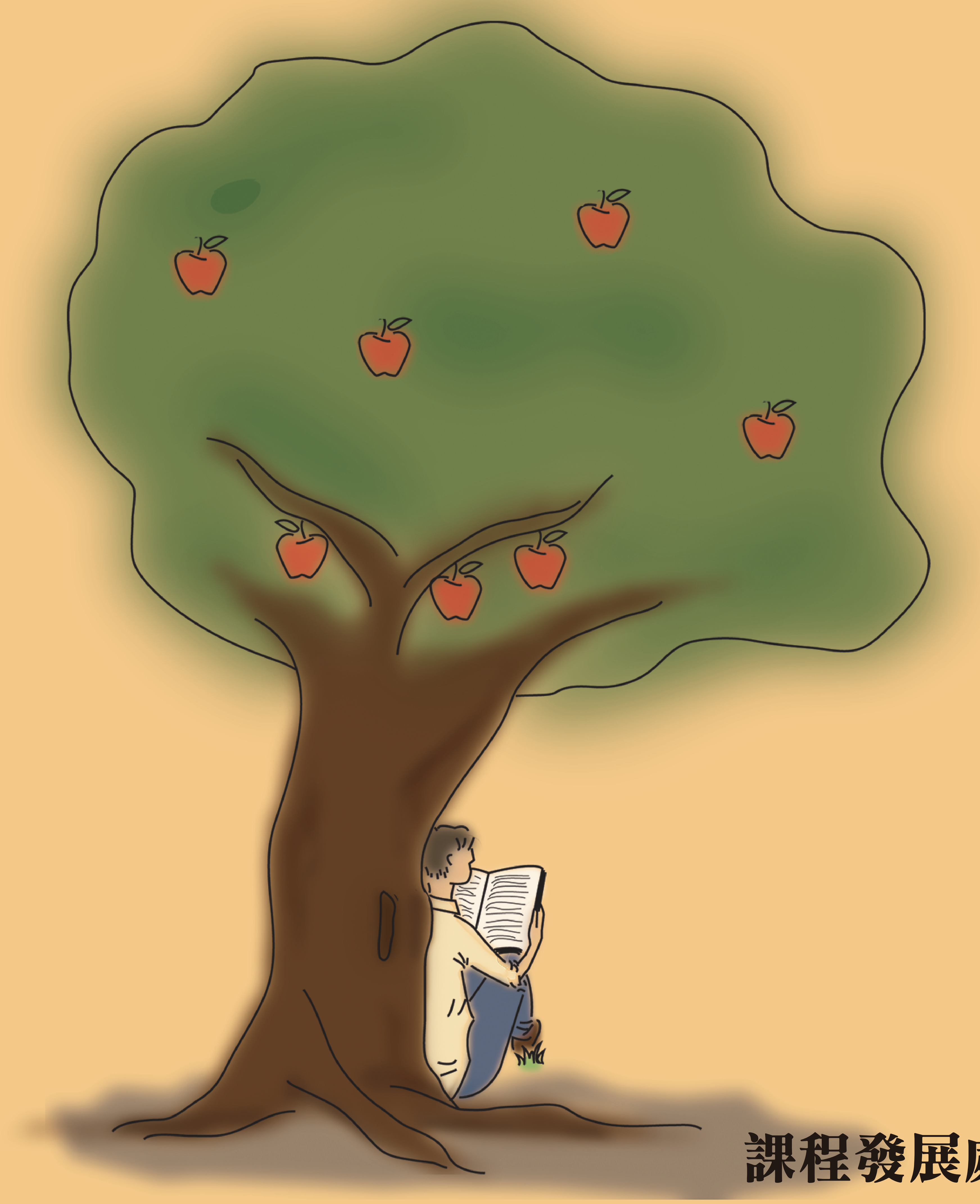
數學百子櫃系列(二十一)

三次數學危機
與
勇闖無窮大



教育局
課程發展處數學教育組

數學百子櫃系列(二十一) 三次數學危機與勇闖無窮大 教育局數學教育組

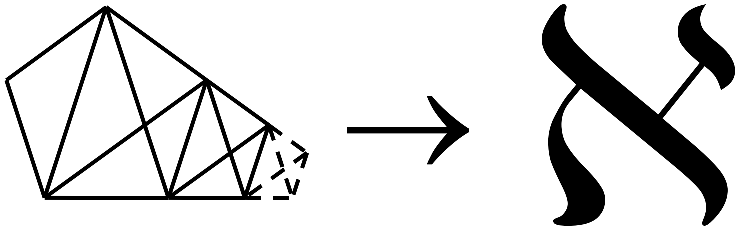
教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印
Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-2-12-345680-3
9 782123 456803 >

數學百子櫃系列（廿一）

三次數學危機
與
勇闖無窮大

作者　梁子傑



教育局
課程發展處數學教育組

版權
© 2016 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

香港特別行政區政府教育局於 2016 年出版。

ISBN 978-988-8370-16-0

目錄

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，以及蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《三次數學危機與勇闖無窮大》是這個系列的第二十一冊，當中輯錄了梁子傑老師三篇關於三次數學危機和一篇關於無窮大的文章。每章之後亦附有「閱後練習」，供有興趣的讀者作進一步的探索和研究。另外，在四篇文章之前，還附有一篇梁老師對教授三次數學危機的見解。本書內容深入淺出，不僅可供教師參考，亦可作為學生讀物。此外，本書只屬作者個人觀點，並不代表教育局的意見。

本書得以順利出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向各位學者、教師，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
（傳真：3426 9265　電郵：ccdoma@edb.gov.hk）

教育局課程發展處
數學教育組

作者簡介

梁子傑，香港中學數學教師，1985 年畢業於香港大學數學系，並獲得一級榮譽學位。翌年於香港大學教育學院取得教育證書。2008 年考獲香港中文大學數學教育理學碩士學位。

自大學畢業後，梁老師一直從事中學數學教育工作，並曾任香港數學教育學會外務副會長及《數學教育》執行編輯等職位。2004 至 2006 年間，亦曾借調教育統籌局數學教育組，協助編寫新高中數學課程。在過去的 20 多年間，梁老師經常在本港不同的刊物中，發表與數學教育有關的文章，亦到不同的學校演講，與學生和教師分享他研究和學習數學的心得，其中包括以「三次數學危機」和「勇闖無窮大」為題，向教師和學生介紹有關的數學故事。梁老師亦曾出版三本著作，分別為《圖龜幾何》（由香港數學教育學會出版（1999））、《幾何原本導讀》（由九章出版社出版（2005））及《談天說地話數學》（由教育局數學教育組發行（2008））。

前一章：三次數學危機的教學要點

（為數學教師而寫的導言）

2007 年，課程發展議會與香港考試及評核局聯合編訂及發表了《數學課程及評估指引（中四至中六）》，這是為了於 2009 年開始推行的新高中學制中的數學課程而編寫的課程文件。在必修部分進階學習單位的注釋中，該文件將「研究三次數學危機的成因及影響」列為學習單位「數學的進一步應用」中的其中一個示例。所謂「三次數學危機」是指在歷史上三次直接動搖數學理論基礎的重大事件，其中包括於公元前五世紀，由發現不可公度量之後所引發的一次信心危機；於 18 世紀，質疑微積分基礎理論的可靠性；以及於 20 世紀初，由集合論與超窮數的研究所引起的邏輯困境。這三件事除了為我們的數學歷史帶來精彩而豐富的話題之外，亦令我們反思數學的本質、我們的數學知識究竟是從何而來等問題。毫無疑問，這三件事對數學的發展歷史有著重要的意義，但對於一般的中學生而言，這些內容又對他們有甚麼意義呢？

第一次數學危機的教學要點

「第一次數學危機」並非一個全新的課題，在 1999 年出版，由香港課程發展議會所編訂的《中學課程綱要：數學科（中一至中五）》裏，已經收錄了這個題目。這個課題屬於第三學習階段的「度量、圖形與空間範疇」，在「以演繹法學習幾何」的標題下，「畢氏定理」的學習單位之中，並標示為非基礎部分，《綱要》中的學習重點是這樣寫的：「討論第一次數學危機的來龍去脈，並領會數學知識靈活多變的特性。」

我不打算在本章中和大家討論如何讓學生「領會數學知識靈活多變」這個問題，但對於一般學生而言，我們如何能夠讓他們明白「第一次數學危機的來龍去脈」呢？

由於第一次數學危機和畢達哥拉斯學派的成員有關，因此容易令人產生一個錯覺，並編寫出以下一個易於令中學生明白的故事：「在公元前 500 年，古希臘數學家畢達哥拉斯（Pythagoras of Samos；約公元前 569 年 – 約公元前 475 年）和他的門徒創立了畢氏學派。他們相信『萬物皆數』，並認為世上只有整數和分數。但門徒希伯索斯（Hippasus）卻由畢氏定理發現單位正方形對角線的長度為 $\sqrt{2}$，而這個數不能用分數準確表示。因為這個發現衝擊著畢氏學派的信念，所以引起學派成員的恐慌，甚至將希

伯索斯推入大海之中，將他淹死。」不過，這個故事和史實又是否吻合的呢？

雖然在今天，我們已經無法肯定當年的事件究竟如何發生，但根據資料所示，希伯索斯最先發現的無理數，並非$\sqrt{2}$，而是正五邊形中對角線與邊長之比（即是今天所謂的「黃金比」：$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）。當中的證明，亦沒有涉及畢氏定理。

另一方面，指畢氏學派的成員由於相信「萬物皆數」，因而否認無理數的存在，這個說法亦過於片面和神話化，忽略了數學的客觀性，不見得對學生的數學觀有任何正面的幫助。事實上，在發現不可公度量之前，古希臘人希望可以透過有限的輾轉丈量步驟來處理兩個數量之比的問題，並從此建立有關相似三角形的基礎理論。但是當發現了不可公度量之後，他們立刻發覺輾轉丈量的步驟將不會找到公度量，因此他們的數學理論是行不通的。要知道，相似三角形亦是數學上一個至為基本和重要的課題，無論是理論上或實際上的應用都非常之多。喪失了相似三角形的基礎，等同於失去了一大片的數學王國，難怪這發現會引起當時畢氏學派中人的恐慌（當然，以「殺人滅口」的方式來解決問題，那是絕不可取的！）。

歸根究底，整個問題的核心，就是當時的數學家無法以一個簡單的方法來處理一個涉及有無窮多次運算步驟的問題。這危機直至歐多克索斯（Eudoxus of Cnidus；公元前 408 – 公元前 355）提出一個創新的比例理論之後，才得到緩解。到了 19 世紀末，戴德金（Julius Wilhelm Richard Dedekind；1831 – 1916）藉助歐多克索斯的想法，進一步提出實數的定義，從而鞏固了我們對實數的理解，整個危機才能告一段落。

換言之，第一次數學危機反映了人類對實數理解的過程。由於不可公度量的出現，古希臘的數學家曾經將「數」和「量」這兩個概念區分：「數」是指一般的整數和有理數等可以找到公度量的數字；而「量」則是一般線段上可以找到的長度，這包括了有理數和無理數。因此，他們發展出一套相當複雜的數學體系。到了今天，由於人類對實數的理解和認識多了，因此我們已經重新將「數」和「量」兩個概念統一處理。

順帶一提，在討論相似三角形基礎理論的同時，我們亦可以由此澄清截距定理與相似三角形的邏輯關係。當引入截距定理的時候，很多人都會使用相似三角形的性質來證明這定理。同時，我們亦不難從截距定理去證明關於相似三角形的基礎定理。不過，這個做法只會構成邏輯上的

循環論證，因此無法證明上述兩個定理是否成立。引入歐多克索斯對比的定義之後，我們便可以找出一個對截距定理的獨立證明，從而脫離這個邏輯上的困境。有關由歐多克索斯及以後的希臘數學家所建立的相似三角形基礎理論，已詳細收錄於歐幾里得（Euclid of Alexandria；約公元前 330 – 約公元前 275 年）編寫的《幾何原本》第六卷之中，教師可以參考有關的內容和學生討論，在此不贅了。

第二次數學危機的教學要點

希臘過後，羅馬帝國出現。羅馬帝國較爲著重經濟商貿，數學的發展不大。東羅馬帝國崩潰之後，歐洲陷入了黑暗時期，一切文藝活動、科學研究都被終止了，直至 15 世紀才得以重生。在文藝復興時期，數學有著蓬勃的發展。到了 17 世紀，天體物理學及其他問題促使微積分的出現。微積分的出現為數學家帶來了一個強而有力的工具，可以解決許多與速率和變化率有關的問題，可算是數學發展上史無前例的成就。不過，由於數學家在研究的過程中，對無窮大量、無窮小量、極限、無窮級數等概念仍未有充分的瞭解，因此未能清楚解釋他們的理論基礎。他們就好像在鬆散的流沙之上建起一幢很高的建築物似的，十分危險。這個現象很快演變為數學發展的絆腳石，並產生了另一次對數學的信心危機。

經過差不多兩個世紀的努力，到了 19 世紀的中葉，數學家終於為微積分的基礎理論提出解決方案，並為函數、極限、導數、微分、積分、無窮級數等，寫下明確的定義和運算條件。其中最重要的觀念，要算由魏爾斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass；1815 – 1897）所提出對極限的「ε-δ 定義」了。

由於這個定義方法十分抽象，因此即使在大學學習分析學的學生都視「ε-δ」為畏途。其實說穿了，「ε-δ」也只不過是以絕對值和不等式等符號，間接地、客觀地說明「越來越接近」或者「要多接近有多接近」的意思。只要通過一些具體的例子，其實亦不難明白內裏的乾坤。

在第二次數學危機出現的初期，數學家所面對的困境與第一次數學危機時數學家所面對的困難十分相似：他們要在一個有限的處境中，處理一個重複無窮多次運算而產生的「量」。在第一次數學危機當中，數學家要面對無窮多次的輾轉丈量，從而得出一個「不可公度量」；而在第二次數學危機中，數學家則要不斷地細分一個數量，從而得出一個「無窮小量」。在兩次的危機中，他們不知如何理解和處理那些新發現的量，因而產生了信心危機。而歐多克索斯和魏爾斯特拉斯所提出的解決辦法卻有一個共同的特色，就是兩者均採用一種間接的方式，以不等式來描述有關的量，從而避免直接地向那些難以解釋的物件下定義。

這個方法是成功的，值得欣賞。事實上，數學家亦採用了相似的策略來解決第三次數學危機的問題。

第三次數學危機的教學要點

康托（又譯康托爾，Georg Cantor；1845 – 1918）憑著鍥而不捨的精神和驚人的創造力，創造出集合論，並應用他發明的「對角線法」，證實了超窮數的存在，開創出一個新的數學世界。可惜由於他使用了直接的方法來定義集合，因此後來產生了很多不合邏輯、自相矛盾的悖論，甚至令人再懷疑數學是否可靠，從而成為第三次數學危機。在眾多的悖論之中，最著名的，要算是羅素（Bertrand Arthur William Russell；1872 – 1970）悖論。說也諷刺，羅素悖論的推理方式，多少帶有對角線法的影子，彷彿就是應用康托的工具來打擊康托的理論似的。

第三次數學危機出現得非常突然，而數學家亦很快便找出解決的方案。在 1908 年，策梅羅（Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo；1871 – 1953）提出以形式化的公理來建立集合論，以間接的方式來描述甚麼是集合，從而避免由直接定義集合所帶來的種種邏輯問題。到了 1922 年，弗倫克爾（Adolf Abraham Halevi Fraenkel；1891 – 1965）和斯科朗（Thoralf Albert Skolem；1887 – 1963）完善了策梅

羅的系統，確立了包含 9 條公理的「ZFC 公理系統」。

綜觀三次數學危機的內容，我們不難得出一個結論，就是這三次數學危機的成因均或多或少和「無窮」這概念有關。至於解決危機的方法亦十分相似，就是以間接的方式來描述有關的概念，避免在文字上或邏輯上所產生的問題。事實上，第三次數學危機的解決辦法，就是採用公理來限制集合的概念，而不直接對集合提出任何定義。

無可否認，第三次數學危機涉及一些較為抽象的數學內容，當中亦包括函數的概念、邏輯推理和反證法的技巧。對一般中學生而言，這次數學危機的來龍去脈是不容易理解的。不過，當中涉及的悖論和邏輯問題（例如：羅素的理髮師悖論和「這是一句謊言」等），學生應該可以應付，相信可以為課堂帶來非常有趣的討論或辯論。

順帶一提，關於「悖」字的讀法，這雖然與數學無關，但也可以作一點討論。根據一般中文字典（例如：商務印書館出版的《商務新詞典》）的注音，悖，粵音「焙（bui6；陽去聲）」，普通話的拼音為「bèi」，解釋為「違背、違反、謬誤」等。在香港，很多人將這字讀成「撥（but9；陽入聲）」，那便和「勃」字的意義相通，解作「旺盛」，但這與該詞的原意並不吻合，值得注意。

數學真理的消失

經過了二千多年的探索和研究，19 世紀的數學家終於在平面幾何學的研究中作出突破性的發現，並創造出一個前所未見的幾何學體系──非歐幾何。這個發現令數學家開始反思數學真理的意義。及至 20 世紀初，當集合論的悖論出現時，更加令他們注意和探討「數學是否可靠」的問題。

自古希臘以來，人們相信數學基礎的公設和公理等同於「真理」，那是一些不容置疑、不容否定的命題。不過，當非歐幾何出現後，人們察覺原來某些幾何公理的作用，只不過是用來描述我們對空間的想法。如果我們更換了其中的一些公理或公設，結果只是走進了另一個幾何世界，當中並沒有任何的矛盾或不妥當的地方。因此，公設和公理不容否定的地位被動搖了。

集合論亦帶給我們類似的經歷。當我們將集合的公理形式化之後，整套集合論便變成一堆數學符號的運算。至於這些符號有沒有實質的意義，那就要視乎使用該套數學符號的人的需要了：如果某數學家認為那套公理的假設符合他的需要和想法，那麼那堆數學符號便是「有用的」、「有意義的」，否則便是「沒有用的」了。因此，「數學真理」的地位便由「合用」和「不合用」取代了。

縱使如此，我們的數學體系並非隨意地建立，也不是由數學家憑空想像而創造的。數學知識發展自生產與實踐，一切脫離現實的問題，並不能吸引人們的注意和研究。我們所選擇的公理亦是有根有據、從實際經驗中體會出來的。即使失去了「真理」的地位，數學依然是我們瞭解自然科學的重要工具。

數學觀念的改變對數學教育的影響

從數學危機的歷史可以讓我們知道，許多數學概念和定義（例如：比、極限、集合、無窮大等）都是逐漸形成的。故此在課堂上，單單列出了定義不等於解釋了概念，證明了定理也不等於讓學生真正理解定理的數學內容。有數學老師認為邏輯推理就是數學教學的核心，只要將每一個運算在學生面前清楚地列出，便會使學生明白。但事實卻未必如此。

回看歷史，很多數學概念都是經過多年（甚至是數百年）的洗滌才得以形成，在課堂上只憑三言兩語便希望學生可以掌握那些數學內容，那並不合理。與學生討論、讓學生自行建立有關的概念，才可以令他們學得更好，亦對他們的「數學觀」產生正面的作用：數學不是由數學家憑空創造出來的，而是從實際的需要出發，經過千錘百煉後才得到的成果。這一點在教學上特別值得留意。

三次數學危機研究的起源？

在結束本章之前，還有兩個疑問值得和大家探討。可惜在本書付梓之前，並未能找到有關的答案，只好留待各位讀者繼續追查和研究。

不知大家有沒有發現，如果我們在互聯網的搜尋器裏以中文搜尋「三次數學危機」這詞，那麼我們可以找到超過 10 萬個搜尋結果（某些搜尋器甚至會找到超過 300 萬個連結！），而當中大部分的連結，都與我們目前所提及的數學危機有關。不過，如果我們以英文「three crises in mathematics」去搜尋，那麼我們將會得到一個非常不同的結果。以英文搜尋，或許我們仍然會得到數以 10 萬計的連結（這視乎我們採用哪一個搜尋器），但只要打開那些連結看一看，我們不難發現，除了偶然一兩個連結之外，多數網頁的內容都不是談及我們目前所指的數學危機事件。類似地，如果我們到書店或圖書館逛一逛，我們不難找到以「三次數學危機」為題材或包括三次數學危機為內容的中文圖書。但到放置英文書籍的書架上找找，卻不容易找到有關的書本。為甚麼會有這樣奇怪的現象呢？

另外，究竟是誰首先提出「三次數學危機」這一個詞彙呢？有說這個名詞首先是由一位德國著名的數學史家引入的，但翻查過一些資料，卻並沒有文獻證實這一點。再者，既然三次數學危機是來自西方的產物，那麼理應有很多西方的文獻討論這件事才對，但為甚麼在中文世界之中會對這話題有那麼熱烈的討論，而西方世界卻是少之又少呢？難道提出「三次數學危機」一詞的人，並非來自西方，而是來自中國？

個人認為，上述兩個問題十分有趣，值得探討。可惜由於個人能力和時間所限，暫時未能展開有關的搜尋和研究工作。唯有將這兩個問題在此提出，好讓對此課題有興趣的讀者，繼續研究。

第一次數學危機：不可公度量的發現

當談及數學歷史時，我們不得不提及古希臘人對數學發展的貢獻。據記載，古希臘的文明可追溯至公元前 2800 年。到了公元前 600 年左右，希臘出現了一個重要人物，他是泰勒斯（Thales of Miletus；約公元前 624 – 約公元前 547）。據說他曾經預報了一次日蝕的日期，懂得計算海中船隻與海岸的距離，亦曾經從量度一根標竿影子和金字塔影子的長度，推算出金字塔的高度。他亦證明了好幾個基本的幾何定理，繼而開展了數學命題、數學證明、邏輯推理的研究。

畢達哥拉斯（Pythagoras of Samos；約公元前 569 – 約公元前 475）是泰勒斯的學生。他曾經在意大利南部的地區收取門徒，成立了一個學派。我們對畢達哥拉斯學派認識不多，原因是該學派的人並沒有著作流傳下來，我們只能通過他人的著作，從而知悉這學派曾經在這世上存在過。

