北京同步輻射裝置（Beijing Synchrotron Radiation Facility, BSRF）<sup>91</sup>和合肥的中國科學技術大學國家同步輻射實驗室（National Synchrotron Radiation Laboratory）<sup>92</sup>。同步輻射是電子在迴旋加速器的作用下循著曲線（如圓形軌道）運動至接近光速時產生沿著切線方向射出的X射綫，從60年代到今發展迅速，已進入第四代光源時代，以自由電子激光（free-electron laser）為最新研究項目。

---

<sup>90</sup> <http://ssrf.sinap.ac.cn/index.htm>

<sup>91</sup> <http://www.ihep.cas.cn/dkxzz/bsrf/>

<sup>92</sup> <http://www.nsrl.ustc.edu.cn/>

但這裡我們介紹的是清華大學的湯姆遜散射X射綫源（The Tsinghua Thomson-scattering X-ray Source, TTX源）。這機器不像同步輻射源那麼大規模和高成本，但技術相當先進，有高度推動科研實驗裝置的潛力。XXT可算是目前世界上有代表性的幾個帶頭設施之一。

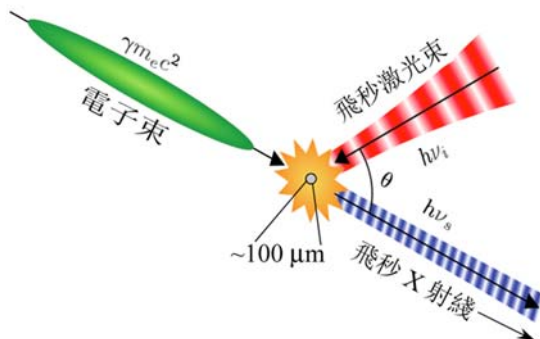


圖 7.5 非綫性湯姆遜散射產生X射綫原理。

圖7.5是湯姆遜散射X射綫源原理的示意圖。湯姆遜散射是電子受激光場影響發生振動而產生的輻射，但能夠產生X射綫是依賴非綫性湯姆遜散射。第一，電子束要相對論性（relativistic，即電子速度接近光速）和強亮度（brilliance，即在每單位時間、注入方向、束截面積、和頻帶寬度的量子數目）；第二，激光要超高功率，為此，將激光束的脈衝弄到極短的飛秒（femtosecond，毫微微秒＝千萬億份之一秒）尺度，這樣峰強度極高，激光功率達太瓦＝兆瓦（terawatt, TW）級；第三，電子束和激光束的碰撞要在時空間同步。這樣產生的X射綫超快、高能而單準、方向性強、極化度高、和結語

調控能力強。試想，在一飛秒這樣極短的時間尺度發生的化學反應，從未有過試探測量的機會，XXT或FEL可能很快會帶給人們這個特破。圖7.6 (a) 表示TTX的佈局設計，(b) 是目前已成功調試的裝置。

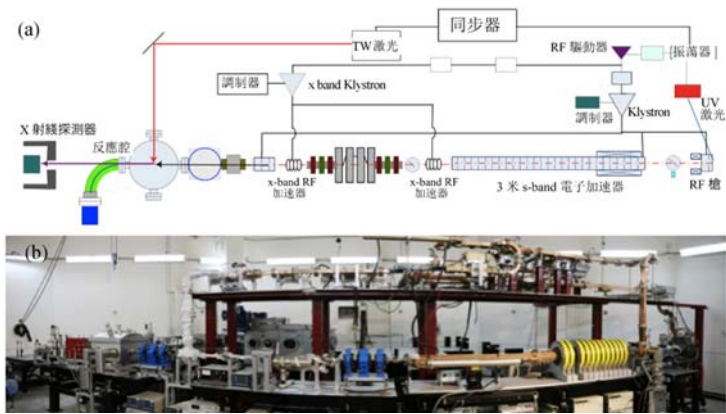


圖 7.6 清華大學的湯姆遜散射X射綫（TTX）源。(a) 佈局設計圖。  
(b) 目前已開始進行調試的前端裝置，激光和無線電波（RF）  
電源等設備位於圖片後面的操控室。

