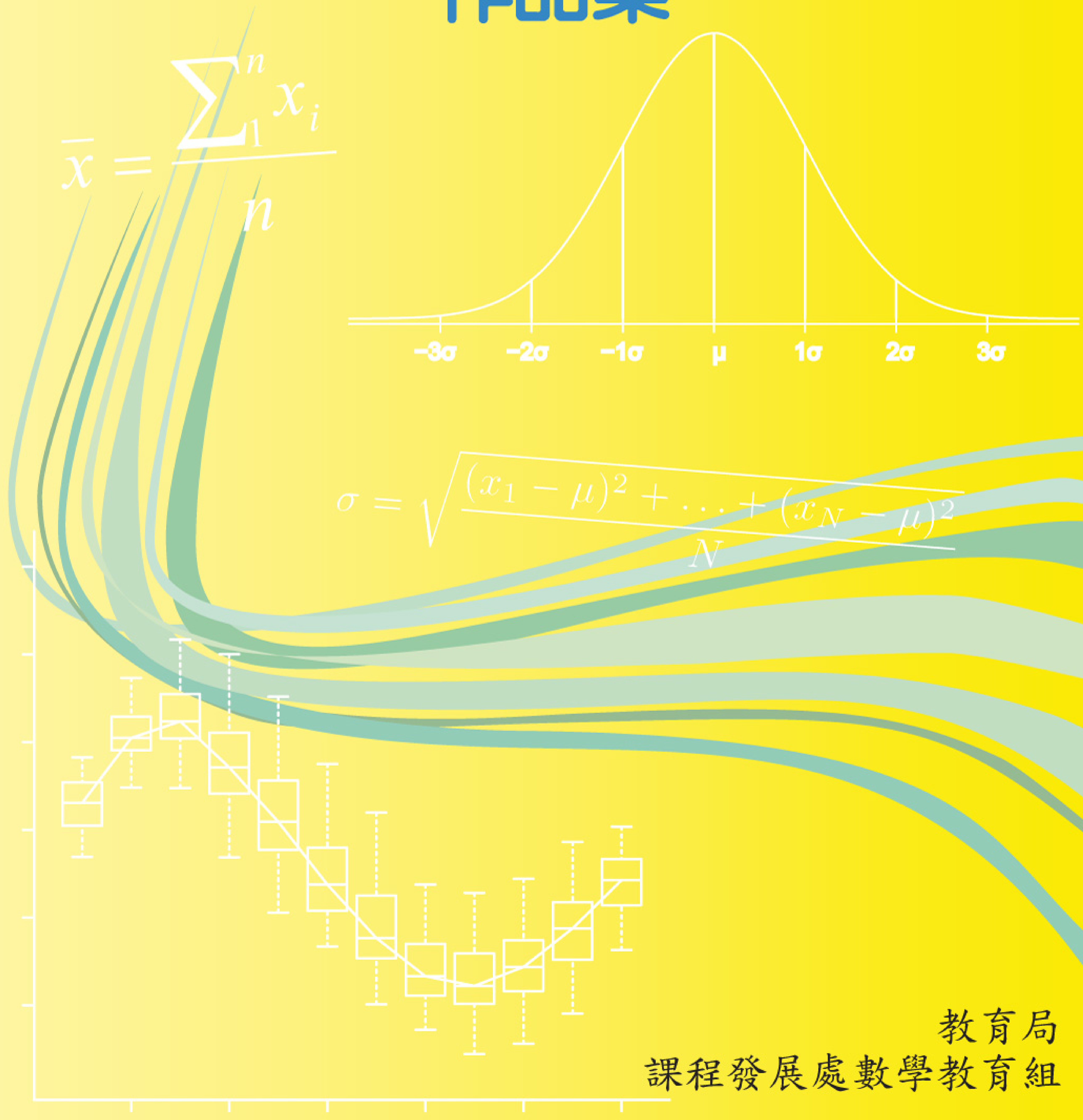
数學百子櫃系列（十二）

2010/11 中學生統計創意寫作比賽

作品集



教育局
課程發展處數學教育組

數學百子櫃系列（十二） 2010/11 中學生統計創意寫作比賽 作品集

教育局數學教育組

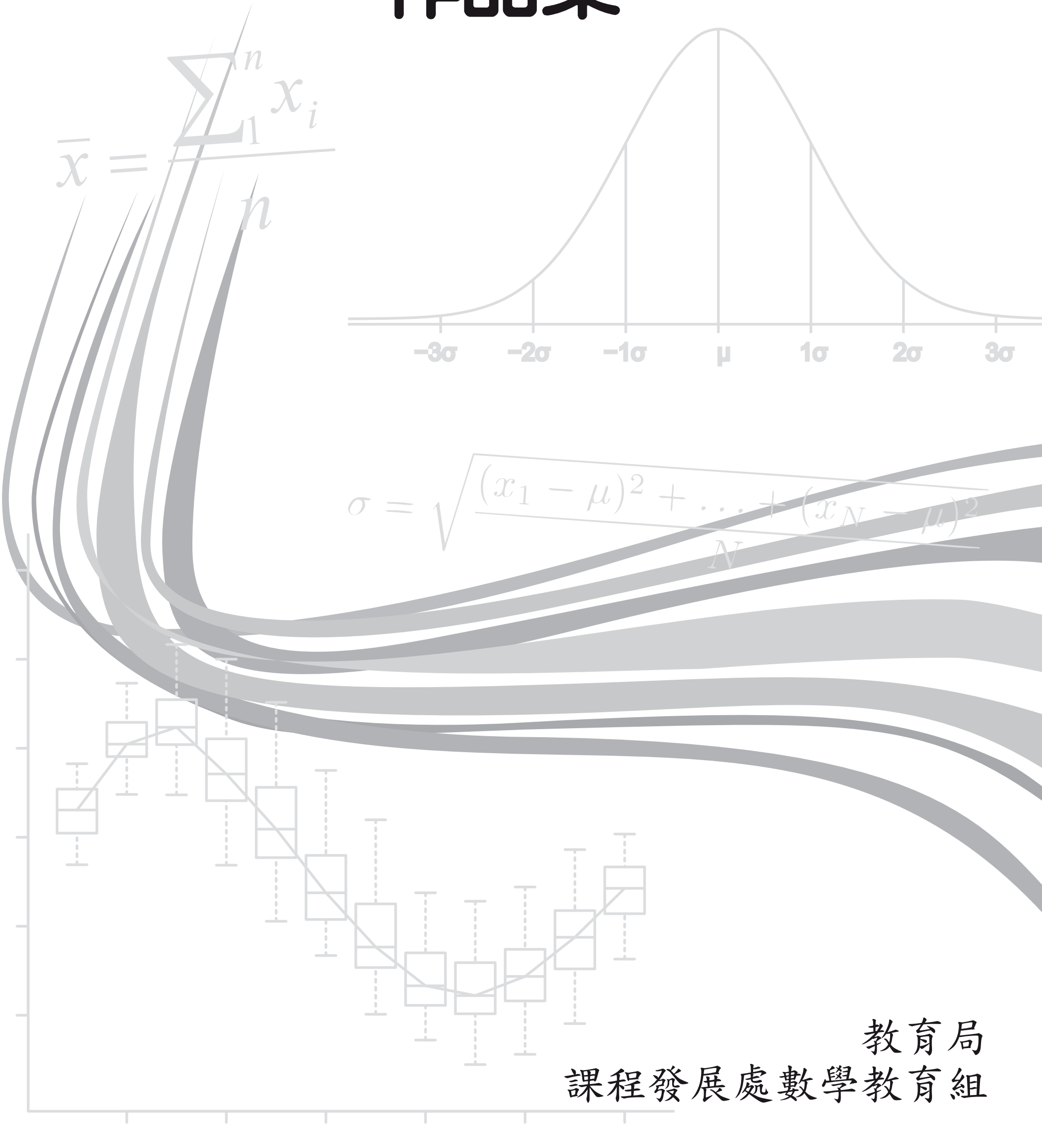
教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印
Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-988-8123-58-2

數學百子櫃系列（十二）

2010/11 中學生統計創意寫作比賽

作品集



教育局
課程發展處數學教育組

ISBN 978-988-8123-58-2

編者的話

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於2007年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集》，是這個系列的第十二冊。本書輯錄的文章，大部分是「2010/11中學生統計創意寫作比賽」的優勝作品，均由中學生所編寫，這亦是本書的特色。