據說，畢氏學派的成就，包括證明了所謂的「畢氏定理」（在直角三角形中，直角所對的邊的平方等於夾直角兩邊平方之和），發現了三角形數、正方形數等數字規律，建

立了在音樂中音階與音律的規則等。因為古希臘人認為世上所有物質都是由一些非常微細、大小相同並且不能分割的「原子」所組成，所以畢氏學派中人相信，一條線段是不可以不斷地分割下去的，同時，一條線段的長度必定是「原子」大小的整數倍。由此他們確立了「萬物皆數」的想法。可是，在學派之中，有人發現了所謂的「不可公度量」，衝擊著學派的信念，動搖了他們的數學根基，因而引起學派成員的恐慌。後世人稱這次事件為「第一次數學危機」。

可能大家會感到奇怪，一個小小的發現，為何會產生如此大的恐慌呢？為甚麼會將這事件稱為「危機」呢？若要明白箇中的原因，那麼便要對「萬物皆數」這句話有更深入的瞭解了。

萬物皆數

古希臘的數學有一個特色，就是將「數」這個概念轉換為線段來理解。將兩個數互相比較大小，等同於將兩條相對的線段比較長短。例如在圖 1.1 中，我們打算將 a、b 兩條線段的長度進行比較（亦即是比較 a、b 兩個數的大小）。

由於 a 較長，因此可以從 a 減去 b，得餘量 r_1。再將

b 和 r_1 互相比較，由於 r_1 較短，即使將它疊高一次，亦沒有超越 b 的長度，因此可以從 b 減去 r_1 的 2 倍，得另一餘量 r_2。留意，r_2 比 r_1 短。接著，我們將 r_1 和 r_2 互相比較，繼續求它們之間的餘量。

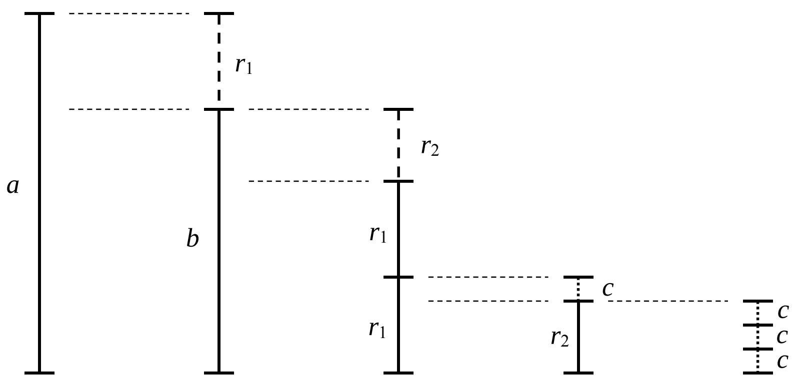


圖 1.1

按照上述方法將兩條線段互相比較，我們稱之為「輾轉丈量法」。前面提過，由於古希臘人相信所有物質都是由不可分割的原子所組成，因此這個輾轉丈量的過程是不會永無止境地做下去的。換言之，當丈量的工作重複了多次之後，總會找到一個餘量 c，它剛好能夠量盡之前的那一個餘量。例如圖 1.1 中的 c，它的 3 倍剛好量盡 r_2（即 r_2 是 c 的 3 倍），因此當 r_2 和 c 比較時，便再沒有另一個餘量出現，輾轉丈量的工作便可終止。

古希臘人稱那個 c 為 a 和 b 的「公度量」。有了這個公度量，a 和 b 之間的比較便容易得多了。好像在上例中，我們知道 $r_2 = 3c$；$r_1 = r_2 + c$，即 $r_1 = 4c$；$b = 2r_1 + r_2 = 2 \times 4c + 3c = 11c$；$a = b + r_1 = 11c + 4c = 15c$。所以我們有 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{15c}{11c} = \dfrac{15}{11}$。

一般而言，如果我們從 a、b 出發，經過輾轉丈量的過程後，得到一個公度量 c，那麼我們亦可按照上述的方法找到正整數 m 和 n，使 $a = mc$、$b = nc$。這時候，我們有 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{mc}{nc} = \dfrac{m}{n}$。注意：無論 a、b 和 c 這三個是怎樣的數，因為算式中的 c 總會被消去，所以 a 和 b 之比總可以轉化為兩個整數 m 和 n 之比。換言之，任何兩數之比都可以轉化為所謂的「有理數」，這亦是「萬物皆數」的意思。

可能大家會再追問，知道兩數之比是有理數又如何呢？如果兩數之比不是有理數又有何大不了呢？要回答這個問題，那麼大家便要明白古希臘人對相似三角形的基礎理論了。

相似三角形的基礎理論

相信大家都同意，在幾何學中，相似三角形佔據著一個很重要的地位。從前面提到有關泰勒斯的故事可知，如果沒有相似三角形的理論，那麼泰勒斯亦不能計算金字塔的高度和海中船隻與海岸的距離。至於在相似三角形的理論中，以下的一個命題相信是最重要和最基礎的了：

命題 1　在兩個三角形中，如果各角對應地相等，那麼夾等角的邊成比例。

這個命題描述了測試兩個三角形是否相似的其中一個條件。一般的數學教科書都稱之為「等角」或「A.A.A.」。而在大多數的教材中，當引入這個條件時，往往都只是找幾個特例來測試一下，便歸納出這個命題為正確的結論，並沒有一個嚴謹證明。原來在古希臘的文獻中，曾經記載了一個對這命題的數學證明。它的證明方法是這樣的：

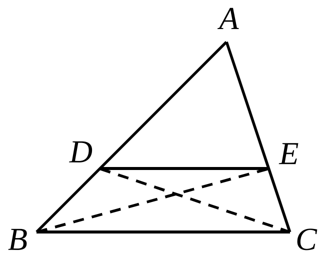


圖 1.2

假如我們有兩個三角形，它們的角對應地相等。為了方便寫出證明，我們將這兩個三角形如圖 1.2 般重疊在一起，並稱一個為 ΔABC，另一個為 ΔADE，其中 $\angle BAC=\angle DAE$，$\angle ABC=\angle ADE$，$\angle ACB=\angle AED$（注意：由於 $\angle BAC=\angle DAE$，因此若 A、D、B 三點共線，則 A、E、C 三點亦共線）。

連結 BE 和 CD。留意：若以 DB 和 AD 為底，那麼 ΔDEB 和 ΔADE 為兩個同高的三角形，因此它們面積之比等於它們底長之比，即 $\dfrac{\Delta DEB\text{ 的面積}}{\Delta ADE\text{ 的面積}}=\dfrac{DB}{AD}$。類似地，$\Delta DEC$ 和 ΔADE 亦為兩個同高的三角形，因此 $\dfrac{\Delta DEC\text{ 的面積}}{\Delta ADE\text{ 的面積}}=\dfrac{EC}{AE}$。

另一方面，因為 $\angle ABC=\angle ADE$，所以 $DE\,//\,BC$（同位角相等），由此得知 ΔDEB 和 ΔDEC 為共底於 DE 並且等高的三角形。因此 ΔDEB 的面積 $=\Delta DEC$ 的面積。綜合以上的結果，我們有：

$$\frac{DB}{AD}=\frac{\Delta DEB\text{ 的面積}}{\Delta ADE\text{ 的面積}}=\frac{\Delta DEC\text{ 的面積}}{\Delta ADE\text{ 的面積}}=\frac{EC}{AE}\text{。}$$

在上式的兩邊加 1，便得到 $\dfrac{AD+DB}{AD}=\dfrac{AE+EC}{AE}$，

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$，即夾等角的邊成比例。命題 1 得證。

可能，從現代人的眼光來看，上述的證明已經足夠清晰和令人明白了，但從古希臘人的眼光來看，卻非如此。他們會追問：兩個同底等高的三角形，為甚麼它們的面積會相等呢？又，兩個同高的三角形，為甚麼它們的面積之比會等於它們的底邊長度之比呢？

在今天，由於我們接受了三角形的面積公式（即三角形面積 = 底 × 高 ÷2），因此當兩個三角形的底和高都相等時，它們的面積自然地相等；又，當兩個三角形的高度相等時，只要消去當中共同的因數，兩個三角形的面積之比自然等於它們底邊長度之比。但由於古希臘人的幾何論證之中，並沒有三角形面積公式，因此他們要採用另一種方法來解答有關的問題。而他們的解決辦法，就是利用全等三角形來證明以下的兩個命題：

命題 2　同底等高的三角形，它們的面積彼此相等。

設圖 1.3 中，ΔABC 和 ΔDBC 為兩同底等高的三角形，即 $AD \,//\, BC$。將 AD 向兩邊延長，使 $ED = BC = AF$。由於 ED 平行並且相等於 BC，AF 平行並且相等於 BC，因此 $EBCD$ 和 $ABCF$ 為平行四邊形。由此得 $EB = DC$，

$AB = FC$，又 $EA = ED + DA = AF + DA = DF$，所以 $\Delta EBA \cong \Delta DCF$（S.S.S.）。

再由此得 $EBCD$ 的面積 $= \Delta EBA$ 的面積 $- \Delta ADG$ 的面積 $+ \Delta GBC$ 的面積 $= \Delta DCF$ 的面積 $- \Delta ADG$ 的面積 $+ \Delta GBC$ 的面積 $= ABCF$ 的面積。

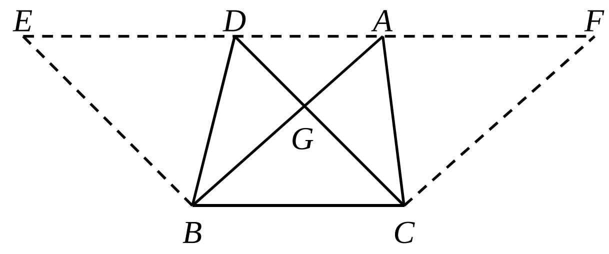


圖 1.3

另一方面，因為 $\Delta DBC \cong \Delta BDE$ 及 $\Delta ABC \cong \Delta CFA$（S.A.S.），$EBCD$ 的面積 $= 2 \times \Delta DBC$ 的面積 和 $ABCF$ 的面積 $= 2 \times \Delta ABC$ 的面積，所以 ΔDBC 的面積亦等於 ΔABC 的面積。命題 2 得證。

命題 3　同高的三角形，它們的面積之比等於其底長之比。

如圖 1.4，設 ΔABC 和 ΔACD 為兩個同高三角形，其中 B、C、D 三點共線。現要證明 $\dfrac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta ACD \text{ 的面積}} = \dfrac{BC}{CD}$。在這裏，由於涉及到兩數之比的概念，古希臘人找不到一

個簡單的方法來完成這命題的證明，因此他們唯有利用公度量這個概念來完成有關的工作。

假如線段 BC **和** CD **之間存在公度量** c，那麼我們便可以按公度量的長度將 ΔABC 和 ΔACD 的底邊分割成長度相等的線段。現在假設 $BC = mc$，$CD = nc$。

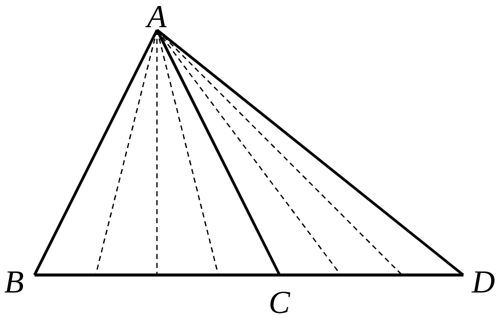


圖 1.4

如圖 1.4 所示，我們可以將 ΔABC 和 ΔACD 分割成等底同高的小三角形，其中小三角形底的長度為 c。由於那些小三角形的面積是彼此相等的（見本章閱後練習），因此亦不妨設那些小三角形的面積均等於 K。由此得 ΔABC 的面積 $= mK$，ΔACD 的面積 $= nK$。綜合以上的結果便有：$\dfrac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta ACD \text{ 的面積}} = \dfrac{mK}{nK} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{mc}{nc} = \dfrac{BC}{CD}$，即三角形面積之比等於其底長之比。命題 3「初步得證」。

由上面 3 個命題的證明可知，古希臘人對相似三角形的推理是非常謹慎的，每一個證明步驟都有根有據。不過，由於他們對「兩數之比」這個概念認識不足，只好將證明建築在公度量必定存在的假設上。換言之，古希臘人相信輾轉丈量最後會找到一個公度量的想法，並非一定只是相信原子不能分割，或迷信「世事完美」、「萬物皆數」那麼簡單，而是出於論證上的一個技術原因。因此，只要找到兩個不可能存在公度量的線段，那麼古希臘人對相似三角形的基礎理論便會被完全推翻了。

說也諷刺，在畢氏學派中，真的有人找到一個沒有公度量的例子，由此引發起數學史上的第一次信心危機。那人就是希伯索斯（Hippasus）。

希伯索斯的發現

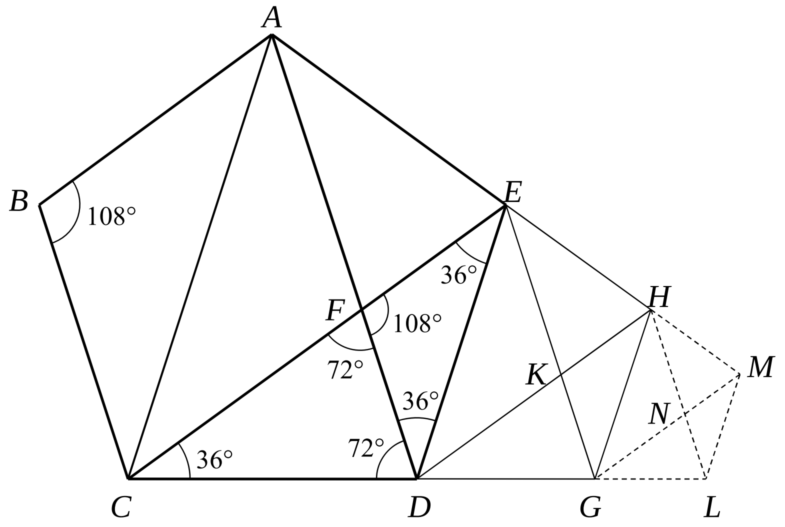


圖 1.5

希伯索斯的發現是這樣的：他畫了一個正五邊形 *ABCDE*，並打算用輾轉丈量法比較對角線 *AC* 和底邊 *CD* 的長度（如圖 1.5）。

由於正五邊形的內角等於 108°，因此 $\angle ECD = \angle CED = \angle ADE = 36°$（等腰三角形底角及三角形內角和）。稱 *AD* 和 *CE* 的交點為 *F*，則 $\angle DFE = 108°$（三角形內角和）。由此得 $\angle CFD = 72°$（直線上的鄰角），$\angle CDF = 72°$（三角形內角和）。換言之，ΔCDF 為等腰

三角形，$CF = CD$（等角對等邊）。另外，因為 ΔCAE 亦是等腰三角形（為甚麼？），所以對角線 $CE = AC$。因此若將 *AC* 減去 *CD*，它的餘量就是 *EF*。

接著，就是比較 *CD* 和 *EF*。由於 $\angle DFE = 108°$，因此可以按 *EF* 的長度作另一個正五邊形 *EFDGH*。這時候，$DE = CD$，$DG = EF$。換言之，比較 *CD* 和 *EF*，亦等同於比較正五邊形 *EFDGH* 中的對角線 *DE* 和底邊 *DG*！

可能大家看到上述的結果並不會感到驚訝或恐慌，但相信當希伯索斯發現這結果時，非要大吃一驚不可。原因是他本來打算利用輾轉丈量法比較正五邊形對角線和底邊的長度，希望從中可以找到公度量。但當他找到兩邊的餘量時，那個餘量竟然和底邊構成另一個正五邊形，而且它們之比亦是對角線和底邊長度之比！如果他重複上述的步驟，將 *DE* 和 *DG* 相減，最後亦只會像圖 1.5 一樣，構作另一個正五邊形 *HKGLM*，繼續比較該正五邊形對角線和底邊的長度！很明顯，輾轉丈量只會不斷地製造出更小的正五邊形，而比較正五邊形對角線和底邊長度的工作將會永無止境地做下去！換言之，在正五邊形中，它的對角線和底邊並不存在著公度量！

當然，正面地看這結果，我們可以說希伯索斯發現了「不可公度量」（或者稱它為「無理數」）。但負面地看，希伯索斯的發現不單推翻了畢氏學派「萬物皆數」的想法，更推翻了前面命題 3 的證明，將相似三角形的基礎理論徹底摧毀，難怪這發現會引起如此大的恐慌。據說，當畢氏學派的門徒聽到希伯索斯的發現後，為了隱藏這事實，竟然將希伯索斯推入大海之中，將他淹死！

轉危為機

在公元前 387 年左右，柏拉圖（Plato；公元前 427 – 公元前 347）在雅典創辦了一個哲學學園，名叫「柏拉圖學園」。雖然柏拉圖並不算是一個數學家，但他卻十分重視數學教育。據說，他在他的學園門口樹立了一個門牌，上面寫著：「不懂幾何者，不得內進」，藉此表明他重視幾何學。

柏拉圖學園中有一位門徒，名叫歐多克索斯（Eudoxus of Cnidus；公元前 408 – 公元前 355），他重新提出了一個比的定義，按此定義避開不可公度量所帶來的問題並運用了新的定義證明了命題 3，重新建立起相似三角形的理論基礎，成功地化解了第一次數學危機。

回看命題 3 的證明，我們發現整個證明最重要的

一步，是當知道 a、b、c、d 四個量之後，如何闡明 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 彼此相等（在命題中，a 和 b 就是三角形的面積，c 和 d 就是底邊的長度，而我們希望證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$）。前面解釋過，如果可以找到公度量，那麼這兩個比都可以改寫成 $\frac{m}{n}$ 這個形式，其中 m 和 n 都是正整數。要注意的是，雖然我們不清楚 a、b、c、d 四個量本身是否整數，亦未必懂得直接計算 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的數值，但透過公度量轉換成的數值 $\frac{m}{n}$ 就必定是有理數。既然我們懂得如何比較有理數的大小，那麼我們便可以通過轉換後的有理數來比較 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的大小了。但如果 a、b、c、d 四個量之間並不存在公度量，那麼我們如何比較 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的大小呢？

在這裏，歐多克索斯提出了一個間接比較兩個量的方法。為了更容易明白歐多克索斯的意思，讓我先為大家作個比喻：在學期開始的第一天，老師按同學的身高，由矮至高排好了列隊的次序。第二天，來了一位新同學小明，老師於是將小明的身高和其他同學比較，然後將他安插在隊伍之中。到了第三天，又來了另一位新同學小珠，但這

天小明卻生了病，請了假，那麼老師如何比較小明和小珠的身高呢？

方法很簡單，就是先將小珠的身高和其他同學比較，然後將她安插在隊伍之中。由於其他同學已經按高度排好了次序，只要發覺小珠的位置比小明前，那麼老師便可以知道小珠比小明矮；但如果小珠的位置比小明後，那麼小珠就比小明高了。又，如果高於小明的同學，他們都比小珠高，另外，矮於小明的同學，他們都比小珠矮，那麼老師便可判定，小明和小珠的高度相約了。

當然，在第三種情況下，究竟小明還是小珠高一點，老師是不能判定的。但如果同學的人數很多，並且好像有理數般稠密地分佈在數線上（由於任何兩個有理數之間，必定存在另一個有理數，因此我們用「稠密」來形容有理數在數線上分佈的情況），那麼只要知道小明和小珠同時高於某些同學，又同時矮於其餘的同學時，二人的高度就必定相等了。

回到我們原本討論的情況。現在要比較 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的大小。按照上面比喻中所提出的方法，我們先將 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 分別與**所有**有理數比較。如果我們能夠找到

一個有理數 $\frac{m}{n}$，使 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$，同時 $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$，那麼 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 當然是彼此相等的。但即使我們找不到這個有理數（即 a、b 之間並不存在公度量），我們總可以知道 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 會比那些有理數大，又會比那些有理數小。如果 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 同時大於某些有理數，又同時小於其餘的有理數，那麼我們便將 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ **定義為**相等。通過這個定義，我們便可以避免使用公度量的概念來比較 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的大小了。

當然，在繼續討論下去之前，還有一個細節要澄清，那就是：既然我們不懂得計算 $\frac{a}{b}$，那麼我們如何將它和 $\frac{m}{n}$ 比較呢？

其實方法很簡單，假如 a、b、m、n 四個量都是正數，其中 m 和 n 都是整數，那麼我們可以使用移項的技巧，將比較 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{m}{n}$ 的大小，變成比較 na 和 mb 的大小。雖然我們不懂得計算 $\frac{a}{b}$，但 na 和 mb 是可以理解和比較的。事實上，na 是將 a 放大 n 倍，或者將表示 a 的線段延

長 $n-1$ 次，便成為 na（記得古希臘人是用線段表示數嗎？）。留意 m 和 n 都是正整數，因此無論 n 或者 m 有多大，「將線段延長 $n-1$ 次」或「將線段延長 $m-1$ 次」這兩件事都可以辦到。而且比較兩段線段長度亦不困難。由此我們便知道，當 $na>mb$ 時，$\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$；當 $na=mb$ 時，$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$；當 $na<mb$ 時，$\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$。

綜合以上的討論結果，歐多克索斯便提出一個比的新定義，以現代數學符號表示，便成為：

定義　設 a、b、c、d 為四個正量。對於任何正整數 m 和 n，若 (I) $na<mb$ 可推導出 $nc<md$、(II) $na=mb$ 可推導出 $nc=md$ 及 (III) $na>mb$ 可推導出 $nc>md$，則稱 a、b 與 c、d 有相同的比，記作 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

按照這個定義，歐多克索斯便可以對命題 3 作出一個不必使用公度量的證明：

命題 3　同高的三角形，它們的面積之比等於其底長之比。

設 ΔABC 和 ΔACD 為兩個同高三角形。現要證明 $\frac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta ACD\text{ 的面積}} = \frac{BC}{CD}$。

對於任何的正整數 m 和 n，如圖 1.6 般，將 BC 延長成 EC，使 $EC=n\,BC$；將 CD 延長成 CF，使 $CF=m\,CD$。連結 AE 和 AF。易證 ΔAEC 的面積 $=n\times\Delta ABC$ 的面積，ΔACF 的面積 $=m\times\Delta ACD$ 的面積。