## 7.4 中子源

中子和質子統稱為核子（nucleon），正常情況下被約束於原子核內。如果要將中子釋放出來，必須直接或間接地施加足夠的功能到適當的原子核—‘靶’，通過核反應而產生中子。證明可行的核技術有兩種：裂變（fission）和散裂（

spallation)。

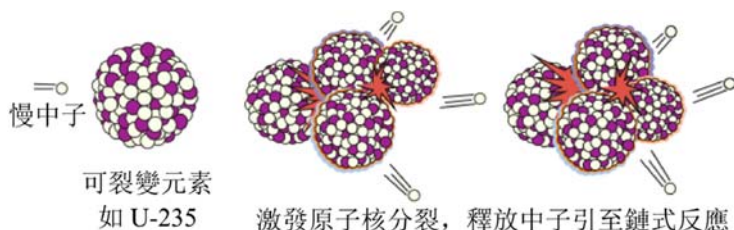


圖 7.7 核裂變原理示意圖。

圖7.7 描述裂變的原理，需要可裂變元素或同位素。核裂變屬於放熱反應，每一裂變事件釋放約200百萬電子伏（MeV）的熱量和淨產約1中子，於是通過鏈式反應產生更多中子。應用裂變的中子源是核反應堆，以可裂變元素為核燃料，大部份的反應堆都是穩恆態源。安全地耗散熱能是核反應堆（研究用或發電用）最關鍵的技術工程環節之一，也是反應堆功率（中子通量）的上限因素。中國很早發展核工程技術，在50年代已有供研究用（以中子散射為主）的反應堆。可惜隨後科研遇上波折，直至20世紀末中國原子能科學研究院在北京興建高通量的中國先進研究反應堆（China Advanced Research Reactor, CARR）<sup>93</sup>，於2010年成功臨界。將以60 百萬瓦特（60MW）功率與及冷中子源，供應反應堆內的和導管實驗大廳的一系列散射譜儀。投入正常運作後，CARR將是世界級的中子散射設施。圖7.8 展示CARR的外觀 (a) 和堆內熱中子實驗大廳 (b)。

<sup>93</sup> <http://www.ciae.ac.cn/eng/carr/>  
結語



圖 7.8 中國先進研究反應堆（CARR）外貌 (a) 和熱中子實驗大廳 (b)。

散裂屬於吸熱反應，需要高動能（超過散裂閾值  $\sim 100 \text{ MeV}$ ，一般是  $\text{GeV}=1000\text{MeV}$  量級）質子注射在重金屬的靶上（例如鉭，tantalum），每一裂變事件釋放約20中子（視乎入射質子能量和靶的材料）。質子打靶引至散熱問題是散裂源的重要技術環節。圖 7.9 描述散裂原理。

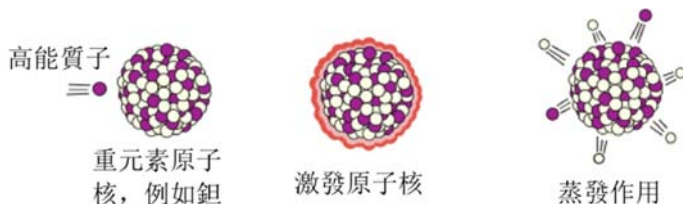


圖 7.9 散裂原理示意圖。

隨著粒子加速器的發展，散裂中子源（和 X 射綫光源）是 80 年代的新興工程技術，由於釋放熱能比裂變的低（每中子約 30MeV），在技術上散裂中子源還有發展空間。大部份散裂源都是脈衝源，可直接利用中子束的時間結構（一般是每秒 20-60 個中子脈衝，脈衝的寬度微妙到毫秒）測量中子的飛行速度，（有了速度， $\vec{v}$ ，便求得動量， $m_n \vec{v}$ ，和能量， $m_n v^2/2$ ； $m_n$  是中子質量）。經過 10 年的籌備和設計，由中國科學院高能物理研究所領導，於 2011 年 9 月在廣東省東莞市正式興建中國散裂中子源（China Spallation Neutron Source, CSNS）<sup>94</sup>。圖 7.10 是 CSNS 目前（2015 年 12 月）建址工地的施工情況照片。第一期計劃將於 2018 年 3 月建成并開始運作，邁進世界級中子源行列。從圖中可見質子直線加速器(1)和同步環形加速器(2)之間，與及靶站實驗大廳附近（虛線圈出部份）的預留空地，供日後第二期的升級擴建。