我們每天均與數字為伍 — 市場佔有率、收視率、銷售數量、客戶滿意度、品牌知名度等，「統計」與我們的生活密不可分。本書希望透過創意寫作的趣味故事為藍本，以簡易的語言輕鬆地介紹概率及統計的知識。

全書共有14篇文章，第1至9篇為「2010/11中學生統計創意寫作比賽」的冠、亞、季和6篇優異作品。其餘5篇則為邀請作品，分別由政府統計處的統計師，數學教育組課程發展主任和香港大學統計及精算學系教授所創作。每篇均可單獨閱讀，望能引發讀者對統計的興趣，提升「數字管理」的能力。

此書得以順利出版，實有賴這次比賽的籌備委員會成員、數學教育組的同工共同努力的成果。在此，謹向編寫

作品的得獎隊伍、政府統計處的統計師、香港大學精算及統計學系教授和教育局數學教育組同工致以衷心的感謝。最後更要多謝這次比賽的籌備委員會主席楊良河博士和評審委員會首席評審員張家俊博士。他們鼎力協助，審訂本書的內容，讓學生能夠接觸更多有趣的文章，提升他們學習統計的興趣。

如對本書有任何意見或建議，歡迎以郵寄、電話、傳真或電郵方式聯絡教育局課程發展處數學教育組:

九龍油麻地彌敦道405號九龍政府合署4樓
教育局課程發展處
總課程發展主任(數學)收
(傳真: 3426 9265　電郵: ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

前言

香港統計學會一向不遺餘力向社會各界推廣統計教育。除了每年與教育局合辦「中學生統計習作比賽」，以鼓勵同學透過團隊合作形式學習正確運用統計數據及增進對社會的認識外，我們於2009年再與教育局合作創辦「中學生統計創意寫作比賽」(SCC)。

在香港這個中西文化交匯和社會經濟變化急速的地方，良好的語文表達能力及創新的意念均是個人發展的重要條件。舉辦SCC的目的，正是希望在提高中學生對統計的興趣之餘，進一步鼓勵他們運用創意手法，以科學和客觀的精神，生動有趣地用文字表達日常生活中所應用的統計概念或創作一個蘊含統計概念的故事。

繼承首屆的優良成績，今屆的SCC收到約60份參賽作品，當中不乏精彩之作。本書輯錄今屆所有得獎作品，藉此嘉許得獎同學付出的努力。

香港統計學會主席鄧偉江

2011年9月22日

序言

是次「統計創意寫作比賽」共收近 60 份參賽作品，經由教育局、政府統計處和香港大學統計及精算系內從事統計工作及教育的專業人士所組成的評審團進行評審。評審標準主要為創意和趣味性，及對統計知識的闡釋和正確應用。在此先鳴謝一眾評審團成員，感激他們公正嚴謹地為我們選出優勝作品。以下是評審團對參賽及得獎作品的意見。

綜觀眾多參賽作品，一如去屆，同學普遍能於取材及表達手法上發揮創意，亦能正確地運用各種統計圖表及統計和概率的知識去分析問題，值得嘉許。特別是勝出的作品，文章題材富創意，緊貼時事，趣味盎然，活用不同的概率和統計方法。如冠軍作品提出一個數學模型去解釋在新聞中偶有聽聞的見死不救事件，題材新穎，角度嶄新，分析有條有理；或像亞軍作品，有系統地探討了學業進步獎的不同得獎標準分的利弊，題材與師生息息相關；季軍作品以虛構的故事，探討帕斯卡三角形中的路徑數目及其一些有趣的變化；其他得獎作品題材亦相當廣泛，如戰術運用、俄羅斯方塊的策略、纖體中心的宣傳技倆等，可見同學們除了緊貼時事和創意非凡外，還有獨立及批判性的思考，能夠做到真正的活學活用。在文字表達方面，錯別字或口語的出現比去屆大為減少，值得欣喜。

另一方面，評審團亦指出了一些可改善的地方。首先，同學在闡釋統計概念時，要謹記指出分析背後的假設和合理性，亦應增加就統計模型的適用性及局限等的討論，以提醒讀者在應用模型時要注意的地方；在文章的組織方面，中心思想可更清晰明確，應避免過多不必要的分析，使文章的結構更為緊密，從而提升文章的可讀性。希望來屆參加的同學能多下工夫，寫出更佳的作品。