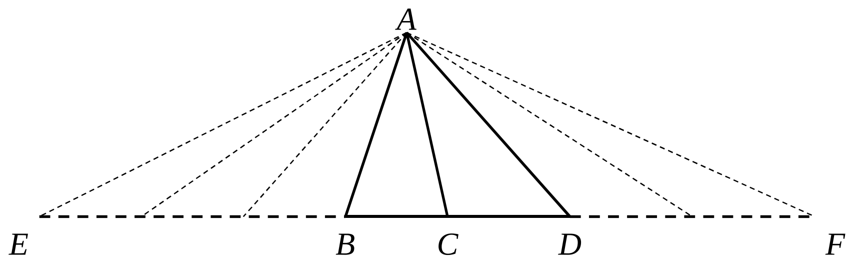


圖 1.6

同時，由於 ΔAEC 和 ΔACF 為同高三角形，因此可得到以下結果：

(I) 若 $EC<CF$，則 ΔAEC 的面積 $<\Delta ACF$ 的面積（為甚麼？）；

(II) 若 $EC=CF$，則 ΔAEC 的面積 $=\Delta ACF$ 的面積（命題 2）；

(III) 若 $EC>CF$，則 ΔAEC 的面積 $>\Delta ACF$ 的面積（為甚麼？）。

不過，已知 $EC = n\,BC$，$CF = m\,CD$，ΔAEC 的面積 $= n \times \Delta ABC$ 的面積，ΔACF 的面積 $= n \times \Delta ACD$ 的面積。所以前面三式可以改寫成：

(I) 若 $n\,BC < m\,CD$，則 $n \times \Delta ABC$ 的面積 $< m \times \Delta ACD$ 的面積；

(II) 若 $n\,BC = m\,CD$，則 $n \times \Delta ABC$ 的面積 $= m \times \Delta ACD$ 的面積；

(III) 若 $n\,BC > m\,CD$，則 $n \times \Delta ABC$ 的面積 $> m \times \Delta ACD$ 的面積。

這樣，上述三式便滿足歐多克索斯對比的定義，因此得 $BC : CD = \Delta ABC$ 的面積 $: \Delta ACD$ 的面積，或 $\dfrac{\Delta ABC\text{ 的面積}}{\Delta ACD\text{ 的面積}} = \dfrac{BC}{CD}$。命題 3 正式得證。

留意，在證明中，m 和 n 是任意選取的正整數。換言之，在證明的過程中，我們已經將 $\dfrac{BC}{CD}$ 和 $\dfrac{\Delta ABC\text{的面積}}{\Delta ACD\text{的面積}}$ 這兩個量與所有的有理數 $\dfrac{m}{n}$ 作比較，而圖 1.6 只是畫出了其中一個情況（即 $n = 4$ 和 $m = 3$ 的情況）。

進一步發展

歐多克索斯對比的新定義不單成功地為一個在古希臘時代難以證明的命題提供一個新的處理方法，從而化解了一場數學危機，更為後世數學家，提供了一個定義無理數的方法。

在歐多克索斯之後差不多 2300 年，德國數學家戴德金（Julius Wilhelm Richard Dedekind；1831 – 1916）發現當時的數學家雖然對正整數、負數、有理數、複數等作出了非常嚴格的數學定義，但偏偏卻缺少了對無理數的定義。於是在 1872 年，他借用了歐多克索斯的想法，提出了一個後世稱之為「戴德金分割」的方法來定義無理數。

戴德金的方法大概是這樣的：假設 $\mathbf{Q}$ 為所有有理數的集合（關於集合符號和意義，可參考本書第三次數學危機的討論），將 $\mathbf{Q}$ 分割成兩個子集 A_1 和 A_2，使在 A_1 中的任何一個元素都小於 A_2 中的任何一個元素。這時候，若在 A_1 或 A_2 中存在一個有理數 $\dfrac{m}{n}$，除了它本身之外，這個 $\dfrac{m}{n}$ 均大於 A_1 中的任何元素，但小於 A_2 中的任何元素，則戴德金將序偶 (A_1, A_2) 視為 $\dfrac{m}{n}$ 的另一種表達形式，即將 (A_1, A_2) 等價於 $\dfrac{m}{n}$。若從 A_1 和 A_2 中找不到一個滿

足上述條件的有理數，則將該序偶 (A_1, A_2) 視為一個無理數。

例如：

如果 $A_1=\{q\in\mathbf{Q}: q\le\frac{4}{3}\}$，$A_2=\{q\in\mathbf{Q}: q>\frac{4}{3}\}$，那麼便可以將 (A_1, A_2) 代表 $\frac{4}{3}$。又如果 $A_1=\{q\in\mathbf{Q}: q^2<2$ 或 $q<0\}$，$A_2=\{q\in\mathbf{Q}: q^2>2$ 及 $q>0\}$，那麼便可以將 (A_1, A_2) 視為 $\sqrt{2}$。

事實上，在戴德金的論文中亦強調，他所提出對無理數的定義方法，靈感是來自歐多克索斯的。

在結束本章之前亦順帶一提，歐多克索斯的數學成就除了提出比的新定義之外，亦曾經使用過一些類似微積分的方法來證明一個錐體的體積等於它同底等高柱體的三分之一。以公元前 300 多年的數學水平來說，這已經是一個了不起的成就了。

閱後練習

1. 證明兩個等底同高的三角形，它們的面積相等。

2. 證明任何兩個有理數之間，必定存在另一個有理數。

3. 如圖 1.7 所示，E 為正方形 $ABCD$ 對角線 AC 上的一點，使 $AB=AE$。設 F 為 BC 上一點，使 $EF\perp AC$。

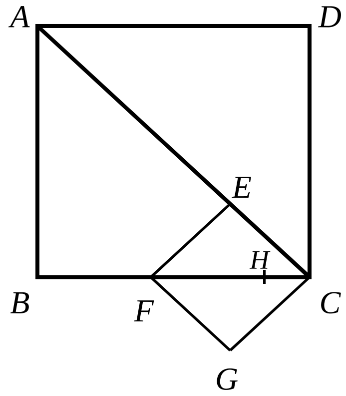


圖 1.7

(a) 證明 $EC=EF=BF$。

(b) 在圖 1.7 中，$FGCE$ 為一正方形，H 為 FC 上一點，使 $FG=FH$。觀察圖中正方形 $ABCD$ 與正方形 $FGCF$ 內的線段關係，解釋為何正方形的對角線 AC，與它底邊 BC 的輾轉丈量過程，將會永無止境地進行下去。

4. 利用代數方法證明 $\sqrt{2}$ 是一個無理數。

提示： 以反證法證明。假設 $\sqrt{2}$ 是一個有理數，即 $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$，其中 a 和 b 為正整數。不妨再假設 a、b 之間沒有公因數（為甚麼？），然後證明 a 和 b 卻同時是偶數，因而導出矛盾。

5. 圖 1.8 中，$ABCDE$ 為正五邊形，對角線 BE 分別交對角線 AC 和 AD 於 G 和 F。

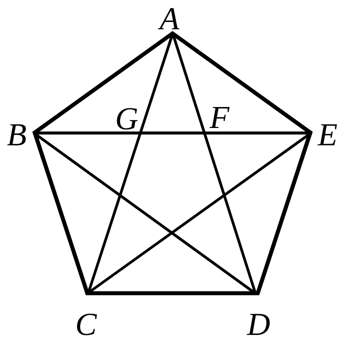


圖 1.8

(a) 證明 $\Delta ACD \sim \Delta BAF$。

(b) 證明若 $AB = 1$，則 $AC = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$；或一般地，$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

6. 圖 1.9 中，$AD // BE // CF$，又截線 AC 交 BE 於 B，截線 DF 交 BE 於 E。

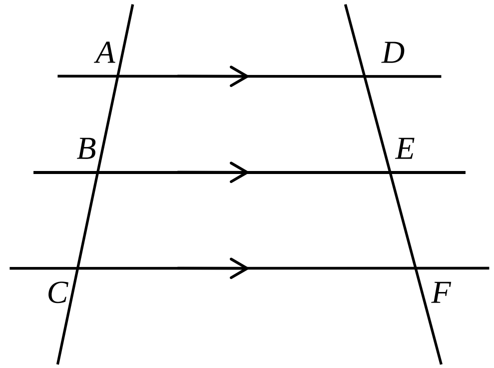


圖 1.9

(a) 利用全等三角形及平行四邊形性質，證明：若 $AB = BC$，則 $DE = EF$。

(b) 利用全等三角形及平行四邊形性質，證明：若 $AB : BC$ 為一有理數，則 $AB : BC = DE : EF$。

(c) 利用本章中的命題 1 及平行四邊形的性質，證明：$AB : BC = DE : EF$。

第二次數學危機：微積分理論的基礎

從公元 5 世紀到 11 世紀期間，歐洲經歷了一段科學及文化發展的黑暗時期。那時候，人們的科學研究和文化活動都被遏止。踏入 12 世紀，由於政治、宗教的環境改變，再加上歐洲人與阿拉伯世界的貿易往來，因而使歐洲人重新研究科學，並將散落於阿拉伯世界的古希臘數學與科學文獻翻譯成拉丁文，令它們得以重生，並且在歐洲大陸廣泛流傳。

歷史學家稱 15 世紀和 16 世紀是歐洲的「文藝復興時期」。在政治變革、戰爭、航運、通商、火藥和印刷術傳入等等的因素影響下，數學和科學活動得以蓬勃地發展，數學家亦更普遍地、更有效地使用數學符號。在這期間出現了一些非常重要的人物，例如：哥白尼（Nicolaus Copernicus；1473 – 1543）、伽利略（Galileo Galilei；1564 – 1642）、開普勒（Johannes Kepler；1571 – 1630）和笛卡兒（René Descartes；1596 – 1650）。前三者改變了人類對天體運動和物理的想法，後者引進了坐標幾何，將代數方法引入幾何研究之中。

到了 17 世紀，科學研究的風氣更盛。在戰爭和航運的需求帶動下，科學家和數學家面對四類新的數學問題，急須尋求解決方法。它們是：

(i) 已知物體移動距離和時間的函數公式，求該物體在任意時刻的速率和加速率。反之，由加速率的函數公式求速率和距離。

(ii) 已知曲線的方程，求該曲線切線的方程。

(iii) 求函數的極大值和極小值。

(iv) 求曲線長度、曲線圍成的面積、曲面圍成的體積等。

正因上述的四類問題，促使數學家在 17 世紀創立了微積分。

微積分的創立

到今天，一般歷史學家都認為，微積分是由兩位科學家獨立地發現的。第一位是英國的牛頓（Isaac Newton；1643 – 1727）。1661 年，牛頓進入了劍橋大學的三一學院。1664 年，當他大學畢業時，學校卻因爆發鼠疫而關閉。在 1665 至 1666 年間，他回到家鄉，在悠閒平靜的生活環境下，創造和發現了三個重要的成果，那就是流數法（即微積分）、萬有引力和光譜分析。當時的牛頓，也只不過是一個 23 歲

的年青人！不過，由於他個性謹慎，不輕易將一些他認為未夠成熟的發現公開發表，因此有關微積分的著作到了 1687 年才公諸於世。

另一位發現微積分的科學家是德國的萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz；1646 – 1716）。萊布尼茲不單是一名數學家，他亦是一位哲學家，他的哲學思想更曾經影響過歐洲的哲學發展。而他對微積分的研究開始於 1675 年，並在 1684 年發表第一篇相關的學術論文。他起步雖然比牛頓遲，但發表論文的時間卻比牛頓早。

雖然牛頓到 1687 年才首次公開發表他對微積分學說的研究成果，但是在 1666 至 1687 年間，他其實有透過書信與其他學者討論他的發現。由於這個原因，當時的人們懷疑，究竟萊布尼茲有沒有從其他學者口中得悉牛頓的研究成果，並搶先將這些結果發表呢？萊布尼茲是否剽竊了牛頓的成果呢？很快，一場微積分的發現優先權的爭論便在英國和歐洲大陸之間展開了。

在今天來看，這個「發現優先權」只不過是一個虛名。要知道，微積分並不是由一個人憑空想像出來的。事實上，牛頓亦曾經說過：「**倘若我比別人看得更遠，那是因為我站在巨人的肩膀之上。**」牛頓所謂的「巨人」，是指在他之前

的數學家和科學家。沒有前輩的努力，為後來者建立了適當的基礎，縱使有牛頓或萊布尼茲般的智慧，相信也不可能產生如此偉大的成果。相反，由於前輩的努力，其實已經為微積分的發現創造了成熟的條件，因此即使當時世上沒有牛頓和萊布尼茲這兩個人物，微積分亦遲早會由其他人所發現。

一個與速率有關的問題

為了令大家瞭解微積分究竟是怎樣的一回事，現在舉一個假想的例子作闡釋：

問題：　某人參加 100 米短跑。比賽開始後 t 秒，他跑了 x 米，其中 $x = t^2$。問比賽開始後第 2 秒，他的速率是多少？

問題中那個人的跑步習慣也真奇怪，在最初的兩三秒中，他似乎跑得很慢。比賽開始後 1 秒，他跑了 1 米；開始後 2 秒，他跑了 4 米；到了第 3 秒，他亦只不過跑了 9 米。一般的中學生都會跑得比他快！不過，這個人到第 10 秒時，將會跑到 100 米。相信在這世上，能夠在 10 秒內跑畢 100 米的人不多，而他卻是其中之一！正因為他的速率變化很大，所以吸引我們問：他在某一時刻裏，例如比賽開始後的第 2 秒，他的速率是多少呢？

由於開始時那人沒有走動，到第 10 秒時卻跑到 100 米的終點，又由於速率 $= \dfrac{\text{距離}}{\text{時間}}$，因此他的速率 $= \dfrac{100}{10} = 10$，即每秒 10 米。

很明顯，上述的方法只是計算了那人由 0 至 10 秒間的「平均速率」，而明顯那人在每一個時段的速率都不相同，因此這個平均速率一定不會令人感到滿意。

或者，我們可以將計算的時間範圍收窄，只計算由第 2 至第 3 秒間的變化。由於當 $t = 2$ 時，$x = 2^2 = 4$；當 $t = 3$ 時，$x = 3^2 = 9$，因此速率 $= \dfrac{9-4}{3-2} = 5$，即每秒 5 米。相信這個答案應該比之前的答案更接近於真實的情況。

如果我們想得到一個更好的結果，那麼我們便要將時間範圍進一步縮窄。例如計算由第 2 秒至 2.5 秒的變化：當 $t = 2$ 時，$x = 2^2 = 4$；當 $t = 2.5$ 時，$x = 2.5^2 = 6.25$，因此速率 $= \dfrac{6.25-4}{2.5-2} = 4.5$，即速率為每秒 4.5 米。

當然，如果我們對上述的結果依然感到不滿意，那麼我們可以繼續將時間範圍縮窄。但這樣不斷地重複計算，不單花時間，亦不知應該到哪個時候才可以獲得一個令人滿意的結果，十分費時失事。為了克服這個困難，牛頓便

引入他的「流數」觀念。

「流數法」的最關鍵思想，是以一個代數符號 Δt（牛頓稱之為「流數」；注意：「Δt」是一個代數符號，代表一個未知量，而並非表示有一個叫“Δ”的數值乘以「t」的乘積）來代表時間範圍的闊度，即我們考慮由 $t = 2$ 至 $t = 2 + \Delta t$ 時，x 值的變化；而不是像前面那樣，個別地考慮由 $t = 2$ 至 $t = 3$ 或 2.5（一個固定並且已知的數值）時的變化。

當 $t = 2$ 時，$x = 2^2 = 4$；當 $t = 2 + \Delta t$ 時，$x = (2 + \Delta t)^2 = 4 + 4(\Delta t) + (\Delta t)^2$。因此，速率為 $\dfrac{4+4(\Delta t)+(\Delta t)^2-4}{(2+\Delta t)-2} = \dfrac{4(\Delta t)+(\Delta t)^2}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(4+\Delta t)}{\Delta t} = 4+\Delta t$。

細心想想不難發現，這個結果跟前面的計算是沒有分別的。如果我們計算的時間範圍是由 $t = 2$ 至 $t = 3$，那麼 Δt 應該等於 1，而速率 $= 4 + \Delta t = 4 + 1 = 5$，與前面的結果吻合。又如果時間範圍是 $t = 2$ 至 $t = 2.5$，則 $\Delta t = 0.5$，而速率 $= 4 + \Delta t = 4 + 0.5 = 4.5$，亦與前面的結果吻合。

不過，牛頓認為，既然我們希望計算那人在第 2 秒時的速率，那麼所選取的時間範圍應該越小越好，即 Δt 應該

越小越好。換言之，如果 Δt 非常之小，小至是一個可以被忽略的數值時，那麼便可以求得該人在第 2 秒時的速率。由於速率 $=4+\Delta t$，因此忽略了 Δt 之後便得到速率 $=4$，即速率為每秒 4 米。

不難發現，傳統計算速率的方法是先選定了 Δt 的值，然後才代入速率的公式之中。由於 Δt 在開始時已經選定了，最後計算出來的結果亦只不過是一個在很小時間範圍內的平均速率。無論怎樣，這結果總令人覺得它與真實情況有一點兒的差距，欠缺說服力。相反，牛頓的計算方法是一個非常聰明的做法，他借助一個代數符號，先簡化了計算速率的算式，然後才把那個符號所表示的數值趨向 0，從而計算出所需的答案。

除此之外，微積分的方法也可用來解決本章開始時所提及的四個數學難題。事實上，牛頓和萊布尼茲同時發現，計算面積的方法與計算速率的方法關係密切，亦將這結果寫成一個重要的定理，並稱之為「微積分基本定理」。一般微積分教科書均有提及這定理，故在此不贅了。

對微積分的抨擊

微積分的出現，就好像為數學家帶來一件威力無比的武器。利用這件武器，他們在數學世界中，征服了不少的數學難題。不過，在成功的背後，數學家同時注意到，這件武器的理論基礎是十分薄弱的，很多時候，微積分的方法甚至是自相矛盾和難以自圓其說的。

以前面的速率問題為例。牛頓的方法是先設一個流數 Δt，然後代入計算速率的算式中，得速率 $=\dfrac{4(\Delta t)+(\Delta t)^2}{\Delta t}=4+\Delta t$，最後由於 Δt 非常小，可以忽略，因此便認為速率最終等於 4。但既然 Δt 是「非常小」的，那麼這是否表示這個 Δt 等於 0 呢？如果 $\Delta t=0$，那麼分式 $\dfrac{4(\Delta t)+(\Delta t)^2}{\Delta t}$ 豈不是等於 $\dfrac{0}{0}$ 嗎？這個 $\dfrac{0}{0}$ 應如何理解呢？又如果 $\Delta t\neq 0$，那麼為何 $4+\Delta t$ 可以等於 4 呢？

18 世紀初，英國有一位天主教神父，名叫伯克利（George Berkeley；1685 – 1753），他年青時曾經研習過數學，亦發表過一些數學論文。其後，他轉攻神學，並於 1734 年獲委任為主教。在同一年，他發表了一篇文章，名為《分析學者，或致一個不信教的數學家；其中審查現代分析的對象、原則與推斷是否比之宗教的神秘與信條，構思更為

清楚，或推理更為明顯》，嚴厲地批評了當時數學家所採用的微積分方法，並認為這些方法表面上看起來很合理，但實際上是不科學的，等同於迷信。伯克利說：「甚麼是流數？它是瞬間增加的速率。但這個瞬間增加又是甚麼？它們既不是有限量，又不是無窮小，它們甚麼也不是。我們可否稱它們為消失了的量的鬼魂？」

伯克利更指出，微積分法的理論基礎並不可靠，目前一些看似合理的計算結果，只不過是幸運地得來罷了。他說：「這是依靠雙重的錯誤而得到了雖然不科學，但卻是正確的結果。」

踏入 18 世紀，數學家發現了另一個有用的解題工具，叫做「無窮級數」。簡單來說，無窮級數是無窮數列的總和，即是將一些具有一定規律的數字由第一項起，一直加至無窮多項。例如：$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ 便是一個無窮級數。由於初期的數學家在使用無窮級數時，並沒有對 x 值作出任何限制，因此產生了很多不合理的結果，嚴重影響了這方法的可信性。例如：設 $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$，則 $xS = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$。兩邊加上 1，得 $1 + xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = S$，即 $S - xS = 1$。由此得 $\frac{1}{1-x} = S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$。在這裏，連大數學家歐拉

（Leonhard Euler, 1707 – 1783）也認為，可以將 $x = -1$ 代入上式中，得到 $\frac{1}{2} = \frac{1}{1-(-1)} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$。

不過，有數學家認為，如果將 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ 寫成 $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$，那麼 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ 便會等於 $0 + 0 + 0 + \ldots = 0$。但若果將 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ 寫成 $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots$，則 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ 便等於 $1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$。同一個級數之和，竟然有 3 個不同的答案（即 $\frac{1}{2}$、1 和 0）！究竟誰對誰錯呢？當時的數學家之間對此結果也爭論不休。

事實上，在 17 至 18 世紀發展出來的微積分學說有一個奇特的現象，一方面它的威力很強，可以用來破解很多數學難題，另一方面它的基礎十分薄弱，連數學家本身也難於自圓其說。相信大家都明白，將各種科學知識建築在一個鬆散的基礎上是十分危險的，萬一當中隱藏著一些不能預見的錯誤，那麼引發出來的破壞，是難以估計的。因此，有學者稱這段時期為數學史上的「第二次數學危機」。

微積分的嚴密化

17 和 18 世紀的數學家以無比的創意和勇氣，創立了微積分，成功地解決了很多的難題，但同時又帶來了很多爭論和矛盾。到了 19 世紀，數學家決心要改變當時的混亂情況，要為微積分的理論，建立更堅實的基礎。對於這方面有顯著成績的數學家包括有：波爾查諾（Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano；1781 – 1848）、柯西（Augustin Louis Cauchy；1789 – 1857）、阿貝爾（Niels Henrik Abel；1802 – 1829）、狄利克雷（Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet；1805 – 1859）和黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann；1826 – 1866）等。其中狄利克雷提出了今天依然通用的函數定義；波爾查諾分析了函數的連續性，並且提出導數的定義；黎曼提出定積分的嚴格定義；柯西則對無窮級數的收斂性作出研究。