<sup>94</sup> <http://csns.ihep.ac.cn/index-cn.htm>





圖 7.10 中國散裂中子源（CSNS）工地的進展照片（2015 年 12 月）。1 質子直線加速器（地下），2 同步加速器，3 設備裝置樓叢，4 靶站和散射大廳，5 辦公和實驗樓，6 用戶樓。

CARR 和 CSNS 均是為全國學術界和工業界服務的實驗平台，提供大學及科研機構在材料科學、生命科學、地球科學和交叉科學所需的資料證據，至於處理和分析數據的數學方法，更是所有用戶必須參與的過程。再者，前面說過自然現象、物性和生物行為，往往依循普適性的跨領域規律，這更是數學家耳熟能詳的觀察方式，所以不難想像數學界對散射技術研究、知識推廣和工業應用發展的漫長貢獻。

## 結語

從封面到每一重要章節我們都提起時空的尺度，結語也不例外。人類和其他動物最關鍵的分別，就是人類有察覺宇宙在時空間變化的能力，儘管我們一生可以觸及的只是蒼穹歲月的極小部份。從生理的感知到對自然現象和人類文明的了解，我們須要接受有系統性的語言和循著有條理的演繹方法去揣測、驗證和歸納，這就是數學和數學思維。

在短短的七章裡，可以介紹的語言工具和演繹手段十分有限。但對整體概念、方法輪廓、和結論分析都通過跨領域的例子闡釋，希望讀者們能意識到揣測、驗證和歸納－即數學思維－的意義。這書的主要對象是中學生，我們不預期你們日後都成為數學家（當然做數學家是很值得和有意義的專業）。但無論你從事那一行業，總逃避不了時代潮流的衝擊和環境事物的影響，至於個人生活或人際關係也離不開物質、生理、和感情上的抉擇。能夠用數學思維分析處理事物是充實和強化自己最有利的途徑。而且此途徑最適宜從早實踐，正如語言一樣，應該從小訓練，越用越精。

我們強調用數學思維看事物在時空尺度的變化，這不是偶然的，社會裡充滿反面的例子。例如將大部份入息用來博奕的賭徒，購買中獎律比受雷轟倒機會還少的彩票；或者將生活質素和個人安全與銀行儲蓄數字看齊的老人，他們的想法都不合乎理智的數學思維。更極端情況如拋家棄業、顛沛流離的窮漢；或者是在戰亂中被長期圍困在絕望邊緣的難民，從他們的行為可以看出對生活的時空已經失去正常的意義。至

於普羅大眾，由於每人不同的處境，參差的行為，也反映人們不同程度地對事物變化在時空尺度的認知和通過數學思維判斷的結果。這恰恰地就是數學語言在我們週圍非綫性、非平衡狀況產生的微妙之處，還記得初始條件（第四章）和邊界條件（第6.4 節）嗎？我們是無法百分百地掌握這些條件（任何觀察量度都有實驗不確定度），在非綫性動力作用下其結果是無法預估的。

在經濟、科技、和信息全球化的今天，事物發展穿劃時空的速度特別快。尤其是對年輕人要求的反應能力更為強烈。這裡舉一個例子：一位朋友的兒子剛拿到博士學位，雖然唸物理，但也長於數學，博士論文較接近經濟物理（Econophysics）。最近應徵著名跨國金融服務公司 MS 理財研究部門的工作，求職面談時，對方提出的都是天馬行空，不著邊際的問題。例如：如果給你五百萬美元，讓你投資到韓國首爾推銷一種新品牌香口糖，應怎樣入手？你只好考慮首爾的人口年齡和收入的分佈，傳統文化對商品（香口糖）的看法，勞工資源和的消費者習慣，交通和資訊網絡對商品盤存與銷售的利弊，當地已有類同商品的競爭阻力，近年來有沒有在首爾相似投資的參考先例等等，企圖作出一個據理的揣測。倘若未能掌握以上某些考慮因素的答案，你只好假設不同的可能性，這樣就會有若干的揣測。之後憑你的市場經濟知識和經驗對這些揣測作出評價，最後連接國際經濟市場的氣候歸納成你對整個五百萬美元投資的計劃預算和進行模式，這便是你根據數學思維的答案。這例子不是孤立的事件，Google公司前任科技行政總裁Eric Schmidt 和Jonathan