評審委員會首席評審員　張家俊博士

2011年9月20日

目錄

冠軍作品：做統計，我唔制。責任制 ？！

學校名稱：荃灣官立中學
學生姓名：呂瑤兒、吳志健、金佳賢
級別：中五
顧問老師：陳栢垣

引言

在做學校小組專題研習功課時，總會發現某些同學「不負責任」，和他們同一組時，他們甚麼也不做。但當他們是工作的唯一負責人時，卻會用心準時完成工作。背後的原因究竟是什麼？我們將會以概率的應用解釋以上問題。

課室內，「數林之王」Fergus(F)，勤奮好學的Henrietta(H)和懶惰、但有小聰明的Clifford(C)正在討論專題探究的內容。

H：怎麼辦？下星期便要提交中學生統計創意寫作比賽2010的報告了！我們連主題也未想好！

C：你們決定吧！只要不用我工作便可以了！

H：你這個不負責任的壞蛋！真不知道當初為何我會答應跟你一組的！

F：別慌，我們一定趕得及的，日常生活很多事情都與統計有關，單是小組專題研習誰工作誰不工作，已可用統計學的角度解釋了！

C：你這話是什麼意思？

F：這種情況其實和「責任分散論」[3] 十分相似。

H：什麼是「責任分散論」呀？

F：讓我舉一個例子吧！假設現在街上，甲君昏倒在地，而街上只有乙君一人，而甲、乙二人互不相識。乙君可以報警或對傷者視而不見。若乙君選擇報警求助，由於能幫助甲

君，心安理得，又有成功感，因此心理上能得到一些「得益」。我們設這個「得益」為B (Benefit)。另一方面，由於幫助甲君，乙君將會被警察問話，浪費時間，對於乙君來說是「代價」。我們設這個「代價」為C(Cost)。回報值(payoff)定義為得益減去代價，即(B-C)。若乙君決定對傷者視而不見，即是沒有任何幫助，所以回報值為0。

只要乙君認為報警的得益(B)大於代價(C)時，即 (B-C)為正數，他才會去幫助甲君。

假設現在街上有乙君和丙君，而甲、乙和丙三人互不相識。站在乙君的立場，當然希望把報警的工作留給丙君完成，使他不用浪費時間。而站在丙君的立場，當然也希望把報警的工作留給乙君。

從乙君的角度去想，設丙君不報警的概率為P，換句話說丙君報警的概率是(1-P)。當丙君救人後，乙君也會因街上的人獲救而心安理得，也可以得到得益(B)，並不用付出代價。若然丙君不報警，而自己又不報警，乙君的回報值是0。