柯西認為，我們不可以隨意地將任何數值代入無窮級數之中。只有能夠滿足某些特定條件的值，才可以接受為合理的結果；否則那些結果都不正確，不可以接受。以前面討論過的無窮級數 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ 為例，我們可以證明，當 $|x| < 1$ 時，這個級數才有意義，並收斂於 $\frac{1}{1-x}$。換言之，歐拉把 $x = -1$ 代入這級數的做法，是不容許的。

魏爾斯特拉斯的定義

在繼續討論極限的定義之前，讓我們先回看前面那個計算速率的問題。在那個例子中，我們發現，當 Δt 非常小時，分式 $\frac{(2+\Delta t)^2 - 2^2}{\Delta t}$ 會很接近 4。我們記之為 $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(2+\Delta t)^2 - 2^2}{\Delta t} = 4$，即當 Δt 趨向或接近 0 時，那個分式的極限為 4。

為了方便以後的討論，現在將 $2 + \Delta t$ 代換成 x，所以移項後，Δt 便變成 $x - 2$，而當 Δt 趨向 0 時，x 則趨向 2。因此我們可以將上式改寫成 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$。可是，這個算式又有甚麼意義呢？如果它表示當 x 越來越接近 2 時，$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 會越來越接近 4，那麼那句「越來越接近」又應該怎樣解釋呢？要與 2 和 4 有多近，我們才稱之為「接近」呢？

說也奇怪，雖然前面提過的數學家都能成功地為許多微積分的概念注入嚴謹的定義，但偏偏對這個「越來越接近」的概念，卻表達得十分含糊。直到一位曾經任教中學的數學家提出他的方法後，情況才得以改善。他就是魏爾斯特拉斯。

魏爾斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass；1815 – 1897），德國人，起初學習法律，到了 1838 年轉習數學。1841 至 1856 年間，他是一名中學教師，1859 年才到柏林大學任教。從那時起，他開始發表他對微積分的研究成果。

魏爾斯特拉斯採用了一種間接描述的方式來定義極限。要知道，「越來越接近」這個概念是因人而異的。又以上式為例，可能有人會認為，只要分式 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 介乎於 4 ± 0.05 之間，即滿足不等式 $3.95 < \dfrac{x^2-4}{x-2} < 4.05$，他便會將 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 理解為「它非常接近 4」了；但也許會有一些要求較高的人認為，只有當 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 介乎於 $4 \pm 0.000\,001$ 之間，即 $3.999\,999 < \dfrac{x^2-4}{x-2} < 4.000\,001$ 成立時，他才會接受 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 接近於 4。

不過，魏爾斯特拉斯指出，任何一個人，無論他的要求是高還是低，只要極限存在，那麼一定可以找到一個數值範圍給 x，當 x 進入這個範圍時，分式 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 總會落入那些人所指定的數值範圍之內，令不等式成立，從而滿足每一個人的要求。事實上，不難證明，除 $x = 2$ 的情況

外，只要 x 介乎於 2 ± 0.05 之間，即滿足 $1.95 < x < 2.05$，那麼分式 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的數值便會介乎於 4 ± 0.05 之間，即 $3.95 < \dfrac{x^2-4}{x-2} < 4.05$ 成立；又只要 x 介乎於 $2 \pm 0.000\,001$ 之間，即滿足 $1.999\,999 < x < 2.000\,001$，那麼 $3.999\,999 < \dfrac{x^2-4}{x-2} < 4.000\,001$ 便成立。我們更可以進一步證明，對於任何一個正數 ε，總能找到一個 δ（請讀者不要害怕碰見 ε 和 δ 這兩個希臘字母。在傳統的微積分學中，數學家都習慣使用希臘字母作為符號。如果大家不習慣，那麼可以將他們當成英文字母 e 和 d 來考慮），除 $x = 2$ 外，當 x 介乎於 $2 \pm \delta$ 時，即當 $2 - \delta < x < 2 + \delta$ 時，分式 $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 必定介乎於 $4 \pm \varepsilon$ 之間，即 $4 - \varepsilon < \dfrac{x^2-4}{x-2} < 4 + \varepsilon$（詳細證明見本章課後練習）。因此我們可以稱，當 x 趨向 2 時，$\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的極限等於 4，並記之為 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$。

將以上的想法轉換成更具一般性的概念，魏爾斯特拉斯便得到以下一個對函數極限的嚴謹定義：

定義　若對於任何一個 $\varepsilon > 0$，總能夠找到一個 $\delta > 0$，令除 $x = x_0$ 外，當 x 介乎 $x_0 \pm \delta$ 時，即當 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 時，$f(x)$ 必定介乎於 $L \pm \varepsilon$ 之間，即 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ 必定成立，那麼我們稱 L 為 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的極限，即當 x 趨向於 x_0 時，$f(x)$ 會趨向於 L；並記之為 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$。

這個定義不單可以避免使用「越來越接近」之類含糊不清的的字眼，而且更可以由這個定義作出對所有極限運算法則(例如：$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$)的嚴謹數學證明。因此，魏爾斯特拉斯的定義是十分成功的，亦成為今天分析學中不可缺少的課題。

第二次數學危機的結束

由於科學技術發展上的需求，因此 17 世紀的數學家發明了微積分。可惜他們對「無窮小」、「極限」、「函數」、「無窮級數求和」等概念認識不足，因而引發歷史上的第二次數學危機。經過兩個世紀數學家的努力，終於找到解決方法，並為微積分學說注入嚴謹的數學思想，引入諸如對極限的定義、函數的「連續性」、「可導性」、「可積性」、無窮級數的「收斂性」等概念，成功地化解了一場危機。

這個故事可以帶給我們三個重要啟示：一、我們今天所學的數學內容，並非由一兩個傑出的天才所發明或發現

的，而是經過無數的數學家努力而得來的，是人類心血的結晶。二、數學危機的出現，促使數學家深入地探討最棘手的問題，從而創造出更偉大的成果。而數學內部的矛盾，亦可成為推動數學發展的力量。三、數學家並非在研究微積分的初期，便掌握了它的嚴謹理論，即使是牛頓、萊布尼茲或歐拉等大數學家，亦曾經犯上不同程度的錯誤，所以在學習微積分的初期，不應該過分地強調有關的基礎理論，但如果希望在這方面有所發展，那麼它的嚴謹概念，便不可不知了。

閱後練習

1. 利用牛頓流數的方法，解以下問題：

   假如某人參加 100 米短跑。比賽開始後 t 秒，他跑了 x 米，其中 $x = t^2$。問比賽開始後第 8 秒，他的速率是多少？

2. 設 $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$，其中 n 為正整數。

   證明當 $x \neq 1$ 時，$S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$。

   由此證明當 n 趨向無窮大，並且 $|x| < 1$ 時，

   $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}。$$

   （試想想，在證明中，在哪裏使用了 $|x|<1$ 的條件？）

3. (a) 證明：除 $x = 2$ 外，當 $1.95 < x < 2.05$ 時，$3.95 < \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} < 4.05$。

   提示：試將 $x^2 - 4$ 分解成為因式，並留意 $x \neq 2$。

   (b) 證明：除 $x = 2$ 外，當 $1.999\,999 < x < 2.000\,001$ 時，$3.999\,999 < \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} < 4.000\,001$。

   (c) 證明：對於任何一個正數 ε，總能找到一個 δ，令除 $x = 2$ 外，當 $2 - \delta < x < 2 + \delta$ 時，$4 - \varepsilon < \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} < 4 + \varepsilon$。

   提示：要證明此題，先要明白「總能找到一個 δ」這句話的意思。其實它是指，當知道 ε 的數值後，總可以按 ε 的數值找到一個 δ，使它滿足有關的不等式。換言之，所謂的證明，就是要寫出 ε 和 δ 之間的關係。事實上，經過前面 (a)、(b) 兩題的計算後，相信亦不難猜想 ε 和 δ 之間有甚麼關係。

4. 證明以下兩個命題等價：

   (i) $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 及 $x \neq x_0$

   (ii) $0 < |x - x_0| < \delta$

   由此解釋為何魏爾斯特拉斯對極限的定義可改寫成以下形式：

   定義　若對於任何一個 $\varepsilon > 0$，總能夠找到一個 $\delta > 0$，當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時，恒有 $|f(x) - L| < \varepsilon$，那麼稱 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的極限為 L，並記之為 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$。

5. 假設當 $x \to x_0$ 時，函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均存在極限值。試利用魏爾斯特拉斯對極限的定義，證明 $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$。

提示： 設 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = M$。

先證明，對於任何的 $\varepsilon > 0$，總能找到 δ_1 和 δ_2，

當 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 時，$|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 及

當 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 時，$|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$。

然後由上述結果證明能夠找到一個 δ，

當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時，

$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$。

第三次數學危機：集合論的基礎

康托（又譯康托爾，Georg Cantor；1845 – 1918），出生於俄國的聖彼得堡，猶太人後裔。11 歲時遷入德國，1867 年獲得柏林大學的博士學位，1872 年升為教授。1874 年開始引進他的無窮大概念，從而創造出「集合論」，成為一個數學新思維的創造者。

甚麼是集合？

康托說：「把若干確定的、有區別的（具體的或抽象的）事物聯合起來，看作一個整體，就是一個『集合』，集合中的各事物則稱為該集合的『元素』。」

話說當年康托正研究一些三角級數的性質，由於他需要一個有系統的方法來表達某些方程解的數量，因此提出將那些解聯合起來的想法，從而發展出一個新的數學概念：集合。

根據康托的意思，把一些具有相同性質的東西放在一起，便成為一個集合。例如：所有的正整數可以組成一個集合，並稱之為「自然數集」；所有有理數可以組成一個集合，叫做「有理數集」；所有實數又可以組成一個叫做「實

數集」的集合。為了方便表達，我們可以用一個字母來表示一個集合，例如：以 **N** 表示自然數集；以 **Q** 表示有理數集；以 **R** 表示實數集等。

組成一個集合的事物，康托稱之為「元素」。例如：3 是 **N** 的元素，亦可以說「3 屬於 **N**」。同時，康托以符號「$3 \in \mathbf{N}$」來表示上述的關係。又因為 -1 不是正整數，所以我們用「$-1 \notin \mathbf{N}$」來表示 -1 不屬於 **N** 的意思。

我們可以用文字來描述一個集合，例如：M 的所有元素都是 3 的（正）倍數。我們可以使用「大括號」列出集合中的元素，例如：$M = \{ 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , \ldots \}$。又或者用符號加文字的方式來表示集合，$M = \{ x \in \mathbf{N} : x \text{ 是 3 的倍數} \}$。

集合之間有兩個基本的運算：$A \cap B = \{ u : u \in A \text{ 及 } u \in B \}$ 和 $A \cup B = \{ u : u \in A \text{ 或 } u \in B \}$。例如：$A = \{ a , b , c , d , e \}$，$B = \{ d , e , f \}$，則 $A \cap B = \{ d , e \}$，$A \cup B = \{ a , b , c , d , e , f \}$。我們稱 $A \cap B$ 為 A 與 B 的「交集」，$A \cup B$ 為 A 與 B 的「併集」。

如果一個集合 A 中的所有元素都屬於另一個集合 B，那麼我們稱 A 是 B 的「子集」，並記之為 $A \subset B$。換言之，如果可以找到一個元素 x，使 $x \in A$，但 $x \notin B$，那麼 A 就

不是 B 的子集了。留意，根據定義，任何一個集合也是它本身的子集，所以我們總會有 $A \subset A$。

一個沒有任何元素的集合叫做「空集」，以符號 $\varnothing$ 表示。可以證明，空集是任何一個集合的子集，即對於任何一個集合 A，$\varnothing \subset A$。事實上，假設存在一個集合 A 使 $\varnothing$ 不是它的子集，那麼根據子集的定義，必定存在一個元素 x，使 $x \in \varnothing$，但 $x \notin A$。不過，由於 $\varnothing$ 是空集，它沒有元素，因此不可能找到 x，使 $x \in \varnothing$，這定義與前面的推論矛盾！

為甚麼會出現前後矛盾的結論呢？這是由於我們在開始的時候，作出了一個錯誤的假設所致：我們假設了存在一個集合 A 使 $\varnothing$ 不是它的子集。因此，不可能有一個集合，使 $\varnothing$ 不是它的子集。直接地說，就是對於任何的一個集合 A，$\varnothing$ 都是它的子集，即 $\varnothing \subset A$ 必定成立。

請留意：在上述的討論中，我們使用了「反證法」。我們首先假設打算要證明的命題是錯的（例如：我們打算證明 $\varnothing$ 是 A 的子集，那麼我們先假設 $\varnothing$ **不是** A 的子集），然後利用邏輯推理的手法找出一些前後矛盾、意思相反的結果（例如：已知 $\varnothing$ 是空集，但我們卻發現有一元素 x，$x \in \varnothing$）。由此我們知道我們的假設是不正確的，繼

而得知原本的命題（即 $\varnothing \subset A$）成立。反證法是一個在數學上常用的論證方法，除了集合論外，亦大量應用於幾何學中。

在集合論中，康托提出了一種很獨特的集合，叫做「冪集」。由 A 的所有子集組成的集合，就是 A 的冪集，記之為 $\wp(A)$。例如：若 $A = \{ a , b \}$，則由於 A 的所有子集為 $\varnothing$、$\{ a \}$、$\{ b \}$ 和 $\{ a , b \}$，因此 $\wp(A) = \{ \varnothing , \{ a \} , \{ b \} , \{ a , b \} \}$。又若 $A = \{ a , b , c \}$，則 $\wp(A) = \{ \varnothing , \{ a \} , \{ b \} , \{ c \} , \{ a , b \} , \{ a , c \} , \{ b , c \} , \{ a , b , c \} \}$。

如果 A 只有有限多個元素，那麼我們稱 A 為「有限集」並用符號 $n(A)$ 來表示 A 中元素的數量。又假如 $n(A) = m$，那麼不難證明 $n(\wp(A)) = 2^m$（見本章閱後練習）。如果 A 有無窮多個元素，那麼我們稱 A 為「無窮集」。前面提及過的自然數集 **N**、有理數集 **Q** 和實數集 **R**，都是無窮集的例子。

如果 A 和 B 是兩個有限集，那麼我們可以通過比較 $n(A)$ 和 $n(B)$ 的數值來比較 A 和 B 的大小。但如果 A 和 B 都是無窮集，那麼我們如何比較兩個集合的大小，從而得知哪一個集合會有較多的元素呢？

在這裏，康托提出了一個比較兩個集合（不論是有限

集還是無窮集）的方法，就是在兩個集合之間建立「一一對應」的關係。如果我們可以在兩個集合 A 和 B 之間建立起一個聯繫，使 A 中的每一個元素 a，都會對應於 B 中唯一的一個元素 b，即這個 a 除了 b 之外，再不會和任何一個 B 中的元素對應；相反，在 B 中的每一個元素，亦只會對應於 A 中唯一的一個元素，那麼我們便說 A 與 B 之間存在著一一對應的關係。不難想像，當兩個集合之間能夠建立一個一一對應關係時，兩個集合的大小必定相等；否則便會有一個集合有較多的元素（關於比較兩個無窮集大小的具體例子，可參閱下一章）。

康托曾經證明：對於任何集合 A（不論是有限集還是無窮集），冪集 $\wp(A)$ 的元素一定會比 A 的元素為多。我們再以反證法來證明這個命題。

假如有一個集合 A，冪集 $\wp(A)$ 的元素和 A 的元素一樣多，那麼 $\wp(A)$ 和 A 之間必定存在一個一一對應的關係。如果 x 是 A 中的一個元素，那麼記在 $\wp(A)$ 中與 x 對應的元素為 $f(x)$。由於 $f(x)$ 是 $\wp(A)$ 中的元素，因此 $f(x)$ 亦是 A 的一個子集。由於 $x \in A$，因此在這情況下，出現了兩種可能性：一、$x \in f(x)$；二、$x \notin f(x)$。現在將所有出現第二種可能性的元素組成一個新的集合 B，即 $B = \{ x \in A : x \notin f(x) \}$。由定義可知，$B$ 是 A 的一個

子集，因此它亦是 $\wp(A)$ 中的一個元素。根據前面的一一對應關係亦可知，必定可以找到一個 $x_0 \in A$ 與 B 對應，即 $f(x_0) = B$。現在要問：究竟這個 x_0 又是否 $f(x_0)$ 中的一個元素呢？

我們亦將這個問題分成兩種情況來考慮：一、假如 $x_0 \in f(x_0)$，因為 $f(x_0) = B$，所以 $x_0 \in B$，則由 B 的定義可知 $x_0 \notin f(x_0)$，矛盾！二、假如 $x_0 \notin f(x_0)$，則 x_0 符合 B 的定義，因而得 $x_0 \in B$，即 $x_0 \in f(x_0)$，矛盾！由此可見，無論 x_0 是否屬於 $f(x_0)$，我們總會得到一個自相矛盾的結果！

為甚麼會出現自相矛盾的結果呢？這是由於我們在開始的時候，做了一個錯誤的假設所致。我們在開始的時候假設了冪集 $\wp(A)$ 的元素和 A 的元素一樣多，因而得到矛盾。又由於冪集 $\wp(A)$ 的元素不可能少於 A 的元素，因此我們知道冪集 $\wp(A)$ 的元素一定比 A 的元素為多。這就是康托偉大而精彩的證明了。

由反對到接受

我們看到，康托以一個大膽、創新的思維，創造出一個奇妙的數學世界。可惜集合論在發表的初期，卻得不到當時的一些前輩數學家的支持和接受。那些前輩的大力反對，亦為康托帶來沉重的打擊，使他精神崩潰，甚至患上精神病。

但與此同時，亦有數學家將集合論引入數學基礎、分析學、測度論與拓撲學的研究之中，並且得到了豐碩的成果。例如：數學家以集合的概念和符號來定義正整數、整數（包括零及負整數）、有理數和無理數等，還以集合來定義它們之間的運算法則，將數學運算建立在一個既統一又簡潔的平台之上。事實上，到了 19 世紀的末期，集合論已經成為研究數學的一個基礎。

可是，正當大眾開始接受和使用集合論之際，隱藏在集合論中一些不合理的悖論，卻突然間在眾人面前出現，動搖了整個數學的根基，從而引發起數學史上的「第三次數學危機」！

悖論的出現

悖論是指一些前後自相矛盾的數學推論。乍看之下，它與反證法差不多，但兩者之間卻有一個本質上的差別。反證法是一個證明數學命題的方法。我們先假設某命題是錯誤的，從而按數學推理得出一些前後自相矛盾的結論。在這裏，得到矛盾的原因，是因為我們作了一個錯誤的假設，所以只要我們修正我們的假設，那麼一切便會回復正常，亦由此得知我們要證明的命題是正確的。但悖論卻有所不同。我們最初由一些大眾已經接受的基礎出發，經過一些推理之後，如果我們可以獲得到兩個意思完全相反的結果，那麼這些結果便被稱為「悖論」(或稱「詭論」或「謬論」)。由於我們只是從一些基礎知識出發，當中並沒有作出任何不為人們所接受的假設，因此悖論實際存在於我們的數學體系之中，並且無法將之排除。從邏輯學的角度來看，悖論可以令所有合理和不合理的命題都變為成立。因此，悖論的出現打擊了集合論的理論基礎，令所有的數學研究都變得沒有意義。

說也諷刺，最先發現悖論的人，就是他的創造者！康托於 1895 年發現了一個悖論，但到了 1932 年（即他死後 14 年）才由他的朋友公諸於世。康托悖論是這樣的：假如 U 是一個包括世上所有集合的集合，那麼它應該是世上最

大的集合，而它的元素數量將會是世界上最大的數。但康托曾經證明，對於任何的集合，它的冪集必定會比它有更多的元素，因此冪集 $\wp(\mathrm{U})$ 有比 U 更多的元素。但既然 U 已經是世上最大的集合了，那麼 $\wp(\mathrm{U})$ 的元素數量又是多少呢？這明顯是一個自相矛盾的情況！

在 1897 年，意大利數學家布拉利福爾蒂（Cesare Burali-Forti；1861 – 1931）亦發現了一個類似於康托悖論的悖論。

在 1906 年，法國數學家理查德（Jules Antoine Richard；1862 – 1956）提出了另一個悖論：將自然數集 **N** 分成兩個子集 A 和 B。子集 A 包括所有可以用不多於一百個中文字（注意：由於本書以中文編寫，故在這裏要求使用中文字來描述有關的集合，但同樣的推理，絕對可以使用於其他語言文字之上）描述出來的整數，而子集 B 則包括所有不論怎樣都必須用多於一百個中文字才能描述出來的整數。留意：根據理查德的意思，只要我們能夠找到一句少於一百字的句子來描述某一個數，那麼那個數就必定屬於 A。因此，在 B 中，所有的元素都必須以多於一百個中文字來描述。亦由此可見，A 與 B 互不相交，即 $A \cap B = \varnothing$。

現在要問：不能以一百個或更少中文字來描述的整數中，最小的一個整數，是屬於哪一個集合呢？

乍看之下，大家可能會認為這個數屬於 B，原因是這個數必須以多於一百個中文字來描述。但請數一數，「不能以一百個或更少中文字來描述的整數中，最小的一個整數」這句話中，即使包括了句中的逗號，全句也只不過有 27 個字，它應該屬於 A！換言之，這個數屬於 A 與 B 的交集 $A \cap B$。但前面已經證明了，$A \cap B = \varnothing$，矛盾！

羅素悖論

然而，在芸芸眾多的悖論中，相信最令人感到震撼的，應該是由英國哲學家羅素（Bertrand Arthur William Russell；1872 – 1970）於 1901 年所提出的悖論了。這個悖論簡單直接，只是由最基本的集合語言構成，並沒有像前面提及的三個悖論那樣，涉及複雜的集合推理技巧。

根據康托對集合的定義，一個集合可以是自己的元素，亦可以不是。例如：所有能夠以二十一個中文字來描述的物件的集合，由於描述這個集合時，剛好使用了二十一個中文字，因此它本身就是自己的一個元素。又例如：所有書籍的集合，因為它本身不是一本書，而是一個集合，所以它不是本身的集合。

這時，羅素問：所有本身不包括自己為元素的集合所組成的集合，又是否它自己的元素呢？即如

果 $N = \{ X : X \notin X \}$，那麼 $N \in N$，還是 $N \notin N$？

若 $N \in N$，則由 N 的定義得 $N \notin N$，矛盾！若 $N \notin N$，則 N 符合 N 的定義，由此得 $N \in N$，矛盾！由此可見，無論 N 是否屬於它自己，總會得到一個自相矛盾的結果！

為甚麼會出現前後矛盾的結果呢？這一點卻不能在康托的集合論中解釋了！回顧上述的推理，從 N 的定義到所有的演繹過程，一切都按照康托對集合論的理解而進行，當中亦沒有做過任何不合理的假設或推論，但卻得到這樣不合理的結果。那麼毛病究竟出現在哪裏呢？

1918 年，羅素為他的「羅素悖論」提供了一個通俗版本，我們通常稱之為「理髮師悖論」：一個小鎮理髮師自誇無人可與他相比，宣稱不會為替自己刮臉的人刮臉，但卻會為該小鎮裏所有不替自己刮臉的人刮臉。那麼，這個理髮師應否替自己刮面呢？

假如他替自己刮臉，那麼按他聲明的前一半，他就不應替自己刮臉。但假如他不替自己刮臉，那麼按照他的自誇，他又必須替自己刮臉！這個可憐的理髮師陷入了邏輯的窘境！

解決方案

在 1899 年，即康托發現第一個悖論之後 4 年，他在

寫給朋友戴德金的信中指出，如果人們不想陷於矛盾，那麼就不能談論由一切集合所組成的集合。其後，羅素與懷海德（Alfred North Whitehead；1861 – 1947）亦指出，所有這些悖論的起因，都在於當要定義一個事物時，其定義中需要利用一些包含著該事物在內的一類物件來定義。簡單地說，就是在推理的過程中，出現了一個使 $X \in X$ 成立的集合 X。這種說不清的循環定義，就是悖論產生的原因！因此，若要避免在體系中出現悖論，那麼便要避免這種說不清的定義和不要讓這種 $X \in X$ 的集合出現了。

在 1908 年，德國數學家策梅羅（Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo；1871 – 1953）發表一篇叫《集合論基礎研究》的論文，建議將集合論公理化，從而避免在集合論中出現悖論。

公理化的想法起源於古希臘數學家對幾何學的研究。要知道，當我們證明一個數學命題時，我們必定會引用一些先備知識或更基本的命題來解釋為何目前的命題是正確的。但那些「先備知識」或「基本命題」又為何正確呢？那麼我們就需要另一些更基本的知識了。例如：當我們證明為甚麼圓心角是圓周角的兩倍時，我們便需要關於等腰三角形的定理。但為甚麼等腰三角形的定理成立呢？那麼我們就要全等三角形的判別定理 S.A.S.。但為甚麼 S.A.S.