Rosenberg 寫的 “How Google Works” 一書<sup>95</sup>，描述近十年來 Google 怎樣發展成為廿一世紀世界前列 最有創新性和富於增長潛力跨國公司之一。為了培養敢於創新改革的 Google 文化，他們吸引和招聘一團隊 “多層面化”（multifaceted）的 “創作精英”（smart creatives）。其實，他們的對象其中最重要準則無非是要有敏銳的數學思維能力與及對自然界和社會裡事物變化在廣闊的時空尺度規律的認識。

所以，無論你是求職、談判、評審或面臨其他場合，有效地運用數學思維與及多層面化認識事物在時空尺度的變化規律是有百利而無一害的。這大概就是 Ellenberg 教授所說的 “How not to be wrong” 吧。可惜這些非常關鍵的手段都不是從常規科目和試卷可學到的（我們不是貶抑傳統學科的重要性，而是專門科目的學習和跨領域綜合分析處理的性質有所不同。）這也是我們通過這小冊子交談的目的。

---

<sup>95</sup> “How Google Works: The Rules for Success in the Internet Century”, by Eric Schmidt & Jonathan Rosenberg, with Alan Eagle (Grand Central Publishing, 2014).

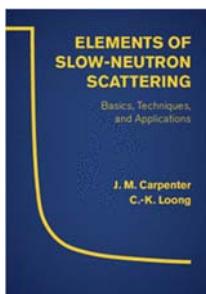
## 致謝

大半輩子沒有執筆寫作中文（其實相對執筆還要面對計算機輸入中英並列的圖文和方程符號），如果沒有多方朋友同事的親切幫助和鼓勵，我這本書是一定寫不成的。源頭當然從香港說起，中學老師的傳道授業給我紮根、同班的中學同學 – 其中不少是現今教育科研界（包括數學）經驗豐富的教授和學者 – 給我提示推薦，都銘感於心。特別多謝朱進強（香港大學）的指引支持。另外感謝蕭文強（香港大學）專意為本書撰寫前言。這小冊子以數學 – 集中於幾種函數和方程 – 為內容，但涉及跨學科應用，我向各界的專家和前輩的支持深表致謝：包括陳和生（中國科學院高能物理所）、唐傳祥和王學武（清華大學）、劉蘊濤（中國原子能研究院）、陳榮光（美國）、繆平（J-PARC, Japan）。這書的編寫雖然歷時不長，但在孕育期間我受益於多年摯友們的啓發與關懷，特意感謝Susan & Vincent Tsang（Chicago）、Rhonda & John M. Carpenter（Argonne Lab.）Ching-chi & Sow-Hsin Chen（MIT），當然連帶美加的親友家人。

本書之出版有賴於香港教育局課程發展處數學教育組的全力支持，特此致謝。最後（也最重要）是希望讀者們 – 尤其學生 – 從閱讀中感悟出對數學應用的興趣，願意繼續進修研習。也希望你們能通過教育局的網站提出意見，包括批評指正。

## 作者簡介

龍振強博士，美國物理學會會士，任職美國阿貢國立實驗室（Argonne National Laboratory）為資深物理科學研究員達25年。主要從事中子散射技術開展和凝聚物質的物理研究。2008-2014年任教於北京清華大學和廣州中山大學。現在活躍於歐亞各國大學和研究所進行講學和參與組織國際會議交流活動。最近著作有：*Elements of Slow-Neutron Scattering: Basics, Techniques, and Applications* by J. M. Carpenter and C.-K. Loong (Cambridge University Press, 2015).