由於丙君有可能報警或不報警，運用統計學

上的期望值計算，乙君所得的期望回報值 (expected payoff)是 $B(1-P)+0\times P=B(1-P)$。

乙君報警或不報警，取決於乙君報警的回報值能否大於不報警的期望回報值。若乙君猶豫不決，即

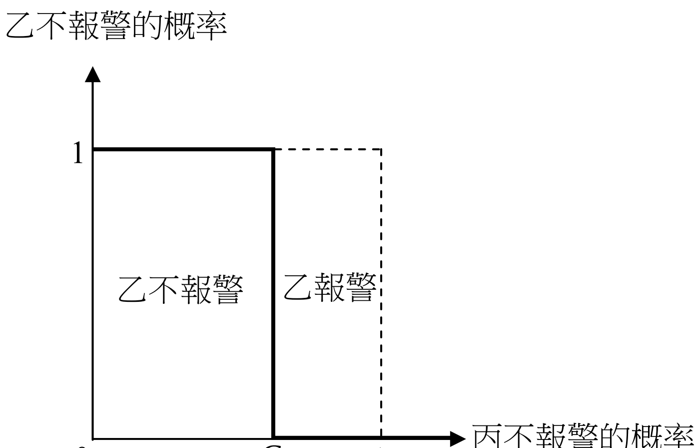
$$B-C=B(1-P)$$

$$B-C=B-BP$$

$$-C=-BP$$

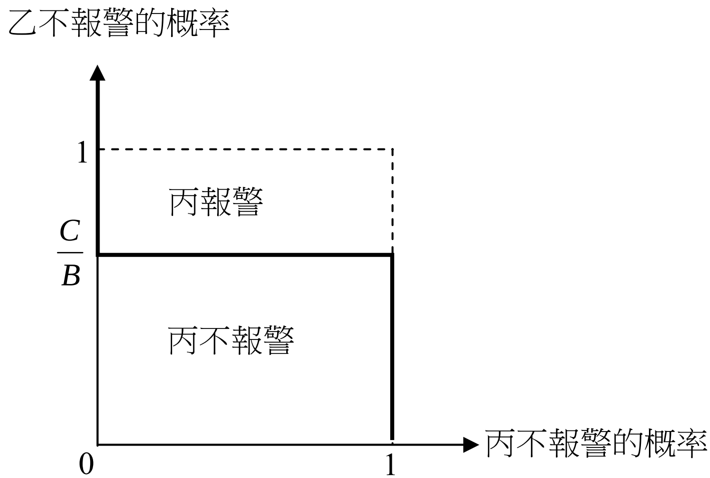
$$P=\frac{C}{B}$$

當丙君不報警概率等於 $\frac{C}{B}$ 時，乙君會猶豫不決。

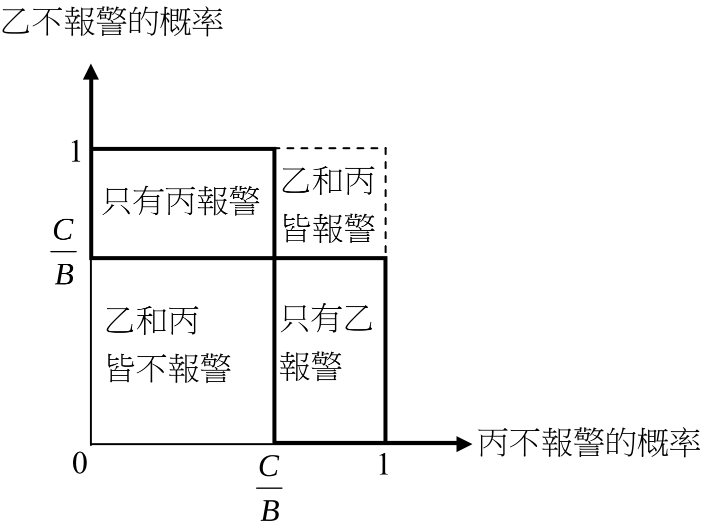


上圖說明了如果丙不報警的概率大於$\frac{C}{B}$，那麼乙不報警的概率便是0，即是必定報警；相反，如果丙不報警的概率小於$\frac{C}{B}$，那麼乙不會報警。

同樣道理，假設丙君的B值和C值與乙君相同，站在丙君的角度，只要乙君不報警概率等於$\frac{C}{B}$時，丙君同樣會猶豫不決。得出以下圖表：



將兩個圖表合併，便會得出以下圖表：



根據概率的樣本空間和乘法定律，乙和丙皆不報警的概率是$\left(\frac{C}{B}\right)^2$(編者按：$B$和$C$為心理上的得益和代價，未能量化，但為方便讀者明白，設B為10，C為7，乙和丙皆不報警的概率便是$\left(\frac{7}{10}\right)^2$，即0.49。) 如果$B$的數值愈大，$C$的數值愈小，那麼不報警的概率便會愈小，甲君便會有較大機會獲救。

現在，我們考慮有更多人的情況。設街上不包括甲君的人有n人(包括乙君自己)，且$n>1$，

又假設每人不報警的概率均為P。不包括乙君本人，由於每人都是獨立作出決定，所以街上所有人都不報警的機會為P^{n-1}，而任意一人報警的概率為$(1-P^{n-1})$。所以乙君的期望回報值是：