又成立呢？……

大家要明白，如此地追問下去是不可能的。因此，古希臘數學家便提出，將一些基本的、不證自明的命題作為論證時的起點，稱之為「公理」，並由這些公理去證明其餘較複雜的幾何命題。至於公理本身，我們就接受它們為「真理」，不需作任何的證明。

約在公元前 300 年，古希臘數學家歐幾里得（Euclid of Alexandria；約公元前 330 – 約公元前 275 年）就以公理化的方法，寫成了一部數學鉅著《幾何原本》，到今天依然成為建立演繹數學體系的典範。

經過了 2000 多年的研究和討論後，在 1899 年，被喻為 20 世紀最偉大的數學家之一，德國的希爾伯特（David Hilbert；1862 – 1943），發表了《幾何基礎》一書，改進了歐幾里得體系的同時，亦為公理系統注入了新的思想。希爾伯特認為，在建立一個數學體系的初期，為了避免邏輯上的循環論證和循環定義，除了公理之外，我們亦必須同時接受一些「不加定義的概念」，例如：點、線和面在《幾何基礎》之中就沒有明確的定義，讀者可以按照個人的認知和想像，自行理解這三個概念的意思。

可能大家會問：如此自由的想像，會否引至每一個人對點、線和面都有不同的理解呢？答案是有可能的！不過希爾伯特在這裏提出了公理的另一個功用，就是用一個間接的方法來描述和規範不加定義概念的性質。由於點、線和面必須滿足所有的公理，要想像出另一個能夠滿足這些公理的體系，恐怕不大可能，因此相信最後出現在眾人腦海中的景象，大家對點、線和面的認知，最後都會變得一致。

策梅羅亦採用了同樣的策略。他首先放棄康托對集合的定義，並且將「集合」變成不加定義概念，然後他利用公理寫出集合的基本性質，同時亦對集合作出規範，避免出現「所有集合的集合」這類說不清的、會引致悖論的概念。策梅羅的方案可算是為解決有關的數學危機踏出了第一步。

可惜，後來有人證明，策梅羅的公理系統仍有不足的地方，這系統未能用來建立一些有用的集合。到了 1922 年，弗倫克爾（Adolf Abraham Halevi Fraenkel；1891 – 1965）和斯科朗（Thoralf Albert Skolem；1887 – 1963）分別地提出解決方案，並完善了策梅羅的系統，成為今天人們公認的「ZF 公理系統」。ZF 公理系統共有 9 條公理，分別為：

（A1）外延公理

$$\forall x\,\forall y\,(\,\forall z\,(\,z\in x\leftrightarrow z\in y\,)\rightarrow x=y\,)$$

為了避免文字帶來說不清的謬誤，在建立集合論的起點，我們使用了形式化的符號，並且一切都是「不加定義的」。然而，如果我們想瞭解這些符號的含義，那麼我們便要對邏輯系統的符號有一定認識。例如：符號“$\forall$”表示「對於所有」。符號“$\leftrightarrow$”表示「當且僅當」。符號“$\rightarrow$”表示「若…則…」。因此，這外延公理的意思就是：「對於所有 x 和所有 y，若對於所有 z，z 屬於 x 當且僅當 z 屬於 y，則 x 和 y 便相等。」

不過必須留意，在 ZF 公理系統中，「集合」和「元素」都沒有定義，亦不會將這兩個概念區分。因此在公理的表述中，我們會統一用小寫字母來表示它們。但如有需要，在本章對公理的注釋中，亦會以大寫字母表示集合，小寫字母表示元素。

從這條公理，我們明白在甚麼情況下，我們會認為兩個集合彼此相等，即當任何一個 x 的元素都屬於 y，並且任何一個 y 的元素都屬於 x 時，x 和 y 兩個集合便定義為相等。另外，我們以 $x\subset y$ 表示 x 是 y 子集，其定義為：

定義　$x\subset y\leftrightarrow\forall z\,(z\in x\rightarrow z\in y)$　。

由此，我們可以將公理 (A1) 改寫成以下形式：

$$\forall x\forall y\,(x=y\leftrightarrow x\subset y\wedge y\subset x)$$

注：符號“$\wedge$”表示「及」。

（A2）空集公理

$$\exists x\,\forall y\,(\,\sim y\in x\,)$$

在邏輯系統中，“$\exists$”表示「存在」，而“$\sim$”表示否定符號後面的句子。這公理的意思是：「存在一個 x，對於所有 y，y 都**不**屬於 x。」換言之，這公理保證我們的體系中，最少存在一個集合，而它並沒有任何元素。當然，這個集合就是前面提到的空集。在以後的討論中，亦會用“$\varnothing$”表示空集。

（A3）無序對公理

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,\forall w\,(\,w\in z\leftrightarrow w=x\vee w=y\,)$$

注：符號“$\vee$”表示「或」。

這公理的意思是：「對任何 x 和任何 y，總存在一個集

合 z，其中 z 的元素必定是 x 或 y 的其中之一。」這即是說 $z = \{ x , y \}$ 也是一個集合。

大家要明白，在 ZF 公理系統中，建構集合已經不再像康托當年介紹集合論時那麼的隨便了。因此我們要引入一些公理來保證可以從已知的集合建構出更多的集合。

大家亦要留意，因為由這公理建構出來的集合 $\{x,y\}$，它的書寫次序是不重要的，即 $\{x,y\} = \{y,x\}$，所以我們稱這公理為「無序對」。然而，除了「無序對」之外，我們在數學上亦經常使用「有序對」，即所謂的「序偶」。例如：在坐標幾何中的坐標，就是序偶。在第一次數學危機中提到的戴德金分割 (A_1 , A_2)，也是一個序偶。問題是：我們是否要引入另一條公理來保證序偶的存在呢？

雖然數學家曾經花了不少時間來尋找序偶的定義，但他們最終能夠證明，序偶可以從無序對公理獲得，因此不必引入另一條公理。長話短說，目前人們認為一個常用的序偶定義，是由波蘭數學家庫拉托夫斯基（Kazimierz Kuratowski；1896 – 1980）於 1921 年提出的，其定義為：

定義 $(a , b) = \{ \{ a , b \} , \{ a \} \}$

由這個定義我們不難證明，當且僅當 $a = c$ 和 $b = d$ 時，$(a , b) = (c , d)$。

（A4）併集公理

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists t\, (z \in t \wedge t \in x))$$

這公理的意思是：「對任何 x，必定存在一個集合 y，使 y 的任何一個元素必定是 x 內一個元素的元素；反之亦然。」例如：若 $x = \{ t_1 , t_2 \}$，其中 $t_1 = \{ a , b , c \}$，$t_2 = \{ a , c , d , e \}$（簡單地說，我們有 $x = \{ \{ a , b , c \} , \{ a , c , d , e \} \}$），則可以由 (A4) 建構一個集合 y，而 $y = \{ a , b , c , d , e \}$，即 y 是 t_1 和 t_2 的併集。

於是，聯同前面的 (A3)，我們便可以建構集合間的併集。例如：已知 A 和 B 為集合，那麼由 (A3) 可得集合 $\{ A , B \}$，再由 (A4) 便可得到 A 和 B 的併集 $A \cup B$。

（A5）無窮公理

$$\exists x\,(\varnothing \in x \wedge \forall y\,(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

這公理保證最少存在一個無窮集。同時，這公理提供了一個利用集合論來定義 0 和自然數的方法。

首先我們將空集 $\varnothing$ 定義為 0（由於空集中沒有元素，因此用它來表示「0」的概念，是最好不過的！）。然後將 1 定義為 $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$（留意 0 其實是 $\varnothing$），將 2 定義為 $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$，如此類推。換言之，一個大於 0 的自然數 n 本身就是一個集合，它是由前面的 0 至 $n-1$ 所有集合所組成的集合，即 $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$。而 0 和所有正整數所組成的集合（亦即是公理中的 x），就是這些集合的集合。

又如果我們只使用空集的符號 $\varnothing$ 來表達 0 和所有的自然數，那麼我們更會得到一個對 0 和所有自然數的有趣表達形式：

$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{\varnothing\} \\
2 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
\ldots &= \ldots \\
n &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \\
&\qquad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots\}\} \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

在探討下一條公理之前，有一點必須提醒大家。在本章開始的時候曾經提及，我們稱由所有正整數所組成的集合為「自然數集」，並記之為 **N**。很明顯，0 並不屬於 **N**。但在 (A5) 中，因為公理中的無窮集 x 是從空集開始建立的，所以 0 是這個無窮集的一個元素。同時，有一些討論集合論的書籍，往往亦會將從 (A5) 所得到的無窮集稱為「自然數集 **N**」（換言之，0 是 **N** 的元素！），因此產生了一點的混淆：究竟 0 是不是自然數集的元素呢？

其實這個問題的答案很簡單，0 是否 **N** 的元素，其實就要看使用這符號的人，他會採用哪一種定義。一般來說，在小學和中學階段，我們會認為 0 並不屬於自然數集。而到了大學，我們通常都會接受 0 是自然數集的一個元素。

（A6）冪集公理

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$$

這個公理的意思是：「對任何一個集合 x，總存在一個集合 y，它的元素全是 x 的子集。」在這裏，我們稱 y 為 x 的「冪集」。又，如果 A 是一個集合，那麼我們亦以 $\wp(A)$ 表示 A 的冪集。

（A7）替換公理模式

$$\forall t_1 \ldots \forall t_k\, \forall u\, (\forall x\, \forall y\, \forall w\, (x \in u \wedge A(x , y , t_1 , \ldots , t_k) \wedge A(x , w , t_1 , \ldots , t_k) \to y = w) \to \exists v\, \forall y\, (y \in v \leftrightarrow \exists x\, (x \in u \wedge A(x , y , t_1 , \ldots , t_k))))$$

本章開始時提過，康托認為只要將可區分的事物聯合起來，便可以構成一個集合。因此，只要以 "$\varphi(x)$" 表示任何一句包含 x 並且可判斷真假的命題，則可以由此建立一個集合：$y = \{ x : \varphi(x) \}$。換成目前的形式符號，康托的意思便等同於以下的「概括公理」：

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

當然，正如前面已經提過，如此無限制地建構集合是會引起悖論的。例如：將 $\varphi(x)$ 換成 "$x \notin x$"，便會得到 $y = \{ x : x \notin x \}$ 這個集合。若以形式符號表示，那就是

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

既然上句對於所有 x 都應該成立，那麼可以將 y 代入 x 中，但這時候卻得到（$y \in y \leftrightarrow y \notin y$）這句自相矛盾的結論（這就是羅素悖論）！

因此，為了避免出現上述情況，策梅羅在 1908 年修改了概括公理，提出「分離公理」：

$$\forall z\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))$$

這公理將本來可以自由選取的 x 限制在一個已知的集合 z 之內，因此無論我們採用了哪一個命題 $\varphi(x)$ 來建立的集合 y，它必定是 z 的一個子集。要知道，在 ZF 公理系統之下，每一個集合都要按公理許可的情況下才可以獲得確認。由於 z 不會出現 $z \in z$ 的情況（見（A8）正則公理），因此我們不可能建構出一個子集 y，令 $y \in y$。既然 $y \in y$ 的集合不再出現，那麼羅素悖論便不會發生了。

由此可知，分離公理的確可以避免羅素悖論的出現。可

惜的是，分離公理內的 $\varphi(x)$ 只包含集合 z 內的 x，本身亦有很多不足之處。同時亦有數學家指出，有些集合是不能單憑公理 (A1) 至 (A6) 及分離公理構造出來的。例如，當 A 是一個集合時，由 (A6) 得知 $\wp(A)$ 也是一個集合。同理，$\wp(\wp(A))$、$\wp(\wp(\wp(A)))$、⋯ 等亦是集合。但以上的公理，卻未能令 $\{A, \wp(A), \wp(\wp(A)), \wp(\wp(\wp(A))), \ldots\}$ 成為一個集合。因此其後有很多數學家為此而提出修正。目前廣為數學家所接受的方法，就是弗倫克爾在 1922 年提出的「替換公理模式」。

公理中，“$A(x, y, t_1, \ldots, t_k)$” 是一句可以理解為包含 x 和 y 的一個命題。而公理的意思是：「對於所有集合 u 及每一個 y，若 u 中的元素 x 使命題 $A(x, y, t_1, \ldots, t_k)$ 成立並且對於 x，y 是唯一的，則符合上述條件的 y 可組成一個集合 v。」同時，由於 $A(x, y, t_1, \ldots, t_k)$ 可以有不同的選擇，因此這裏不單只有一條公理，而是由很多公理組成的。故此，我們將公理稱為「公理模式」。

替換公理模式有一個重要的應用，那就是用來定義「交集」。例如：已知兩個集合 A 和 B。若 A 或 B 是空集，則我們可以定義 $A \cap B = \varnothing$。若對於所有 $a \in A$，總有 $a \notin B$，我們亦定義 $A \cap B = \varnothing$。若存在 $a_0 \in A$，使 $a_0 \in B$，則按 (A7) 定義 $A' = \{x \in A : x \in B\}$。同樣，定義 $B' = \{x \in B : x \in A\}$。又

根據 (A1)，得 $A' = B'$。這時候，便可定義 $A \cap B = A'$ 或 B' 了。

（A8）正則公理

$$\forall x\,(\,x = \varnothing \vee \exists y\,(\,y \in x \wedge x \cap y = \varnothing\,)\,)$$

這是另一個非常獨特的公理，它的意思是：「對於一切非空集合 x，它至少有一個元素 y，而 y 與 x 並不相交。」留意，在公理中，y 的地位很特殊：一方面，我們視 y 為 x 的元素；另一方面，我們視 y 為一集合，並考慮它與 x 是否相交。事實上，這公理在集合論中的實質應用並不多，它主要是用來規範集合的結構。例如：可以用它來證明以下的定理：

定理 $\forall x\,(\,x \notin x\,)$

以反證法證明這定理。首先假設存在一個集合 x，使 $x \in x$ 成立。因為 $x \in \{x\}$，所以 $x \in \{x\} \cap x$，即 $\{x\} \cap x \neq \varnothing$。另一方面，如果我們將 $\{x\}$ 視為 (A8) 中的 x，將 x 視為 (A8) 中的 y，那麼由於 $\{x\} \neq \varnothing$，x 是 $\{x\}$ 中的唯一元素，因此從 (A8) 可知 $\{x\} \cap x = \varnothing$，但這與前面 $\{x\} \cap x \neq \varnothing$ 的結果矛盾！

為甚麼會出現前後矛盾的結論呢？這是由於我們在

開始的時候，做了一個錯誤的假設（即存在 x，使 $x \in x$ 成立）所致。換言之，不可能有一個集合，使 $x \in x$ 成立。再換句話說，對於所有的 x，$x \notin x$。定理得證。

另外，由正則公理亦可以證明 $\forall x \forall y \sim (x \in y \wedge y \in x)$，即不可能同時存在兩個集合 x 和 y，當 $x \in y$ 時，$y \in x$ 及當 $y \in x$ 時，$x \in y$。由此可見，這公理不容許集合出現正如羅素與懷海德所指那種說不清的循環定義，從而避免康托悖論或羅素悖論的產生。

（A9）選擇公理

$$\forall x(x \in z \rightarrow \exists A(x,y)) \rightarrow \exists y \forall x(x \in z \rightarrow A(x,y(x)))$$

選擇公理是一條非常獨特的公理，它最初是由策梅羅於 1904 年提出的，其後羅素亦於 1906 年提出一個較佳的版本。這公理的大概意思是：「對於所有集合 z，若它的每一個元素 x 都是非空集合，那麼必定存在一個所謂的『選擇函數』，使對於 z 中的每一個元素 x，都可以由該函數挑選出一個元素，記之為 $y(x)$，即 $y(x) \in x$，並將這些元素組成一個集合 y。」簡單地說，如果 $z = \{ x_1 , x_2 , \ldots \}$，其中 x_1、x_2、⋯ 等是一系列的集合，則必定存在集合 $y = \{ y(x_1) , y(x_2) , \ldots \}$，其中 $y(x_i)$ 是 x_i 的一個元素，即 $y(x_i) \in x_i$（$i = 1 , 2 , \ldots$）。

注意，如果 z 是一個有限集，那麼 (A1) 至 (A8)，已經足夠保證可以構作出有關的選擇函數和集合；但如果 z 是無窮集，那麼便要 (A9) 來保證有關的結果。

選擇公理可以算是一個極具爭議性的公理。數學家曾經嘗試證明這公理可以從其他公理推導出來，卻又不成功。由於在拓撲學、泛函分析等學問中，都找到與這公理等價的數學公理，因此沒有這公理，便無法推得一些重要的數學結果。但接受了這公理，又會得到一些難以令人信服的推論，令數學家感到進退兩難。

例如：有數學家曾經證明，選擇公理等價於良序原則。良序原則的大概意思是：「任何一個集合 A 都會有一個排序的方式，使從 A 的任何一個非空子集中，必定可以找到以該排序方式來確定的『最小元素』。」若考慮自然數集 $\mathbf{N}$，以及我們習以為常的大小關係，我們不難相信 $\mathbf{N}$ 是滿足良序原則的，即 $\mathbf{N}$ 的任何一個非空子集都有一個最小元素或最小值。不過，若考慮所有實數集 $\mathbf{R}$，情況便有點不同了。如果按照我們習以為常的大小關係排序，那麼子集 $P = \{ x \in \mathbf{R} : x > 0 \}$ 應該不會有最小元素或最小值（注意：0 是 P 的一個下限，但 $0 \notin P$）。但按照良序原則，總會有一種排序的方式，使 P 在理論上會有一個「最小元素」！不過在實際上，我們又不知道它是哪一個元

素！由此來看，選擇公理的確為我們帶來很多令人難以信服的結果，非常麻煩。難怪數學家會對這公理又愛又恨了。

有見及此，當使用集合論時，數學家亦會刻意強調，在他們的論證中，是否採用了選擇公理。因此，亦有數學家在我們目前所討論的公理系統名稱裏加添一個「C」字（即「選擇」“Choice” 的第一字母），成為「ZFC 公理系統」，以表示公理系統中引進了選擇公理。

在結束 ZFC 公理系統的討論之前，有一點必須指出：ZFC 公理系統的內容、符號和表述方式並不統一。事實上，我們可以從不同途徑找到不同學者對這個系統的不同表述版本，而本書所使用的，亦只是眾多版本的其中之一。如果讀者對其他版本感到興趣，應自行到圖書館或從網上尋找有關材料。

希爾伯特方案及不完全性定理

在 1922 年，希爾伯特提出一個方案，希望可以通過證明數學的無矛盾性，從而解決第三次數學危機所帶來的種種問題。希爾伯特提出將所有數學理論公理化，並把所得到的公理徹底形式化，即寫成一些不加定義的符號運算，期望通過對形式理論無矛盾性的研究來建立原本理論的無矛盾性。同時他倡議採用一些有限步驟的方法來建立一個邏輯系統和初等數論，從而避免循環論證，並且證明在形式理論中，不可以推導出某個命題 A 以及它的逆命題 $\sim A$ 同時成立。