[www.cambridge.org/9780521857819](http://www.cambridge.org/9780521857819)  
<http://slowneutronsattering.com/>

# 索引

## A

agglomerate 凝集體, 149

allometry 變異體形尺度, 22

alumina 氧化鋁, 147

anomalous diffusion 異常擴散, 118

Archimedes 阿基米德, 3

asymptotic value 漸近值, 64

Atlantic cod, *Gadus morhua* 大西洋鱈魚, 121

ATP, adenosine triphosphate 三磷酸腺苷, 143

attractor 吸引子, 53

autocorrelation function 自關聯函數, 78

avalanche 崩塌, 126

Avogadro constant 阿伏伽德羅常數, 86

## B

basal metabolic rate, BMR 基礎代謝率, 23

basin of attraction 吸引區域, 73

basking shark, *Cetorhinus maximus* 姥鯊, 121

Beijing Synchrotron Radiation Facility, BSRF 北京同步輻射裝置, 152

Bernoulli, Jacob 伯努利, 10

bifurcation 分歧, 56

Big Bang 大爆炸, 6

索引|

bigeye tuna, *Thunnus obesus* 大眼金槍魚, 121

binomial distribution 二項分佈, 97

bistability 雙穩定性, 56

bits 比特, 14

black hole 黑洞, 30

Boltzmann constant 玻爾茲曼常數, 87

Bolzano, Bernard, 40

Braque, George 喬治·布拉克, 31

brilliance 亮度, 153

Brownian motion 布朗運動, 34

butterfly effect 蝴蝶效應, 70

## C

Cantor dust 康托爾塵, 41

Cantor, Georg, 40

carbon monoxide 一氧化碳, 146

catalyst support 催化劑載體, 147

chaos 混沌, 63

cheetah 獵豹, 124

China Advanced Research Reactor, CARR 中國先進研究反應堆, 155

China Spallation Neutron Source, CSNS 中國散裂中子源, 157

coercivity 矯頑電場, 130

coherence length 相干長度, 93

colloidal limit 膠體極限, 111

complex maps 複數映射, 72

compressibility 壓縮率, 107

convection 對流, 114

correlation function 關聯函數, 78

correlation length 關聯長度, 93, 149

critical phenomenon 臨界現象, 89

Csermely, Péter, 141

Cubism 立體主義, 31

Curie constant, 106

## D

damping coefficient 阻尼系數, 131

Darwin, Charles Robert 達爾文, 12

dashpot 減震器, 131

degree 結點的度, 137

dendrite 樹枝形狀, 117

developmental biology and evolutionary

developmental biology, or *Evo Devo* (發展生  
物學與進化發展生物學), 125

dielectric breakdown 絕緣介質擊穿, 117

difference equation 差分方程, 42

difference equation 差分方程, 63

diffusion coefficient 擴散係數, 111

diffusion equation 擴散方程, 114

diffusion-limited aggregation 擴散置限聚集,  
116

dimensionless 無量綱, 5

## E

Econophysics 經濟物理, 160

edge 邊, 137

Einstein's formula 愛因斯坦公式, 111

electronic polarization 電子極化, 130

embedding dimension 嵌入維數, 37

entropy 熵, 14, 87

Erdős, Paul 保羅·埃爾德什, 137

Erdős-Rényi mode, 139

Euclidean space 歐幾里得空間, 28

Euler, Leonhard 歐拉, 10

extremal information principle 極大值信息原  
理, 85

## F

Feigenbaum, Mitchell 米切爾·費根鮑姆, 68

Felix Hausdorff 豪斯多夫, 45

ferroelectric random access memory, FeRAM

鐵電隨機存取器, 130

ferroelectrics 鐵電體, 130

Fibonacci numbers 斐波那契數, 8

索引|



Fick, Adolf Eugen, 114  
Fick's law 菲克定律, 114  
first-order phase transition 一級相變, 107  
Fisher-Kolmogorow equation 費雪 - 柯爾莫哥  
洛夫方程, 122  
fission 裂變, 155  
flow 流程, 64  
fluctuations 漲落, 88  
Fourier transform 傅立葉變換, 79  
fractal dimension 分形維數, 37  
fractal dynamics 分形動力, 47  
**fractal geometry 分形幾何, 28**  
fractal 分形, 36  
free-electron laser 自由電子激光, 153