$B(1-P^{n-1}) + 0\times P^{n-1} = B(1-P^{n-1})$。

同理，要乙君猶豫不決。即

$$B - C = B(1 - P^{n-1})$$

$$B - C = B - BP^{n-1}$$

$$-C = -BP^{n-1}$$

$$P^{n-1} = \frac{C}{B}$$

$$P = \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

P為每個人不報警的概率，當n趨向無限，$\dfrac{1}{n-1}$趨向0，P就會趨向1，亦即是說每個人差不多肯定不會報警。

同樣地根據概率的樣本空間和乘法定律，所有人(連同乙君)皆不報警的概率是

$$P^n = \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

不難看出，當n趨向無限時，P^n會由$\left(\frac{C}{B}\right)^2$上升至$\left(\frac{C}{B}\right)$，亦即是說愈多人的話，全部人皆不去報警的機會愈大，至少有一人報警的機會減少，因此甲君失救的機會增加。以上例子便解釋了責任分散這個社會現象。(編者按：用$B=10$，$C=7$，假設n為100，P便會由$n=2$時的0.7提升至0.996，而P^n則由0.49提升至0.697，亦即是說至少有一人報警的概率由原來的0.51下降至0.303。)

其實這類責任分散導致見死不救的事件在世界各地並不罕見，去年四月美國紐約一名露宿者為了保護一名女途人，慘遭狂徒用利刀狂插胸部，倒卧路邊奄奄一息，25名路人經過都沒有施以援手，有人甚至只管拍照，救人英雄最後命喪街頭[4]。

H：我也記得大約兩個月前一名英國女子在facebook 預告自殺後，她的千多位朋友要麼以為死亡訊息是玩笑，要麼留言嘲笑她，竟然沒有一位人願意去報案，令她最終死亡[5]。還有數年前遼寧省東遼縣一個水庫發生遊客溺水事件，岸上數百名圍觀者也全都見死不救[6]。社會這樣涼薄，真讓我感到心寒。

C：我現在明白何謂「責任分散論」了，誰來救人和誰來完成小組專題研習真的有不少相似的地方啊！

假設現在學校組織一個隊伍參加中學生統計創意寫作比賽2010，而每隊人數若然沒有限制的話，將可由1至N位學生組隊參賽。假設每位學生在完成作品後，會有得益(B)，即能學到新的統計知識、有可能得到獎項、不用再被老師催促和不怕被組員埋怨，同時有代價(C)，因為完成作品需要花上時間和精力，對於學生是一種負擔。

假設現在隊伍只有一人，即甲君。

當他工作的得益(B)大於代價(C)時(即是$B>C$)，他才會去完成專題探究。

現在假設該隊有兩名學生，甲君和乙君。站在甲君的立場上看，他當然希望把工作留給乙君完成。而乙君亦希望把工作留給甲君完成。除了今次甲君和乙君互相認識外，情況和Fergus所說的救不救人相似。如此類推，當N的數值愈大，每位組員主動完成探究的意欲便愈小。

Henrietta，我和Fergus已負責提供意念，你便負責完成文字工作的部分吧！

H：救人或許只消一位旁觀者撥電話，但撰寫報告的過程可以是合力完成的！Clifford，你就別想推卸責任了！

C：糟！詭計被揭穿了！

總結：

從以上的「見死不救」和撰寫報告的例子看出原來人多未必好辦事，由於責任全被分散了，人愈多，至少一人主動伸出援手的機會愈低。所以在做小組專題研習功課時，便出現那些「不負責任」的同學了。

(字數: 2228)

參考資料：

1. Chan, M.H., Leung, S.W., Mui W.K., & Kwok P.M. (2008). *New Trend Senior Secondary Mathematics Book 5B* (second edition). Hong Kong: Chung Tai Education Press.

2. Avinash K. Dixit, & Susan Skeath (2004). *Games of Strategy* (second edition). New York: W.W. Norton & Company.

3. 維基百科網站 (責任分散)
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B4%A3%E4%BB%BB%E5%88%86%E6%95%A3

4. JS新聞台網站 (冷漠紐約人見死不救 救人英雄失救死)
   http://www.jetsoeasy.com/bbs/viewthread.php?tid=196869

5. 太陽報網站 (fb1082 朋友見死不救)
   http://the-sun.on.cc/cnt/china_world/20110107/00423_001.html?pubdate=20110107

6. 零舍好討論區網站 (遊客遇溺數百人見死不救)
   http://bbs.04gd.com/thread-10389-1-1.html

亞軍作品: 學業進步 !?

