

三邊測量和全球定位系統

- 學習階段： 4
- 學習範疇： 度量、圖形與空間
- 學習單位： 直線方程及圓方程
- 目標： 運用數學知識解現實生活的問題
- 先備知識： (i) 理解圓方程
(ii) 求兩圓交點的坐標
(iii) 理解餘弦公式

在 STEM 教育中與其他學習領域的聯繫：

全球定位系統可作為高中選修科物理課程中探究研習的一個課題。

背景資料：

全球定位系統 (GPS) 是由二十多顆人造衛星組成的衛星導航系統。每顆人造衛星傳送特定的訊號和軌道資料，讓 GPS 裝置 (如流動電話、手錶和汽車) 計算它們的精確位置。每部 GPS 接收器使用這些資訊和三邊測量技術，計算接收器與數顆人造衛星的距離，從而確定使用者的位置。

活動詳情：

活動 1 三邊測量

以 GPS 進行定位涉及稱為三邊測量的數學原理的應用。教師可透過以下活動引入三邊測量。

1. 學生須解以下應用題：

有三個基站可以傳送及接收流動電話 P 的訊號。假設三個基站 A 、 B 和 C 在直角坐標系的坐標分別為 $(0,0)$ 、 $(36,0)$ 和 $(16,32)$ (1 單位代表 1 km)。已知 P 至三個基站 A 、 B 和 C 的距離分別為 29 km、25 km 和 13 km。假設 A 、 B 、 C 和 P 在同一水平面上，求 P 點的坐標。

2. 教師可引導學生使用 GeoGebra 或圖表紙繪畫點 A 、 B 、 C ，和以 A 及 B 為圓心的兩個圓。以 A 和 B 為圓心的圓的半徑分別為 29 單位和 25 單位（參圖 1）。由於兩圓相交於兩點 P_1 和 P_2 ，須利用第三已知條件來決定 P 的準確位置。

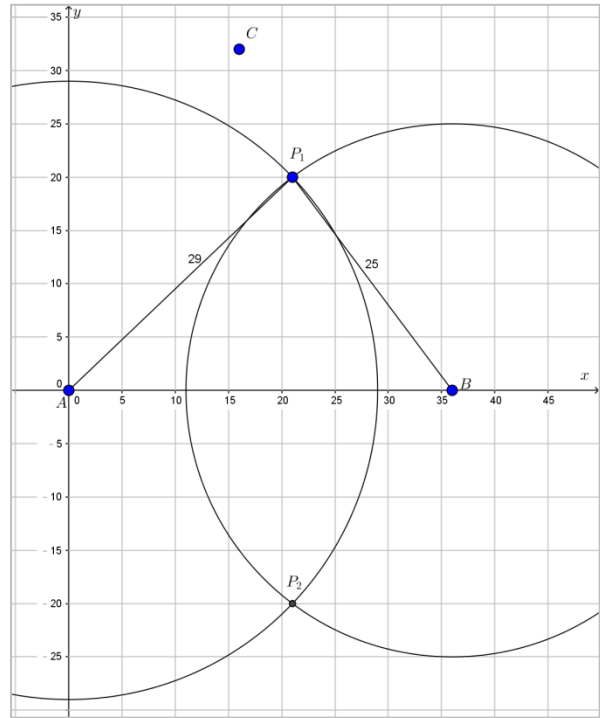


圖 1

3. 當完成繪畫以 C 為圓心及半徑為 13 單位的第三個圓後， P 的位置可被確定，即三個圓的交點。學生可從圖中閱讀到 P 的坐標大概為 (21,20)（參圖 2）。