## G

Galileo Galilei 伽利略, vi  
Gaussian distribution 正態分佈, 96  
genet 麝貓, 124  
geodesics 測地線, 30  
George Kingsley Zipf, 100  
Gibbs, Josiah 約西亞・吉布斯, 84  
Google, 160  
gossip problem 流言問題, 137  
graph theory 圖論, 137  
green engine ‘綠色’引擎, 147

greenhouse gas 溫室氣體, 147  
Gulliver's Travels 格列佛遊記, 22  
Gustave Eiffel 居斯塔夫・埃菲爾, 31  
Gutenberg-Richter law 古登堡 - 黎克特定律,  
14

## H

Haken, Hermann, 82  
half-life 半衰期, 6  
heavy-tail phenomena 重尾巴現象, 99  
Homo sapiens 智人, 7  
homoemorphism 同胚, 69  
Hooke's Law 胡克定律, 3  
hub 轉發站, 139  
hydrocarbon 碳氫化合物, 146  
hysteresis loop 滯後回綫, 130  
hysteresis 滯後, 60

## I

ideal gas 理想氣體, 105  
information entropy 信息熵, 87  
information theory 信息理論, 83  
initial condition 初始條件, 50  
irreversible 不可逆轉的, 88

索引|

## J

Jordan Ellenberg, vi

Julia set 朱利亞集合, 76

## K

Kleiber's law 克萊伯定律, 24

Klein, Felix, 40

Koch curve 科赫曲線, 41

Kondo, Shigeru, 123

## L

Langevin equation 朗之萬方程, 50

Langevin Paul 保羅·朗之萬, 114

Lars Edvard Phragmén, 49

leatherback turtle, *Dermochelys coriacea* 大海龜  
, 121

Leonardo da Vinci 萊昂納多·達芬奇, 30

Lévy flight, 118

Lévy Paul, 119

linear conjugacy 綫性共軛, 70

linkage 連接, 137

log-linear plot, 15

log-log plot, 14

Lorenz, Edward Norton 愛德·諾頓·勞侖次,  
71

Lotka–Volterra equation 洛特卡–沃爾泰拉方

索引|

程, 122

Lucas numbers 盧卡斯數, 8

## M

macroscopic 宏觀的, 34

Magellanic penguin, *Spheniscus magellanicus*

麥哲倫海峽企鵝, 121

magnetic order 磁有序, 106

magnetization 磁化強度, 106

Malthus, Thomas Robert 馬以薩斯, 12

Mandelbrot set 曼德博集合, 72

Mandelbrot, Benoit B. 本華·曼德博, 36

many-body problem 多體問題, 107

map 映射, 42

Markovian system 馬爾可夫系統, 51

mass fractal 質量分形, 149

master equation 主方程, 109

May, Robert McCredie, 63

mean-field theory 平均場理論, 107

Menger sponge 門格海綿, 41

mesoscopic 細觀的, 35

metabolic rate 代謝率, 23

metric space 度量空間, 69

microscopic 微觀的, 33

Milgram, Stanley, 140

Minkowski space 閔可夫斯基空間, 29

Mittag-Leffler, Gösta 哥斯塔·米塔-列夫勒

, 49

monostability 單穩定性, 56

Moore's law 摩爾定律, 16

morphogen 成形成素, 123

multifaceted多層面化, 161

multiscale多尺度性, 36

Murray, James D., 123

## N

nanostructure 納米結構, 147

National Synchrotron Radiation Laboratory 合

肥的中國科學技術大學國家同步輻射實驗室,

152

Nernst's theorem 能斯特定理, 33

network網絡, 136

neutron scattering 中子散射, 145

nitrogen oxide氮氧化物, 146

node 結點, 137

normal distribution 正態分佈, 96

nuclear astrophysics 核子天體物理, 127

nucleon 核子, 154

## O

ogistic equation 邏輯斯諦方程, 12

okapi 非洲鹿, 124

索引|

order parameter 序參量, 90

order 秩序, 87

organized skepticism有組織的懷疑論, 80

Ozawa, Masakuni, 149

## P

paramagnetism 順磁性, 106

Pareto law, 102

Pareto, Vilfredo, 101

*P-E loop* 極化-外加電場回綫, 130

phase diagram相圖, 107

phase space plot 相空間圖, 52

phase transition 相變, 105

Picasso, Pablo 畢加索, 31