希爾伯特方案在推出的初期曾經引起數學界的重視和回響，而且對於一些較為簡單的體系，它們的無矛盾性亦先後獲得證明。正當大家對這方案滿懷信心之際，一名希爾伯特的學生、捷克出生的數學家哥德爾（Kurt Gödel；1906 – 1978）卻在 1931 年證明了「不完全性定理」，為希爾伯特方案帶來沉重的打擊。不完全性定理是這樣的：

定理　任何一個相容的並足以容納數論的形式公理系統中，都必定存在一個命題 A，無論 A 或 $\sim A$ 都不能在這個系統中獲得證明。

這定理的意思明顯與希爾伯特的方案相反。希爾伯特希望在確立公理系統後，在系統內的任何命題都可以獲得證明或否定，但哥德爾的不完全性定理卻說明，在系統之中，總有一些命題，既不能證明它們正確，亦不能證明它們不正確！

這定理的另一更重大涵義是：由於任何一個相容的並足以容納數論的形式公理系統都是不完備的，因此不僅數學的全部，甚至是任何一個有意義的數學分支也不能用一個公理系統概括起來。因此這定理推翻了希爾伯特的方案，並宣告它是不可行的！

對公理化和形式化的批評

回看整個集合論的演變過程，雖然 ZFC 公理系統十分嚴謹，但它只可以避免目前所發現的悖論，卻不能保證以後絕對不會再發現新的悖論。況且，這方法亦只是**避免了**悖論的出現，悖論其實依然存在於我們思想之中，並沒有得到一個完全合理的解釋。同時，將公理形式化，亦即是將數學變成一大堆（沒有意義的？）符號的運算，實在令人不安。事實上，第三次數學危機到目前仍未獲得圓滿的解決！

面對著將數學公理化和形式化的潮流，羅素曾經說過一句發人深省的說話，現將它轉錄如下，作為本章的終結：「純粹數學是這樣的一門學科，我們不知道我們在談論甚麼，亦不知道我們所說的，是否真確。」

閱後練習

1. 設 $A=\{a,b,d,e\}$，$B=\{d,e,f,g\}$，$C=\{c,e,g\}$，$D=\{f,g\}$。
   試列出下列各集合的元素：
   (a) $A\cup B$　(b) $A\cap B$
   (c) $A\cap D$　(d) $(B\cap D)\cup C$
   (e) $B\cap(D\cup C)$　(f) $(B\cup C)\cap(D\cup C)$

2. 設 $A=\{\{\varnothing\},\varnothing\}$。判斷下列各命題是否成立：
   (a) $\varnothing\in A$　(b) $\{\varnothing\}\in A$
   (c) $\{\{\varnothing\}\}\in A$　(d) $\varnothing\subset A$
   (e) $\{\varnothing\}\subset A$　(f) $\{\{\varnothing\}\}\subset A$

3. 設 A、B、C 為集合。判斷下列哪些命題永遠成立、永遠不成立或在某些情況下會成立（並指出該命題何時成立）：
   (a) $A\subset A\cup B$　(b) $A\cup B\subset A$
   (c) $A\subset A\cap B$　(d) $A\cap B\subset A$
   (e) 若 $A\subset B$，則 $A\cap B=A$。
   (f) 若 $A\subset B$，則 $A\cap B=B$。
   (g) 若 $A\subset B$，則 $A\cup B=A$。
   (h) 若 $A\subset B$，則 $A\cup B=B$。
   (i) 若 $A\cap B=A\cap C$，則 $B=C$。

4. 設 $A = \{ a , b , c , d \}$。試列出冪集 $\wp(A)$ 的所有元素。

5. 證明若 $n(A) = m$，則 $n(\wp(A)) = 2^m$。

6. 設 **N** 為所有正整數的集合，E 為所有正偶數的集合。證明 **N** 和 E 之間存在一一對應的關係，即 **N** 和 E 的元素數量一樣多。

7. 由序偶的定義證明當且僅當 $a = c$ 和 $b = d$ 時，$(a , b) = (c , d)$。

8. 應用無窮公理寫出 "4" 和 "5" 的集合表達式。

9. 應用正則公理證明：$\forall x , y \sim(x \in y \wedge y \in x)$。

提示： 設 $x \in y$ 及 $y \in x$。先證明 $x \in \{ x , y \} \cap y$ 及 $y \in \{ x , y \} \cap x$。

再由 (A8) 證明 $\{ x , y \} \cap x = \varnothing$ 或 $\{ x , y \} \cap y = \varnothing$ 成立。

從以上兩個結果導出矛盾。

10. 試討論以下句子是否成立：

這是一句謊言！

外一章：勇闖無窮大

回顧數學歷史上的三次數學危機，它們並非偶然地出現，而是基於人類對數學的不理解而產生出來的結果。每一次的數學危機，都使數學家深切地反思他們所做的一切，從而令他們對數學本質、數學的觀念和數學的知識有更深入的瞭解，並能以更精密、更精確的語言表達他們的所思所想。

第一次數學危機使古希臘數學家明白，他們以公度量的手法來處理相似三角形的基礎理論是不可行的，從而產生一個對兩數之比（尤其是涉及無理數之比）的更精確描述。第二次數學危機逼使數學家發展一套新的數學語言（即魏爾斯特拉斯的 ε-δ 語言）來定義極限，避開了使用「越來越接近」之類既含糊又令人難以理解的字眼。第三次數學危機引入了公理法，同樣避開了「包括自己為元素」之類說不清的循環定義，使我們能夠對「集合」這個概念，有更清晰的界定。

雖然表面上，這三次數學危機的焦點各有不同，但是它們都有一個共通點，那就是這三次數學危機或多或少都與「無窮」這概念有關。如果兩個數之間沒有公度量，輾

轉丈量的工作便會無窮無盡地做下去，那豈不是說：即使花了一生的時間和精力，都無法將這兩個數轉化為兩個整數之比？那麼我們如何開展其他有關問題的計算呢？如果在一個計算過程之中，出現了一個叫「無窮小」的量，那麼我們應該當它是 0 還是一個不等於 0 的量呢？集合論本來就是用來處理有無窮多個元素的集合的問題，但它的原始定義便已經蘊藏著自相矛盾的結果，那麼我們應該怎樣做，才能既正確地描述集合，同時又能避開它的內部矛盾呢？

既然三次數學危機與無窮大有那麼密切的關係，如果我們只提及三次數學危機而忽略了無窮大，那麼我們的故事便不算完整了。所以在認識三次數學危機的同時，我們有必要回顧一下無窮大這個概念的發展歷史。

可怕的無窮大

不說不知，古時的數學家，尤其是古希臘的數學家，他們對「無窮」這一詞都會抱著十分謹慎和保留的態度，甚至乎可以說有點畏懼，因而盡量避免使用它。例如：歐幾里得在他的著作《幾何原本》第九卷命題 20 裏說：「預先任意給定幾個質數，則有比它們更多的質數。」歐幾里得的意思是，如果我們已經找到了一些質數，那

麼只要按照他在證明中所提供的計算方法，便可以從這些質數中構作出另一個新的質數。換言之，我們能夠找到的質數會越來越多，直至無窮無盡。這亦即是說：「質數有無窮多個。」可是，由於歐幾里得不想使用「無窮」一詞，因此他採用了以上一個較為迂迴的表達方式。

古希臘數學家害怕使用「無窮」一詞，也不是沒有道理的。在歐幾里得出現之前 150 年，有一個哲學家名叫芝諾（Zeno of Elea；約公元前 490 – 約公元前 425），他提出多個後世數學家稱之為「芝諾悖論」的論述，反映「無窮」這個觀念對古人來說是多麼的奇怪、難以掌握及難以解釋。

芝諾的其中一個論述是這樣的：「任何運動都是不可能的」。如果某人要從一點 A 走到另一點 B，那麼他先要到達兩點之間的中點 C。但從 A 到 C，那人又必須先到達 A、C 之間的中點 D。但在他到達 D 之前，他又先要到達 A、D 的中點 E。如此推論下去，那人就必須經過無窮多個「中點」，才可以到達 B。但那人的生命是有限的，不可能跨越無窮多個點，所以他不可能從 A 走到 B！向前運動是不可能的。

芝諾的另一個悖論就更著名。雖然阿基里斯

（Achilles）是古希臘神話中戰無不勝、行動神速的英雄，但是他亦無法追上在他前面爬行的烏龜。譬如：在開始的時候，阿基里斯站在 A 點，烏龜在 B 點。當阿基里斯跑到 B 時，烏龜已經向前爬行了一段距離，到達 C 點。當阿基里斯跑到 C 時，烏龜又已經向前爬行了一段距離，到達 D 點了。如此下去，每當阿基里斯跑到烏龜先前經過的那一點時，烏龜實際上已經向前爬了一段距離。換言之，阿基里斯是永遠追不上那頭烏龜的！

雖然芝諾悖論違反了常理，但是由於古人未能完全明白無窮的觀念，又找不到一個對這些悖論的合理解釋，因此他們唯有在數學論證之中，盡量避免使用「無窮」這一詞語。

中國古代也有類似的記載。在《莊子·天下第三十三》中，記錄了一些惠施與人爭辯時的說話，其中一句是這樣的：「一尺之捶，日取其半，萬世不竭。」意思是，如果將一枝一尺長的棍棒，每天截取一半，那麼即使過了千百萬年，仍可將它繼續截取下去（注意：這個想法與古希臘人對原子的想法剛好相反）。用了今天的數學語言，上述的說法其實也只不過是表示，若把 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ 等一直加下去，那麼總和將會等於 1。

在今天，當介紹到「無窮」這個概念時，很多中國作家都對這段說話致以高度的評價，並認為這是我國古代認識「無窮」或「無窮級數」的開端。可惜，如果我們細心看一看《莊子》中引述這段說話時前後的文字，那麼不難發覺，莊子其實並不欣賞惠施的見解！莊子認為惠施空有出眾才華，學富五車，但卻喜歡與人爭辯一些無建設性的話題，徒然浪費了他的才學。莊子說：「惠施之才，駘蕩而不得，逐萬物而不反，是窮響以聲，形與影競走也。悲夫！」當然，莊子所批評的，是惠施的整體言論，並非單單針對「一尺之捶」這一句。但既然莊子引述了這句話，這亦表示莊子並非認同惠施關於無窮的看法。

無窮級數

其實，無論是芝諾的悖論，還是惠施的論述，基本上，都離不開一個數學概念，那就是「無窮級數」。

在討論第二次數學危機時已經介紹過，當 $|x|<1$ 時，級數 $1+x+x^2+x^3+\ldots$ 將會收斂於 $\frac{1}{1-x}$。換言之，只要 x 符合一些特定的數學條件，那麼即使將無窮多個數，例如：1、x、x^2、x^3、$\cdots$ 等加在一起，它們的總和也只不過是一個有限的數值，而並非無窮大。在芝諾的悖論中，芝諾將運動或追烏龜的過程分割成無窮多個段落，但他以

為將走過無窮多個段落的所需時間加在一起會等於無窮大，因此錯誤地以為運動是無法進行的，或者窮一生的時間也追不上一頭烏龜。事實上，我們可以證明，芝諾悖論中的無窮級數是收斂的，我們可以在有限的時間內完成那些運動（見閱後練習）。

話說回來，無窮級數的相關理論到了 19 世紀才變得成熟。自此之後，數學家才較大膽地和有信心地使用「無窮」這字眼。反觀古人害怕使用「無窮」，並非表示他們水平不足，這只不過是反映他們對言詞的謹慎而已。

事實上，在我們的學習過程中，亦同樣出現要謹慎處理「無窮」一詞的問題。相信大家在初學除法的時候，總不能避免地遇上 1 除以 0 或計算 $\frac{1}{0}$ 的問題。那時候，老師總會要求我們將答案寫成「無解」或「沒有意義」，並非將答案寫成「無窮大」或“∞”（眾所周知，人們通常用“∞”來表示無窮大。據記載，這記號是英國數學家沃利斯（John Wallis；1616 – 1730）在 1655 年首先採用的）。由此可知，「無窮」一詞的確不可以輕率地使用。

循環小數與無窮大

大家不要誤會，以為除了面對除數為 0 的除法之外，無窮大是一件遙不可及的事情。事實上，當我們將一個循環小數轉換成分數的時候，我們已經觸及「無窮大」的性質了。

例如：考慮循環小數 0.3333…，我們如何將它轉換成為分數呢？一個最簡單（但不算嚴謹）的方法，就是先設 $x = 0.3333\ldots$，然後將 x 倍大 10 倍得 $10x = 3.3333\ldots$。將兩式相減便會得到 $9x = 10x - x = 3.3333\ldots - 0.3333\ldots = 3$。將上式兩端除以 9，最後得 $0.3333\ldots = x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$。

相信大家不會對這計算方法產生懷疑，但大家有沒有想過，在上述的計算之中，小數點後的 "3" 一共有多少個呢？

$x = 0.3333\ldots$ 是一個循環小數，在小數點之後當然有無窮多個 "3"。當我們將 x 倍大 10 倍後，我們得到 $10x = 3.3333\ldots$，彷彿就好像將小數點向右移了一個位，引至小數點後的 "3" 減少了 1 個。不過，由於在 $10x$ 的小數點之後依然有無窮多個 "3"，我們相信，當 3.3333… 與 0.3333… 相減時，小數點後的 "3" 會全部消去，最後只剩下個位數上的 "3"。換言之，即使從無窮多個 "3" 移了一個 "3" 至小數點之前，最後依然有無窮多個 "3" 在小數點後，數量上是不變的！

若採用了 "∞" 這個記號，則上述的關係可以改寫為「∞ 個 "3" 減去 1 個 "3" 等於 ∞ 個 "3"」，又如果不會引起太多誤會，那麼上述關係可以簡單地寫成：$\infty - 1 = \infty$。

細心想想，不難發現，這個簡單的算式正好說出「無窮大」和「有限大」的一個重要分別！試想想：即使是世上最富有的人，如果我們能夠從他的口袋中拿走 1 元，那麼他的財富便會減少了 1 元，他的身家必定縮小了。原因是，只要 N 是一個有限值，那麼 $N - 1$ 必定小於 N，$N - 1 \neq N$。

但是，無窮大卻有點不同了，由於 $\infty - 1 = \infty$，因此即使我們從 ∞ 中減去 1，依然絲毫無損它的大小。推而廣之，只要 n 是一個正整數，那麼 $\infty - n$ 依然等於 ∞，即 $\infty - n = \infty$。又或者我們可以將上述兩個算式改寫成 $\infty = \infty + 1$ 和 $\infty = \infty + n$。這是無窮大與一般有限數值的一個分別。

數數偶數有多少？

大家有沒有想過：究竟在這世界上，正整數多一些，還是偶數多一些呢？

可能大家會認為正整數會比偶數多。原因是，如果我們將正整數像圖 4.1 那樣逐一列出，然後刪去當中的奇數，那麼明顯地看到，偶數的數量只是正整數的一半，所以正整數比偶數為多。

1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		
$\cancel{1}$	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	$\cancel{7}$	8	…

圖 4.1

不過，如果我們將圖 4.1 中偶數的位置從新排列成圖 4.2，那麼我們便會發現，正整數的數量其實和偶數的數量一樣多！

整數	1	2	3	4	5	6	7	8	…
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
偶數	2	4	6	8	10	12	14	16	…

圖 4.2

事實上，無論我們選擇哪一個正整數 n，從圖 4.2 可見，它總可以對應於 $2n$，那是一個偶數。相反，任何一個

偶數 m，它亦可以對應於 $\frac{m}{2}$（注意：若 m 是偶數，則 2 必定能夠整除 m，故此 $\frac{m}{2}$ 必定是整數）。而且沒有一個正整數或偶數在上述對應中被重複或遺漏。換言之，若以 **N** 表示自然數集，又以 E 表示所有偶數的集合，則圖 4.2 中的“$\updownarrow$”號可以表示 **N** 與 E 之間存在著一個「一一對應」的關係，即 **N** 中的每一個元素，都會對應於 E 中唯一的一個元素。再換句話說，這兩個集合的大小是相同的。

另外，我們留意到，由於 **N** 和 E 都是無窮集，因此我們更可以得到另外兩個關於無窮大的算術性質：$\infty \div 2 = \infty$（即將 ∞ 個正整數分成奇數和偶數兩部分，每部分都有 ∞ 個數）和 $\infty - \infty = \infty$（即從 ∞ 個正整數中抽出 ∞ 個奇數，依然餘下 ∞ 個偶數）。由此，更可以推算出以下結果：$\infty = 2 \times \infty$、$\infty = \infty + \infty$、$\infty \div n = \infty$ 及 $\infty = n \times \infty$，其中 n 為一個正整數。

格點與正整數的比較

圖 4.3 展示了一個坐標系，並且將 x 坐標和 y 坐標同樣是正整數的點以一個黑點表示。在數學上，我們通常稱這些點為「格點」。問題是：大家認為在圖 4.3 裏的格點多一些，還是自然數集 **N** 內的元素多一些呢？

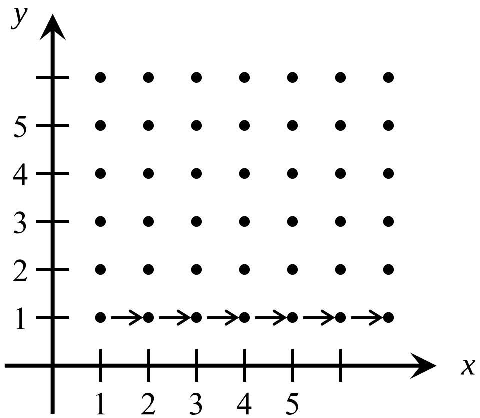


圖 4.3

當然，如果我們從 (1 , 1) 這一點開始，沿著 x 軸的方向向右數過去，那麼單是 y = 1 這一列，便有無窮多個格點了，所以 y = 1 列的格點和 **N** 的元素一樣多。與此同時，由於 $y=2$、$y=3$ 等列中，還有很多格點仍未點算，因此不難相信，圖 4.3 裏的格點似乎比 **N** 內的元素為多。

不過，如果我們採用另一個方法來點算那些格點，那麼結果就會不一樣了。如圖 4.4，我們依然從 (1 , 1) 出發，不過點算其餘的格點時，我們並不是沿著水平方向數過去，而是從右下方往左上方，逐一斜行去數（注意：在同一個斜行中，x 坐標和 y 坐標之和是固定的）。這樣，我們可以將圖 4.4 內的格點和 **N** 內的元素建立起一個一一對應的關係。換言之，格點的數量其實亦等於 **N** 的元素數量！

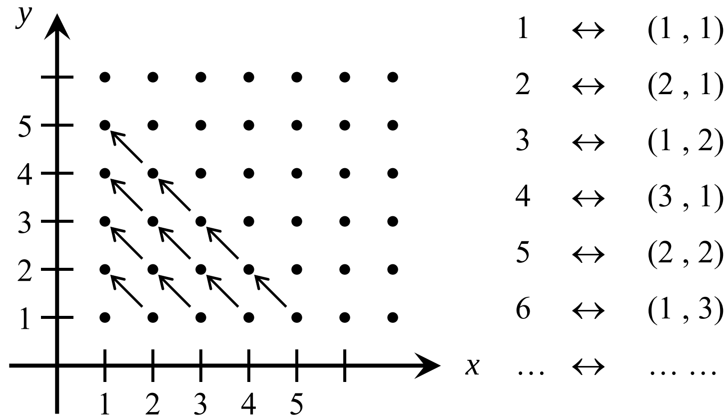


圖 4.4

初學乘法的孩子都知道，如果我們有 n 行，每行有 n 點，那麼我們一共有 $n\times n$ 那麼多點。推而廣之，由於圖 4.4 裏，每一行、每一列都分別有 ∞ 個格點，因此，那裏一共有 $\infty\times\infty$ 個格點。但由上述討論可知：$\infty\times\infty=\infty$！不單如此，按照類似的方法，我們亦可以證明 $\infty\times\infty\times\infty=\infty$，甚至乎，對於任何一個正整數 n，$\infty^n=\infty$！

另外，由於我們可以將格點的坐標 (m , n) 改寫成 $\dfrac{m}{n}$ 的形式，因此我們亦可同時將正整數格點與有理數集 **Q** 內的元素建立一一對應的關係（見圖 4.5）。但是，前面證明了，格點與自然數集 **N** 內的元素一樣多，所以亦同時證明了，有理數集 **Q** 與自然數集 **N** 內有相同數量的元素！

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
(1,1) & (2,1) & (1,2) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\dfrac{1}{1} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{2}{1} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{2} & \dfrac{3}{1} & \cdots
\end{array}
$$

圖 4.5

當然，細心的讀者應該會發現，在圖 4.5 的對應中，其實出現了兩個數值相等的有理數 $\frac{1}{1}$ 和 $\frac{2}{2}$。一般地，如果 m 與 n 之間有公因數，那麼我們將會有多於一個格點對應著同一個有理數 $\frac{m}{n}$！如此說來，**N** 的元素豈不是還要比 **Q** 的元素為多嗎？這個結果是否有點不可思議呢？

事實上，數學家曾經證明，在這情況下，那只不過表示 **N** 和 **Q** 有相同數量的元素。但由於這證明步驟很繁複，故在此從略（見閱後練習）。

線段上的無窮大

同樣令人感到驚訝的關係亦出現於幾何之上。試想想：兩條不同長度的線段，哪一條線段上的點會多一些呢？

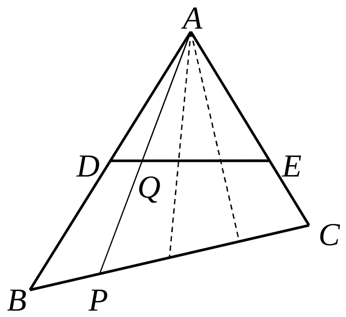


圖 4.6

圖 4.6 中，D 和 E 分別是 AB 和 AC 上的點。很明顯，線段 BC 比線段 DE 長。問題是：在 BC 上的點會多一些，還是在 DE 上的點會多一些呢？

由於兩線段上都有無窮多個點，因此我們亦採用「一一對應」的方法來進行比較。假設 P 是 BC 上任意一點，連結 AP 後，它必定和 DE 相交，得到 Q。換言之，在 BC 上任意一點，總會在 DE 上找到一點與它對應。相反，假設 Q 是 DE 上任意一點，將 AQ 連結並延長後，必定和 BC 相交，得到 P。換言之，在 DE 上任意一點，亦會在 BC 上找到一點與它對應。總括而言，就是可以在兩條不同長度