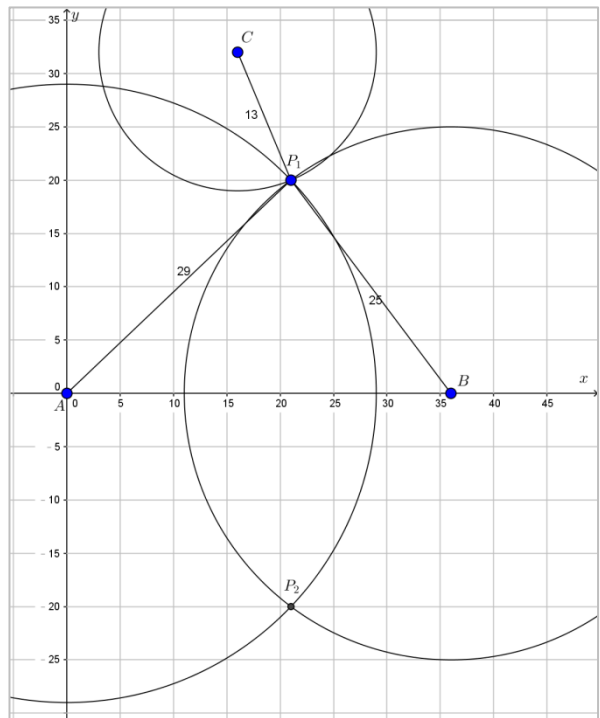


圖 2

4. 除了使用圖解法外，教師可引導學生使用代數方法求 P 的坐標。設 P 的坐標為 (x,y) ，可建立三條方程。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 29^2 \\(x - 36)^2 + y^2 &= 25^2 \\(x - 16)^2 + (y - 32)^2 &= 13^2\end{aligned}$$

解方程後， $x = 21, y = 20$ 。 P 的坐標為 $(21,20)$ 。

教師注意事項：

1. 教師可向學生解釋在現實情況下問題中的 A 、 B 和 C 其實代表 GPS 人造衛星。一夥 GPS 人造衛星和一部流動電話的距離可從訊號傳送的速度（即光速）乘以訊號的傳送時間而求得。
2. 教師應提醒學生此方法乃 GPS 使用「三邊測量」的簡易版，原因是只考慮二維空間上的圓來決定位置。在三維空間中，須使用四個球形來決定空間內一點的位置。教師可進入以下網頁參看進一步解釋（只有英文版）。
<http://gisgeography.com/trilateration-triangulation-gps/>
3. 學生可透過以下網頁觀看短片“*How GPS Works 2003*”和“*How Do Global Positioning Systems Work? 2005*”，進一步了解 GPS 和三邊測量。
<http://www.gps.gov/multimedia/videos/>
4. 教師可與學生討論 GPS 的廣泛應用，包括記錄跑步路線、量度跑步速度，和尋找遺失的流動電話等。
5. 教師可使用以下的另一例子作為演示或活動：
若 $A = (0,0)$ 、 $B = (21,0)$ 、 $C = (9,15)$ 、 $PA = 13$ 、 $PB = 20$ 和 $PC = 5$ ，經計算後 P 的坐標為 $(5,12)$ 。此例子顯示 P 點可以在 $\triangle ABC$ 以外。

活動 2 三邊測量定位

1. 此活動可在學校的籃球場進行，並需要兩個排球（或籃球）和量度距離工具。
2. 標示籃球場為 $ABCD$ （參圖 3）。教師要求學生量度球場的長度和闊度。教師在球場上記下三點 A 、 P 和 Q 。為了簡化情況， A 作為原點，而 P 及 Q 在 A 的對邊且接近球場兩邊的中點，其坐標分別為 (p, r) 和 (q, s) 。 p 、 q 、 r 和 s 的數值可透過量度求得。

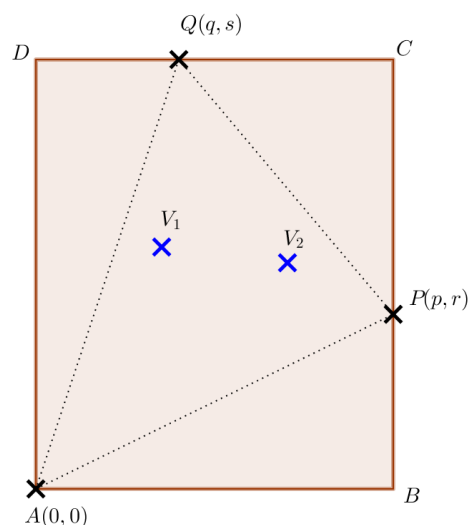


圖 3

3. 兩個排球 V_1 和 V_2 被放在籃球場之內。（若排球被放在 $\triangle APQ$ 之內則更佳。）
4. 學生須要在不能進入籃球場範圍內求兩個排球之間的距離。他們只能量度 A 、 P 、 Q 及排球之間的距離。

教師注意事項：

1. 學生可使用量度距離 apps 或鐳射量度裝置量度兩個位置之間的距離，例如 AB 、 AP 及 AV_1 等。
2. 在現實情況下，由於量度會有誤差，從而產生不一致的聯立方程。在求其中一個排球的坐標時，教師可引導學生首先解以 A 、 P 和 Q 其中兩點為圓心的圓方程。隨後，學生將經計算而得的兩交點的坐標代入以餘下的點為圓心的圓方程，來決定哪一個坐標才是排球的正確位置。

參考資料：

1. <http://electronics.howstuffworks.com/gadgets/travel/gps.htm>
2. <https://www.lelandwest.com/car-accessories-the-gps-device.cfm>