*Plecostoms* 鯰魚, 123

Poincaré Henri 昂利·龐加萊, 49

Poisson distribution 泊松分佈, 97

*Pomacanthus imperator* 神仙魚, 123

potential function 勢函數, 53

power law冪定律, 5

power series 冪級數, 4

power spectrum 功率譜, 78

predator-prey equation掠食者-獵物方程, 122

preferential attachment偏向附屬, 140

Prigogine, Ilya 伊利亞·普里高津, 88

primary particle 原生粒子, 149

principle of maximum entropy production 熵極

量增長原理, 87

probability distribution function 概率分佈函數,

97

## Q

quantum, 複數 quanta 量子, 145

## R

random graph 隨機圖, 139

random number 無規數, 67

random walk 無規行走, 112

reaction-diffusion equation 反應 - 擴散方程,

123

relativistic 相對論性, 153

remanence 剩餘極化強度, 130

renormalization group method 正化群理論, 108

repeller 排斥子, 53

root-mean-square velocity 方均根速度, 111

## S

saddle point 鞍點, 55

saddle-node bifurcation 鞍結點分歧, 57

scale invariance 標度不變性, 3

scale-free 免標度, 5

scaleless 無標度, 5

scaling law 標度定律, 3

scaling 變異尺度, 或稱標度, 3

scaling 變異觀察尺度, 18

secondary particle 副生粒子, 149

second-order phase transition 二級相變, 107

self organization 自我組織成的, 89

self-similarity 自相似性, 3, 36

Shanghai Synchrotron Radiation Facility, SSRF

上海同步輻射光源, 152

Shannon Information, 84

Sierpinski triangle 謝爾賓斯基三角形, 41

sintering 燒結作用, 148

slaving principle 勞役原理, 92

small-angle neutron scattering, SANS 小角中子

散射, 150

small-worldness 世界小小小, 140

smart creative 創作精英, 161

sol-gel method 溶膠 - 凝膠方法, 149

spallation 散裂, 155

spectrum 頻譜, 79

spontaneous symmetry breaking 自發對稱破裂,

60

stable fixed point 穩定點, 53

star phase 明星相, 143

stationary 定態性, 118

Stevens' law 史蒂文斯定律, 20

索引

stochastic resonance 隨機共振, 142

stochastic 隨機性, 43

strong link 強連接, 137

subcritical pitchfork bifurcation 亞臨界草叉分歧, 60

subdiffusion 次擴散, 119

sunk cost 沉沒成本, 134

supercritical pitchfork bifurcation 超臨界草叉分歧, 59

superdiffusion 超擴散, 119

Swift, Jonathan 斯威夫特, 22

symmetry breaking 對稱破缺, 91

synergetics 協同學, 82

system 系統, 5

T

Taylor series 泰勒級數, 13

*The Fibonacci Quarterly* 斐波那契數季刊, 9

The Standard Model 標準模型, 136

The Tsinghua Thomson-scattering X-ray Source, TTX源 清華大學的湯姆遜散射X射綫源, 153

three-body problem三體問題, 49

three-way catalytic converter 三元催化轉換器, 147

threshold 閾值, 21

topological dimension拓撲維素, 37

索引|

topological phase transition 拓撲相變, 142

transcritical bifurcation 跨臨界分歧, 58

traveling wave 行波, 123

Turing, Alan Mathison, 123

two-body problem 二體問題, 49

U

universality 普適性, 89

unstable fixed point 不穩定點, 53

V

van der Waals force 范德瓦爾斯力, 149

Verhulst, Pierre François 韋呂勒, 12

viscoelasticity黏彈性, 131

W

wave function 波函數, 106

wave vector 波矢, 150

weak link 弱連接, 137

William, viii

William of Ockham 奧卡姆的威廉, viii

Wilson, Kenneth, 108

X

x-ray scattering X 射綫散射, 145

# Z

Zipf's Law, 100

zirconia 氧化鋯, 147