的線段之間建立一一對應的關係，由此得知在它們上有同樣多的點！

不單如此，我們更可以證明：任何一條有限長度的線段和一條無限長度的直線有同樣多的點。

圖 4.7 中，AB 為一線段，ℓ 為一直線。以 AB 的中點 O 為圓心畫一半圓 ACB。M 為 AB 以外的一點。由於從 M 可畫線經過 AB 上的點到達半圓 ACB，因此證明了可以將線段 AB 上的點與半圓 ACB 上的點建立一個一一對應的關係。又，以 O 作為中心點，可畫線將半圓 ACB 上的點與直線 ℓ 上的點建立另一個一一對應的關係。由此可知，AB 和 ℓ 有同樣多的點！

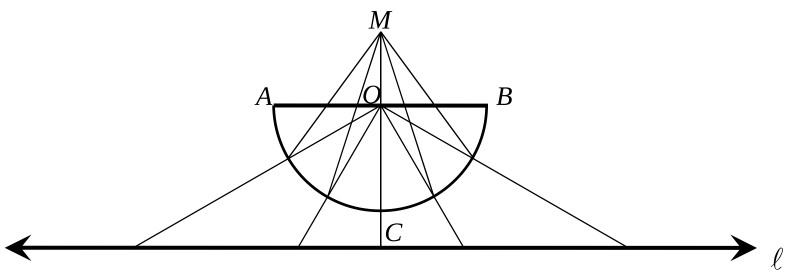


圖 4.7

同樣，細心的讀者亦會發覺，線段 AB 應該包括 A、B 首尾兩點，但直線 ℓ 並沒有首尾兩點，那豈不是說 AB 還要比 ℓ 多出了兩點嗎？

不過，我們在前面提及過，$\infty+1=\infty$。同樣，$\infty+2=\infty$。所以即使表面上 AB 好像比 ℓ 多出了兩點，但實際上點的數量是相等的（見閱後練習）。

實數與正整數的比較

到這裏，可能大家會有一個印象，認為無窮大就是很大很大的，而且舉了那麼多例子，都得到同一結論，就是所有無窮大都是相等的，那有甚麼特別呢？

不錯，自然數集 **N** 與有理數集 **Q** 的大小相等。一條線段即使比一條無限長的直線短，但它們卻擁有相同數量的點。但是到目前為止，我們仍未將 **N** 和直線比較大小。究竟哪一個集合有較多的元素呢？

在繼續討論下去之前，有兩點先要澄清。一、我們通常將實數排列成一直線，並稱它「數線」，所以實數集 **R** 內元素的數量，亦等於直線上點的數量。二、由於直線和線段上有同樣多的點，因此 **R** 與集合 $\{x\in\mathbf{R}:0<x<1\}$ 有相同數量的元素。我們通常以符號 $(0,1)$ 表示這集合，並稱之為「0 與 1 的開區間」（注意：這個開區間的符號和坐標 $(0\ ,\ 1)$ 的記號是相同的。不過，大家必定可以通過文意，明白我們正在討論一個集合，還是一個坐標。所以即使兩者都使用了相同的符號，相信也不會引起誤會）。換言

之，將 **N** 和直線比較大小，亦即是比較 **N** 和 (0 , 1) 的大小。

現在假設 **N** 和 (0 , 1) 之間有相同數量的元素，那麼按照前面討論過的情況，兩個集合之間必定可以建立一個一一對應的關係。即是說，對於任何一個 $n \in \mathbf{N}$，必定可以從 (0 , 1) 中找到一個元素 a_n 與 n 對應。又，由於那是一個一一對應的關係，因此數列 $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ 已經列出 (0 , 1) 中的**所有元素**，既沒有遺漏，亦沒有重複。

我們將 $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ 的數值以十進小數的形式逐一列出（如圖 4.8）。注意：由於 $a_n \in (0 , 1)$，因此所有的 a_n 都是由 “0.” 開始的。同時，為了確保每一個 a_n 都有無窮多個小數位，我們將每一個有限位小數都改寫成無限位的形式，例如：我們將 0.4 改寫成 0.399999…（如圖 4.8 中的 a_3）。

a_1	=	0	.	2	4	5	0	8	7	…
a_2	=	0	.	3	0	7	7	6	2	…
a_3	=	0	.	3	9	9	9	9	9	…
a_4	=	0	.	1	0	7	0	7	8	…
a_5	=	0	.	2	0	2	1	6	9	…
a_6	=	0	.	8	9	3	3	2	1	…
…	=	…			…		…			…
b	=	0	.	1	1	2	1	1	2	…

圖 4.8

接著，我們按照 $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ 所列出的數值構作另一個數 b。首先，b 亦是由 “0.” 開始的。如果 a_n 小數點後第 n 位的位值是偶數，那麼將 b 小數點後第 n 位的位值設定為 1；如果 a_n 小數點後第 n 位的位值是奇數，那麼將 b 小數點後第 n 位的位值設定為 2。換言之，b 小數點後第 n 位位值的奇偶性必定與 a_n 小數點後第 n 位位值的奇偶性相反。

很明顯，這個 b 是一個介乎於 0 與 1 之間的實數。因此，它應該屬於 (0 , 1)。又因為 $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ 已經列舉出 (0 , 1) 的所有元素，所以它應該等於某一個 a_n。不過，

由於 b 小數點後第 n 位位值的奇偶性必定與 a_n 小數點後第 n 位位值的奇偶性相反，因此 b 不可能等於任何的一個 a_n！結論前後矛盾！

為甚麼會出現前後矛盾的結論呢？這是由於我們在開始的時候，做了一個錯誤的假設所致。我們假設了 **N** 和 $(0,1)$ 有相同數量的元素！換言之，**N** 和 $(0,1)$ 中元素的數量並不相等，而且 $(0,1)$ 中的元素應該比 **N** 的為多！

在這裏，我們驚訝地發現，雖然 **N** 有無窮多個元素，但這個「無窮大」卻小於實數集 **R** 內元素的數量！這正是「一山還有一山高」！

新思維的創造者

發現以上精彩結果和證明的不是別人，正是在第三次數學危機中曾經提及過，集合論的創造者，德國數學家康托。在 1870 至 1872 年間，康托本來只是研究一些三角級數收斂性的問題，但這問題卻引領他研究比較兩個無窮集大小的方法。由 1874 至 1897 年間，康托在重要的數學雜誌上發表多篇的論文，解釋他的集合論和有關無窮大的發現。上述的證明方法，數學家稱之為「對角線法」，相信讀者不難從圖 4.8 的斜線理解這個名稱的意義。

由於我們發現了兩個不同大小的「無窮大」，傳統的無窮大符號 “∞” 已經不能區分這兩個情況，因此康托引入了一套新的數學語言來描述有關的關係。現在以 “ω” 表示自然數集 **N** 的大小，又或者稱 ω 為 **N** 的「勢」或「基數」。另外，以 “c” 表示實數集 **R** 的基數。如果兩個集合之間能夠建立一一對應的關係，那麼我們稱它們為「等勢」。

凡與 **N** 或 **N** 的子集等勢的集合（即該集合可與 **N** 或 **N** 的子集建立一個一一對應的關係），由於它的每一個元素都可以對應於 **N** 內的一個元素，我們可以視之為利用 **N** 內的數字為集合的每一個元素編上一個編號，因此康托稱這種集合為「可數集」（注意：這個可數的概念與英語中可數的概念是不同的。例如：英語中，頭髮（hair）是不可數的，但以集合而言，一個人身上的頭髮數量始終是一個有限值，因此從集合論而言，頭髮是可數的）。留意：有理數集 **Q** 是另一個可數集。

由於 **R** 等勢於一條連續不斷的直線，因此凡與 **R** 等勢的集合，康托稱它們為「連續統」。

更大的無窮集

除了 ω 和 c 之外，還有沒有更大的基數呢？

大家可能會直覺地認為，直線只是平面的一部分，平面上的點應該比直線上的點為多，所以平面上點的集合的基數應該比直線上點的集合的基數為多。但康托卻證明了，$(0,1)$ 與集合 $S=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ 等勢。換言之，平面與直線有同樣多的點。

事實上，假如 $x\in(0,1)$，x 必定可以寫成一個有無窮位的小數，例如：$x=0.23843543\ldots$。我們可以按照 x 小數點後的奇偶位值將它分割成為兩個小數，即將 x 小數點後第 1、3、5、7、… 位的數字抽出來，得 0.2834…，又將小數點後第 2、4、6、8、… 位的數字抽出來，得 0.3453…。將兩數結成序偶，得 $(0.2834\ldots, 0.3453\ldots)$，而這序偶亦是 S 的一個元素！不難證明，上述方法可以為 $(0,1)$ 與 S 建立一個一一對應關係，因此得知 $(0,1)$ 與 S 等勢。

按照類似的方法，我們可以在 $\mathbf{R}$ 與 n 維空間 $\mathbf{R}^n$ 之間建立一個一一對應的關係。換言之，$c^n=c$，其中 n 為任何的正整數。

未能構作出更大的無窮大，可能大家會有點失望，但康托卻沒有放棄。經過多年的研究之後，他發現，所有定義域和上域都是區間 $(0,1)$ 的函數的集合 F，它比 $(0,1)$ 有更多的元素，即 F 的基數比 c 更大。

康托的證明方法基本上與前面提及過的對角線法差不多，同樣以反證法進行，但比之前的證明更為抽象。

首先，假設兩個集合是等勢的。因此任何屬於 $(0,1)$ 的元素 z，必定可以對應於 F 內的一個函數，記之為 f_z。現定義一個新的函數 g，它的定義域為 $(0,1)$，並且當 $f_z(z)\neq\frac{1}{2}$ 時，設 $g(z)=1-f_z(z)$；當 $f_z(z)=\frac{1}{2}$ 時，設 $g(z)=\frac{1}{4}$。

因為 $f_z\in F$，$0<f_z(z)<1$，所以由 g 的定義可知，$0<g(z)<1$，g 也是 F 的一個函數。但從 g 的設計亦可知，對於任何的 z，$g(z)\neq f_z(z)$，故此 g 並不等於任何一個 f_z！結論前後矛盾！

為甚麼會出現前後矛盾的結論呢？這是由於我們在開始的時候，做了一個錯誤的假設所致。我們假設了 $(0,1)$ 與 F 等勢。換言之，$(0,1)$ 與 F 不等勢，F 比 $(0,1)$ 有更多的元素。

現在我們將 F 的基數記為 "f"。由此，我們發現了三個無窮基數：ω、c 和 f，其中 $\omega < c < \mathrm{f}$。

在繼續討論下去之前，有一點亦值得大家留意。由於理論上任何一個函數都可以畫出一幅圖像（縱使部分圖像可能由於非常「凌亂」因而不容易畫出，甚至不可能畫出），因此 F 亦等勢於所有定義在區間 $(0,1)$ 上的函數圖像的集合。換言之，我們證明了世上一共有 f 個不同的函數圖像！

冪集與超窮數

在第三次數學危機的討論裏面，我們其實已經提及過一個康托用來製造更高基數的方法，那就是構作冪集。

由 A 的所有子集所組成的集合 $\wp(A)$ 就是 A 的冪集。在上一章已經證明了，$\wp(A)$ 有比 A 更多的元素（留意：該證明亦都使用了對角線法！）。換言之，我們由 **N** 出發，構作它的冪集 $\wp(\mathbf{N})$，這個冪集的基數將會大於 ω。再由這個集出發，構作 $\wp(\wp(\mathbf{N}))$，它的基數將會更大。

但是，$\wp(\mathbf{N})$ 的基數又是甚麼呢？康托的另一個驚人發現就是證明了 $(0,1)$ 與 $\wp(\mathbf{N})$ 等勢！事實上，對於 $(0,1)$ 內的任何一個元素，我們先以二進小數的形式來表示它的數值，然後按照位值等於 1 的分佈將這個元素對應於 **N** 內的

子集，例如：$\frac{13}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=2^{-1}+2^{-2}+2^{-4}=0.1101_2$，那麼我們便將 $\frac{13}{16}$ 對應於 $\{1,2,4\}$。很明顯，這是一個一一對應的關係，所以 $(0,1)$ 與 $\wp(\mathbf{N})$ 等勢，它們的基數同樣是 c。由於前一章亦提到，如果 A 是一個有限集，它有 n 個元素，那麼冪集 $\wp(A)$ 將會有 2^n 個元素，因此我們亦按同樣方法，將基數 ω 和 c 的關係寫成 $2^{\omega}=c$。

其後，康托亦證明了 $2^c=\mathrm{f}$，即所有定義域和上域都是區間 $(0, 1)$ 的函數的集合 F 與實數集的冪集 $\wp(\mathbf{R})$ 等勢。首先，讓我們看一個有限集的例子。想一想：定義域和上域都是有限集 $\{1, 2, 3\}$ 的函數共有多少個呢？由於對於定義域中的每一個元素，它們都可以對應於上域中的任何一個元素，換言之，每一個元素都有 3 個選擇，因此我們一共可以構作出 $3\times3\times3=3^3=27$ 個不同的函數。類似地，$(0, 1)$ 中每一個元素都有 c 個選擇，集合本身又有 c 個元素，所以共可構作 c^c 個函數。但前面已經知道，F 有 f 個函數，由此得 $c^c=\mathrm{f}$。另一方面，$2^{\omega}=c$，所以 $\mathrm{f}=c^c=(2^{\omega})^c=2^{\omega\times c}=2^c$（至於 $\omega\times c=c$ 的解釋，見閱後練習）。

不單如此，康托發現，由於我們可以通過冪集製造更大的基數，因此基數是可以不斷地擴展的。換言之，我們

將會得到無窮無盡多個無窮大！在這裏，康托引用了一個希伯來文字母“ℵ”（讀作“aleph”，中文譯作「阿列夫」）來表示這個無窮大序列，並稱這些基數為「超窮數」。康托以 $\aleph_0$ 表示第一個無窮基數，並且證明了 $\aleph_0 = \omega$（證明從略）。之後的基數以 $\aleph_1$、$\aleph_2$、$\aleph_3$、… 等表示。大家留意，康托指 $\aleph_1$ 是大於 $\aleph_0$ 的第一個基數，但這個基數不一定就是 c。事實上，前面的討論只是證實了 $\aleph_1 \le c$，至於它們是否相等，還要作進一步的證明。

超窮數雖然為我們帶來無窮無盡多個無窮基數，但是即使到了今天，我們亦只能舉出其中三個基數（即 ω、c 和 f）的具體例子，至於其他基數可以具體地表示為怎樣的集合，我們依然一無所知。怪不得當康托在 19 世紀末期提出關於集合論和超窮數的研究時，會引來那麼多的反對聲音。事實上，康托亦為他的發現而感到驚訝，他曾經在寫給好友戴德金的信中說：「我看到了，但我不相信。」

連續統假設

前面提過，$\omega = \aleph_0$ 是 **N** 的基數，c 是 **R** 的基數。康托證明了 $2^{\omega} = c$ 以及 $\aleph_1 \le c$，因此我們有 $\aleph_1 \le 2^{\aleph_0}$。不過，經過那麼多次的推廣運算後，我們都未能發現一個 **R** 的子集，它的基數會介乎於 ω 和 c 之間，但又不等於

ω 或 c。因此，我們直覺地相信，根本不存在這樣的一個子集。換言之，在 ω 和 c 之間，再沒有任何的基數，因此我們可以將 $\aleph_1 \le 2^{\aleph_0}$ 改寫為 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$。事實上，康托當年也有同樣的想法。在 1878 年，康托在一篇論文中提出以上的猜想，但是他並未能為此作出任何的證明。其後，他將這猜想定名為「連續統假設」。後來的數學家更將這個猜想推廣至所有的超窮數，成為「廣義連續統假設」，即對於任何的正整數 k，$\aleph_k = 2^{\aleph_{k-1}}$。

1900 年的夏天，在巴黎舉行的第二次國際數學家代表大會上，著名的數學家希爾伯特向當時的年青數學家提出了 23 個極具挑戰性的未解問題，當中的第一個問題，就是要求聽眾證明連續統假設。我們亦由此可知希爾伯特對這猜想的重視程度。

同樣，在第三次數學危機中介紹過的數學家哥德爾，在 1938 年發表了一篇文章，證明了連續統假設並不與現有的數學系統（即 ZFC 公理系統）產生矛盾。留意，哥德爾並沒有證明連續統假設是正確的，即他沒有從目前集合論的公理推導出連續統假設成立的結論。他只是證明了，將這個假設與集合論的公理「放在一起」並沒有產生問題。

到了 1964 年，美國數學家科桑（Paul Joseph Cohen；1934 – 2007）證明了另一個更驚人的結果。他證明了，即使我們否定連續統假設，亦不會與現有的數學系統產生矛盾！換言之，連續統假設是一個獨立的命題，它既不可能從 ZFC 公理系統獲得證明，亦不可能被這個系統否定！情況就好像幾何學中的平行公理一樣。

平行公理是歐幾里得在編寫《幾何原本》時所引入的其中一條公理。這公理說：「同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在直線某一側的兩個內角之和小於二直角，則這兩條直線經無限延長後在這一側相交。」自《幾何原本》寫成後，已經有無數的數學家對這公理表示不滿。他們不是認為這公理是錯的，而是認為這公理應該好像其他命題一樣，可以從其他的公理獲得證明。可惜，一直以來，他們的嘗試都失敗！到了 19 世紀，匈牙利數學家波爾約（János Bolyai；1802 – 1860）和俄國數學家羅巴切夫斯基（Nikolai Ivanovich Lobachevsky；1792 – 1856）分別地發表了一套與平行公理相反的幾何體系，從而證明了平行公理既不能證明亦不能被否定。如果我們接受平行公理，便會得到一個「平常的」幾何系統。如果我們否定平行公理，便會得到一個異常怪異的幾何空間。不過，無論是哪一個體系，它們本身都是相容的，並沒有矛盾。

至於連續統假設，情況也類似。哥德爾和科桑的研究結果表示：如果我們接受連續統假設，便會得到一個我們習以為常的集合系統；如果我們否定連續統假設，便會得到一個「非康托」集合系統。但它們本身都沒有矛盾。至於連續統假設是否成立，則視乎我們究竟需要哪一個假設來開展我們的研究來決定，沒有絕對的對或錯。這個結果亦令人感到非常迷惑。

結束語

到這裏，我們關於無窮大的故事終於結束了。從這故事中，我們認識古希臘人最初如何懼怕無窮大，如何以間接的方法來描述無窮大，以至後來的數學家如何勇敢地面對無窮大所帶來各種邏輯上的問題，最後如何發展出一套精密的方法來計算無窮大。當中的過程絕不順利，而且迂迴曲折，這亦正好反映，今天的數學是人類集體智慧的結晶，是人類文化一個重要的組成部分，非常值得我們保留和學習。正如結束第三次數學危機時所提到，即使到了今天，在集合論和無窮大的研究中，依然存在很多問題仍未解決，還要大家繼續努力，繼續勇闖無窮大！

在很多介紹無窮大的書籍中，必定會提及數學家希爾伯特一個關於無窮大的譬喻。這譬喻大概描述一個侍應生

如何安排無窮多位旅客入住一所擁有無窮多個房間但已經住滿了客人的太空旅店的故事。這譬喻的目的是向讀者解釋 $\omega+\omega=\omega$ 的原理。不過，我卻認為，一來不可能存在一所擁有無窮多個房間的旅店（即使在太空也是不可能的），二來這個譬喻過於人工化，一點也不浪漫，聽後亦不會令人感到興奮，故此亦不打算在本書中引述有關的故事。事實上，16 世紀英國大文豪莎士比亞（William Shakespeare；1564 – 1616）在他的劇作《羅密歐與朱麗葉》中，亦曾經提及 $\omega+\omega=\omega$ 的概念，而他的表達手法卻高明得多，並且充滿詩意，遠比希爾伯特的譬喻出色。因此，在結束本章之際，將有關的內容轉載如下，供大家欣賞，聊博一笑。

《羅密歐與朱麗葉》第二幕第二場景

朱麗葉：讓我再對你多說一次，

我希望的，亦是我同時已經擁有的；

我的胸襟有如廣闊的大海，

我的愛也是如此的深；給你的越多，

我擁有的越多，因為兩者皆為**無窮大**。

閱後練習

1. 假如阿基里斯每秒能跑 5 m，烏龜每秒爬行 0.2 m。開始時，阿基里斯站在 A，烏龜在 B，A、B 相隔 10 m。又假設當阿基里斯跑到 B 時，烏龜已經向前爬行至 C。當阿基里斯跑到 C 時，烏龜又向前爬行到達 D。

   (a) 求 BC 和 CD 的距離。

   (b) 計算阿基里斯分別跑過 AB、BC 和 CD 所需的時間。由此推算阿基里斯追上烏龜所需的時間。

   (c) 求阿基里斯追上烏龜所需的距離。

2. 證明 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$。

3. 在第二次數學危機一章中曾經介紹如何將 $1+x+x^2+x^3+\ldots$ 求和的方法。試將這方法與本章關於循環小數化為分數的方法作比較。

4. 假設 a、b、c、d 為 4 個不同的實數。定義 $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}:a\le x\le b\}$，$[c,d]=\{y\in\mathbf{R}:c\le y\le d\}$。證明函數 $y=(d-c)(\frac{x-a}{b-a})+c$ 建立起 $[a,b]$ 與 $[c,d]$ 之間的一一對應關係，並畫出該函數的圖像。

5. (a) 若 $\frac{1}{2}<x\le 1$，則設 $y=\frac{3}{2}-x$；若 $\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}$，則設 $y=\frac{3}{4}-x$；若 $\frac{1}{8}<x\le\frac{1}{4}$，則設 $y=\frac{3}{8}-x$；如此類推。證明上述方法可以建立 $(0\,,\,1\,]$ 與 $(0\,,\,1)$ 之間的一一對應關係，其中 $(0,1]=\{x\in\mathbf{R}:0<x\le 1\}$，$(0,1)=\{y\in\mathbf{R}:0<y<1\}$，並畫出該函數的圖像。

(b) 由上述結果，證明 $(0\,,\,1)$、$(0\,,\,1\,]$ 與 $[\,0\,,1\,]=\{\,x\in\mathbf{R}:0\le x\le 1\,\}$ 等勢。

6. 寫出一個可以建立 $(0\,,1)$ 與 $\mathbf{R}$ 之間一一對應關係的函數，並畫出它的圖像。

7. 在第三次數學危機一章中曾經介紹康托如何證明冪集 $\wp(A)$ 的元素一定會比 A 的元素為多的方法。試將這方法與本章介紹過的對角線法作比較。

8. (a) A、B、C 為三個互不相交的集合。
證明若 $A\cup B\cup C$ 與 A 等勢，則 $A\cup B\cup C$ 亦與 $A\cup B$ 等勢。

提示： 若 $A\cup B\cup C$ 與 A 等勢，則可將 A 分割成三個不相交子集 A_1、B_1、C_1，使 A、B、C 分別地與 A_1、B_1、C_1 等勢。再將 A_1 分割成三個不相交子集 A_2、B_2、C_2，使 A_2、B_2、C_2 分別地與 A_1、B_1、C_1 等勢。並如圖 4.9 般繼續分割下去。

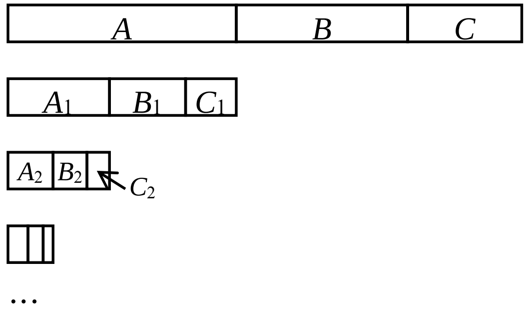


圖 4.9

設 $D=A\cap A_1\cap A_2\cap\ldots$。

證明 $A\cup B\cup C=D\cup B\cup C\cup B_1\cup C_1\cup B_2\cup C_2\cup\ldots$
及 $A\cup B=D\cup B\cup C_1\cup B_1\cup C_2\cup B_2\cup C_3\cup\ldots$
由此證明 $A\cup B\cup C$ 與 $A\cup B$ 等勢。

(b) M_2 為 M 的一個子集。證明若 M_2 與 M 等勢，則任何一個子集 M_1，只要 $M_2\subset M_1\subset M$，那麼 M 亦與 M_1 等勢。

(c) 已知 $M_1\subset M$，$N_1\subset N$。

證明若 N_1 與 M 等勢，同時 M_1 與 N 等勢，則 M 亦與 N 等勢。

由此證明自然數集 **N** 與有理數集 **Q** 等勢。

9. 利用 $0 < \omega < c$，試解釋為何 $c + \omega = c$。

提示： 由 $0 < \omega < c$，可得 $c + 0 \le c + \omega \le c + c$。

10. 將實數集 **R** 分割為無窮多個子集 $[k, k+1)$，其中 k 為任意整數（包括正數和負數）。由此試解釋為何 $\omega \times c = c$。

提示： 數一數，一共可以將 **R** 分割成多少個形如 $[k, k+1)$ 的區間？而每個區間的基數又是多少？

11. 在證明 $(0, 1)$ 與 $\wp(\mathbf{N})$ 等勢的過程中，我們將 $\frac{13}{16}$ 寫成 0.1101_2 的形式並將它對應於有限子集 $\{1, 2, 4\}$。其實我們亦可將 $\frac{13}{16}$ 寫成無窮小數的形式，即 $0.1100111\ldots_2$，那麼它便對應於無窮子集 $\{1, 2, 5, 6, 7, \ldots\}$ 了。不過，這豈不是表示 $\frac{13}{16}$ 可以對應於 $\wp(\mathbf{N})$ 內兩個不同的元素嗎？如果屬實，那麼我們怎可以說 $(0, 1)$ 與 $\wp(\mathbf{N})$ 等勢呢？試加以解釋。

提示： 想一想，**N** 一共有多少個有限子集？同時，亦可使用第 8 題或第 9 題的結果。

12. 考慮所有形如 $0.a_1a_2a_3\ldots$ 的十進無窮位小數（即 a_1、a_2、a_3、⋯ 等為 0 至 9 之中任意的整數，並由此合併而成的小數）所組成的集合。將這集合與 $(0, 1)$ 比較，由此解釋為何 $10^{\omega} = c$。

13. 假設 n 為任意一個大於 1 的正整數，ω、c 和 f 為文中的三個無窮基數。試解釋為何以下算式成立：

(a) $2^{\omega} = n^{\omega} = \omega^{\omega} = c^{\omega} = c$；

(b) $2^{c} = n^{c} = \omega^{c} = c^{c} = \mathrm{f}$；

(c) $\mathrm{f}^{n} = \mathrm{f}^{\omega} = \mathrm{f}^{c} = \mathrm{f}$。

提示： 可運用 12 題的方法解釋為何 $2^{\omega} = n^{\omega} = c$。留意 $2 \le n < \omega < c$、$\omega \times \omega = \omega$、$\omega \times c = c$ 及 $c \times c = c$。

參考書目及網頁

克萊因著，北京大學數學系數學史翻譯組譯（1981）。*古今數學思想*。第一至第四冊。上海科學技術出版社。

杜瑞芝編（2000）。*數學史辭典*。山東教育出版社。

科學出版社名詞室編（2002）。*新英漢數學詞匯*。北京：科學出版社。

梁子傑（2005）。*幾何原本導讀*。台北：九章出版社。

梁子傑（2004）。我看「第一次數學危機的教學」。*進志數學通訊*。

梁子傑、黃毅英、蕭文強（2008）。課程設計上的「古為今用」—— 以「截距定理」和「中點定理」為例。*數學教育*，(26)，3–10。

張錦文、王雪生（1989）。*世界著名數學名題欣賞叢書　連續統假設*。瀋陽：遼寧教育出版社。

項武義（2004）。*基礎幾何學*。北京：人民教育出版社。

黃毅英（2007）。三次數學危機—個人認知與體會。*中學數學教學研究*，*2007*(2)，7–10。

黃毅英（2007）。數學化過程與數學理解。*數學教育*，*2007*(25)，2–18。

蕭文強（1978）。*為甚麼要學習數學？—— 數學發展史給我們的啟發*。香港：學生時代出版社。

蕭文強（2001）。《數學史與數學教學住宿工作坊》講座二。香港科技大學育發展組，香港教育署數學組。

藍紀正、朱恩寬譯（1992）。*歐幾里得・幾何原本*。台北：九章出版社（本書原本由陝西科學技術出版社於 1990 年出版）。

名家。（2015）。取自：「維基百科，自由的百科全書」：http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%90%8D%E5%AE%B6&variant=zh-tw

Cohen P.J.,& Hersh R. (1967). *Non-Cantorian Set Theory*. *Scientific American*, *217*(12).

Gamow, G. (1947). *One Two Three … Infinity*. New York: Dover.

Kamke, E. (1950). *Theory of Sets, translated from the second German edition by Bagemihl*. New York: Dover.

Leung, K.T., & Chen, D.L.C. (1967). *Elementary Set Theory Parts I and II*. Hong Kong University Press.

Maor, E. (1991). *To Infinity and Beyond*. Princeton University Press.

Schneider H.H. (1977). Some Remarks Concerning a Definition of Ordered Pairs, *American Mathematical Monthly*, *84*.

The MacTutor History of Mathematics Archives. (2015). Retrieved from the MacTutor History of Mathematics

Archives: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/

Well-ordering theorem. (2015). Retreived from Wikipedia, the free encyclopedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Well-ordering_theorem

Zermelo-Fraenkel Axioms. (n.d.). Retreived from Wolfram MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/Zermelo-FraenkelAxioms.html

閱後練習解答

第一次數學危機

1. 證明見《幾何原本》第一卷命題 38（可參考以下網址：
   http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI38.html）。

2. 設 a 和 b 為有理數，則 $\frac{a+b}{2}$ 介乎於 a 和 b 之間，並且是有理數。

3. (a) 留意 $\angle ECF = 45°$，$\angle FEC = 90°$，因此 $\angle EFC = 45°$。由此得 $EC = EF$（等角對邊相等）。又，$\Delta ABF \cong \Delta AEF$（R.H.S.），故 $EF = BF$。

   (b) 由輾轉丈量法，比較 AC 與 BC 等同於比較 BC 與 EC。留意：因為 $EC = BF = FG = FH$，$BC - 2EC = HC$，所以比較 BC 與 EC 等同於比較 EC 與 HC。但 EC 與 HC 的關係等同於 BC 與 EC 的關係，故此輾轉丈量的過程將不停地做下去。

4. 可參考一般教科書中的標準證明。

5. (a) $\Delta ACD \sim \Delta BAF$ (A.A.A.)

(b) 設 $AC = x$。則 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{x-1}$。

即 $x^2 - x - 1 = 0$。利用二次方程求根公式得 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（捨去不合理負根）。

6. (a) 設 G 為 BE 上一點，H 為 CF 上點，使 $AG \,//\, DE$，$BH \,//\, EF$。

由定義得 $AGED$ 及 $BHFE$ 為平行四邊形。

由 $AB = BC$ 得 $\Delta ABG \cong \Delta BCH$ (A.A.S.)，所以 $DE = AG = BH = EF$。

(b) 若 $AB : BC = m : n$，則可將 AB 及 BC 分別地、平均地分成 m 份及 n 份，並且每份長度相等。由 (a) 可知 DE 及 EF 亦可分別地、平均地分成 m 份及 n 份，並且每份長度相等。因此，$AB : BC = DE : EF$。

(c) 設 G 為 BE 上一點，H 為 CF 上點，使 $AG \,//\, DE$，$BH \,//\, EF$。

由定義得 $AGED$ 及 $BHFE$ 為平行四邊形。

易證 $\angle BAG = \angle CBH$，$\angle ABG = \angle BCH$，$\angle AGB = \angle BHC$，故此由命題 1 得 $AB : AG = BC : BH$。

從而得 $AB : BC = AG : BH = DE : EF$。

第二次數學危機

1. 考慮 $\dfrac{(8+\Delta t)^2 - 8^2}{\Delta t} = 16 + \Delta t$。所以速率為每秒 16 米。

2. 考慮
$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n,$$
$$xS_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1}.$$

相減得 $(1-x)S_n = 1 - x^{n+1}$。

由此得 $S_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$。

由於 $|x| < 1$，當 x 足夠大時，x^{n+1} 會接近於 0，

因此 $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$。

3. (a) 注意：$\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$。因為當 $1.95 < x < 2.05$ 時，$3.95 < x + 2 < 4.05$，所以 $3.95 < \dfrac{x^2-4}{x-2} < 4.05$。

(b) 類似地，當 $1.999\ 999 < x < 2.000\ 001$ 時，$3.999\ 999 < x + 2 < 4.000\ 001$。

(c) 只要 $\delta = \varepsilon$ 時，題目中的不等式便成立。

4. 注意：$x \neq x_0$ 等同於 $0 < |x - x_0|$；$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 等同於 $|x - x_0| < \delta$。

5. 設 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = M$。

由極限定義可知，對於任何的 $\varepsilon > 0$，總能找到 δ_1 和 δ_2，

當 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 時，$|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 及

當 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 時，$|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$。

現取 $\delta = \delta_1$ 和 δ_2 之間的較小值。

換言之，我們能夠找到一個 δ，當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時，

$|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 及 $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 同時成立。

由此得

$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$

$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$。

根據定義，我們有

$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$。

第三次數學危機

1. (a) $\{a, b, d, e, f, g\}$ (b) $\{d, e\}$

   (c) $\varnothing$ (d) $\{c, e, f, g\}$

   (e) $\{e, f, g\}$ (f) $\{c, e, f, g\}$

2. (a) 成立 (b) 成立 (c) 不成立

   (d) 成立 (e) 成立 (f) 成立

3. (a) 永遠成立 (b) 當 $B \subset A$ 時才成立

   (c) 當 $A \subset B$ 時才成立 (d) 永遠成立

   (e) 永遠成立 (f) 當 $A = B$ 時才成立

   (g) 當 $A = B$ 時才成立 (h) 永遠成立

   (i) 當 $B = C$ 時才成立 / 當 $B, C \subset A$ 時才成立

4. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},$
   $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$
   $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\},$
   $\{a, b, c, d\}\}$

5. 〔**證明一**〕從 m 個元素中共有 C^m_h 種選取 h 個元素組成子集的方法，故冪集內總共有 $C^m_0 + C^m_1 + C^m_2 + \ldots + C^m_m = 2^m$ 個子集。

〔**證明二**〕將集合 A 中的 m 個元素逐一列出，並為每一個元素加上一個編號，得 $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m\}$。假如 B 是 A 的子集，對於任何一個 A 的元素 a_i，必定會出現以下兩個可能性中的其中一個：$a_i\in B$ 或 $a_i\notin B$。由此，我們可以將 B 對應於一個二進數 x，其中若 $a_i\in B$ 時，則 x 的第 i 位等於 1；若 $a_i\notin B$ 時，則 x 的第 i 位等於 0。例如：$\varnothing$ 對應於 0_2，A 本身則對應於 $111\ldots1_2$。要知道，由 0_2 至 $111\ldots1_2$ 一共有 2^m 個二進數，所以 $n(\wp(A))=2^m$。

6. $n\in\mathbf{N}$ 可一一對應 $2n\in E$。故兩集合的元素一樣多。

7. 若 $(a,b)=(c,d)$，即 $\{\{a,b\},\{a\}\}=\{\{c,d\},\{c\}\}$。
情況一：若 $\{a\}=\{c\}$，則 $a=c$、$\{a,b\}=\{c,d\}$ 及 $b=d$。
情況二：若 $\{a\}=\{c,d\}$，則 $\{a,b\}=\{c\}$，由此得 $a=c=d=b$。

8. $4=\{0,1,2,3\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$

$5=\{0,1,2,3,4\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}\}$

9. 設 $x\in y$ 及 $y\in x$。

$\because x\in\{x,y\}$ 及 $x\in y$，$\therefore x\in\{x,y\}\cap y$。
同樣，$\because y\in\{x,y\}$ 及 $y\in x$，$\therefore y\in\{x,y\}\cap x$。
另外，由 (A8) 可知，必定存在 $z\in\{x,y\}$ 使 $\{x,y\}\cap z=\varnothing$。由於 $z\in\{x,y\}$，即 $z=x$ 或 $z=y$。換言之，$\{x,y\}\cap x=\varnothing$ 或 $\{x,y\}\cap y=\varnothing$ 成立。但這與上兩段的結果矛盾！
故 $x\in y$ 及 $y\in x$ 不可能同時成立。

10. 這是一句自相矛盾的句子。故不能判斷該句子是否成立！

勇闖無窮大

1. (a) $BC=\frac{10}{5}\times0.2=0.4\,\text{m}$。$CD=\frac{0.4}{5}\times0.2=0.016\,\text{m}$。

 (b) 跑過 AB 所需時間 $=\frac{10}{5}=2$ 秒

 跑過 BC 所需時間 $=\frac{0.4}{5}=0.08$ 秒

 跑過 CD 所需時間 $=\frac{0.016}{5}=0.0032$ 秒

 合共時間 $=2+0.08+0.0032+\ldots=\frac{2}{1-0.04}$

 $=2\frac{1}{12}$ 秒

 (c) 合共距離 $=10+0.04+0.0016+\ldots=\frac{10}{1-0.004}$

 $=10\frac{10}{249}\,\text{m}$

2. 設 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$。則

 $2S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=1+S$。

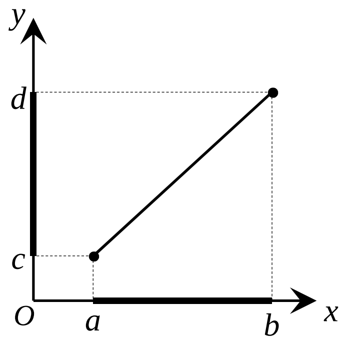
 由此得 $S=1$。

3. 基本上，兩個方法是相同的。

4. 已知函數 $y=(d-c)(\frac{x-a}{b-a})+c$。若 $x=a$，則 $y=c$。

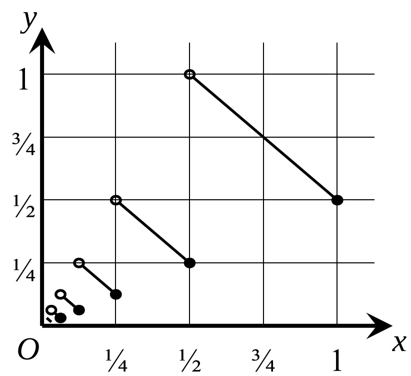
若 $x=b$，則 $y=d$。

又若 $a\le x\le b$，則易證 $c\le y\le d$。反之亦然。故可知函數的定義域及值域均正確。



另外，從左邊函數的圖像可見，任何一個位於 $[a,b]$ 內的點，它必定對應於 $[c,d]$ 內的唯一一點；任何一個位於 $[c,d]$ 內的點，它亦必定對應於 $[a,b]$ 內的唯一一點。由此可知，函數建立起 $[a,b]$ 與 $[c,d]$ 之間的一一對應關係。

5. (a)



由上圖可見，已建立起 $(0,1]=\{x\in\mathbf{R}:0<x\le1\}$ 與$(0,1)=\{y\in\mathbf{R}:0<y<1\}$ 之間的一一對應

關係。

(b) 考慮以下關係：

若 $0 \le x < \frac{1}{2}$，則 $y = \frac{1}{2} - x$；

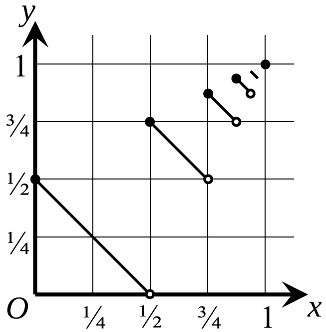
若 $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}$，則 $y = \frac{5}{4} - x$；

若 $\frac{3}{4} \le x < \frac{7}{8}$，則 $y = \frac{13}{8} - x$；

……

若 $x = 1$，則 $y = 1$。

由右圖可見，已建立起 $[0, 1] = \{ x \in \mathbf{R} : 0 \le x \le 1 \}$ 與 $(0, 1] = \{ y \in \mathbf{R} : 0 < y \le 1 \}$ 之間的一一對應關係。



由此得 $(0, 1)$、$(0, 1]$ 與 $[0, 1]$ 等勢。

6. 考慮函數 $y = \tan(x - \frac{1}{2})\pi$。

8. (a) $\because \quad A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \ldots,$

$$\therefore \quad A_n = A \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

$$\begin{aligned}
A \cup B \cup C &= (A_1 \cup B_1 \cup C_1) \cup B \cup C \\
&= A_1 \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \\
&= (A_2 \cup B_2 \cup C_2) \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \\
&= A_2 \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2 \\
&= \ldots \ldots \\
&= A_n \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2 \ldots \cup B_n \cup C_n
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad A \cup B \cup C = D \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2 \cup \ldots$$

將兩邊移去 C，得

$A \cup B = D \cup B \cup C_1 \cup B_1 \cup C_2 \cup B_2 \cup C_3 \cup \ldots$。

由於 C_1 與 C_2、C_3、⋯ 等等勢，因此上面兩式右方等勢，由此得 $A \cup B \cup C$ 與 $A \cup B$ 等勢。

(b) 由於 $M_2 \subset M_1 \subset M$，不妨設 $M_2 = A$，$M_1 = A \cup B$ 及 $M = A \cup B \cup C$。又由於 M_2 與 M 等勢，因此由 (a) 可知 M 與 M_1 等勢。

(c) $\because$ $M_1 \subset M$ 等勢於 $N_1 \subset N$ 及 M_1 等勢於 N，

$\therefore$ 由 (b)，M 亦等勢於 N。

注意：$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{N}^2$，並且 $\mathbf{N}$ 與 $\mathbf{N}^2$ 等勢。

由上面結果可知，以上三個集合等勢。

9. 由 $0 < \omega < c$，可得 $c + 0 \le c + \omega \le c + c$。但 $c + c = c$，所以 $c + \omega = c$。

10. 由於可將實數集 $\mathbf{R}$ 分割為 ω 個子集 $[k, k + 1)$，而每個子集的基數都是 c，因此 $\omega \times c = c$。

11. 注意：無論使用了哪一個進制系統，一個有限位小數必定是一個有理數。因此，有限位小數的數量必定不大於有理數集合 **Q** 的基數 ω。現在，$(0\ ,\ 1)$ 的基數為 c，即使減去有理數集合的基數 ω，我們仍然可知 $\wp(\mathbf{N})$ 的基數為 $c - \omega = c$。因此，$\wp(\mathbf{N})$ 仍然與 $(0\ ,\ 1)$ 等勢。

12. 由於每一個小數位都可以有 10 種數字的選擇，而無窮小數共有 ω 個位，因此十進無窮位小數集合的基數為 10^{ω}。同時，明顯十進無窮位小數集合等同於 $(0\ ,\ 1)$，所以 $10^{\omega} = c$。

13. (a) 運用 12 題的方法可知 $2^{\omega} = n^{\omega} = c$。

另外，$c^{\omega} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega \times \omega} = 2^{\omega} = c$。

最後，由 $2 \le n < \omega < c$ 可得

$c = 2^{\omega} \le n^{\omega} \le \omega^{\omega} \le c^{\omega} = c$，

所以 $2^{\omega} = n^{\omega} = \omega^{\omega} = c^{\omega} = c$。

(b) 已知 $2^{c} = \mathrm{f}$。類似地

$\mathrm{f} = 2^{c} \le n^{c} \le \omega^{c} \le c^{c} = (2^{\omega})^{c} = 2^{c} = \mathrm{f}$。

(c) $\mathrm{f}^{n} = (2^{c})^{n} = 2^{c} = \mathrm{f}$

$\mathrm{f}^{\omega} = (2^{c})^{\omega} = 2^{c} = \mathrm{f}$

$\mathrm{f}^{c} = (2^{c})^{c} = 2^{c} = \mathrm{f}$