學校名稱: 東華三院吳祥川紀念中學
學生姓名: 林萬維
級別: 中五
顧問老師: 劉漢昌

引言

每逢考試完畢後，老師總會把同學的考試成績與上一次作比較，看看每位學生的進步情況。但是，以什麼方法進行比較才合適呢？本文透過一個故事來探討這個問題。

今天是家長日，中文科的陳老師拿著學生的成績單，在課室內沉思，樣子十分苦惱。路過的張老師及李老師看見後，一起上前慰問：「你為什麼拿著成績單發呆？」陳老師苦笑道：「我想比較學生在兩次考試的進步情況，但我不知道怎樣比較才合適。」張老師自小對解難有濃厚興趣，所以他說：「不如你讓我們看看成績單吧！」

學生	第一次考試分數	第二次考試分數
陳俊宏	63	78
李怡君	35	45
張佳玲	67	68
張宜婷	30	43
林玉儀	83	90
區韻如	31	38
周志強	58	35
楊志強	56	47
陳志建	60	48
梁雅琪	75	69
吳美玲	55	70
羅立偉	74	77
鄭惠樺	32	49
劉志明	65	71
謝俊豪	10	24

原來李老師以前的數學成績也不差，看見其他

老師在沉思，於是沾沾自喜地說：「不如用百分數變化吧！」

學生	第一次考試分數	第二次考試分數	百分數變化 (%)
陳俊宏	63	78	+23.8
李怡君	35	45	+28.6
張佳玲	67	68	+1.5
張宜婷	30	43	+43.3
林玉儀	83	90	+8.4
區韻如	31	38	+22.6
周志強	58	35	–39.7
楊志強	56	47	–16.1
陳志建	60	48	–20.0
梁雅琪	75	69	–8.0
吳美玲	55	70	+27.3
羅立偉	74	77	+4.1
鄭惠樺	32	49	+53.1
劉志明	65	71	+9.2
謝俊豪	10	24	+140.0

李老師說：「原來謝俊豪同學進步最大。」他不禁為自己的聰明而高興。

陳老師反駁道：「且慢，用百分數改變不可行，因為如果你的基數愈小，你的百分數變化會

較大。即是說，如果你在第一次考試得一分，第二次考試考獲四分，那你的得分已增加了300%，但實際上你只增加了三分。」李老師滿面通紅，默默不語。陳老師續說：「不如計算分數的直接增減吧！」

學生	第一次考試分數	第二次考試分數	分數的增減
陳俊宏	63	78	15
李怡君	35	45	10
張佳玲	67	68	1
張宜婷	30	43	13
林玉儀	83	90	7
區韻如	31	38	7
周志強	58	35	–23
楊志強	56	47	–9
陳志建	60	48	–12
梁雅琪	75	69	–6
吳美玲	55	70	15
羅立偉	74	77	3
鄭惠樺	32	49	17
劉志明	65	71	6
謝俊豪	10	24	14

陳老師：「我想，鄭惠樺同學進步最大。」

張老師看了後，便立刻說：「這個方法有些問

題，你看看成績單，陳俊宏同學和吳美玲同學都進步了15分，而林玉儀和區韻如亦同樣進步7分。你怎樣比較他們之間的進步呢？」「這個…這…」，陳老師支吾以對。看見他束手無策，張老師終於緩緩地說：「不如用排名進步來比較吧。」

學生	第一次考試排名	第二次考試排名	名次改變
陳俊宏	6	2	4
李怡君	11	11	0
張佳玲	4	7	–3
張宜婷	14	12	2
林玉儀	1	1	0
區韻如	13	13	0
周志強	8	14	–6
楊志強	9	10	–1
陳志建	7	9	–2
梁雅琪	2	6	–4
吳美玲	10	5	5
羅立偉	3	3	0
鄭惠樺	12	8	4
劉志明	5	4	1
謝俊豪	15	15	0

張老師:「從名次的變幅來說，我認為吳美玲

同學的進步最大。」

陳老師和李老師齊反對說：「這方法怎可行，林玉儀同學在第一次和第二次考試都是第一名。雖然她的名次沒有上升，但實際上她的分數是有增加的。試想一想，如果有位同學第一次考試是第一名，那麼他便永遠無法進步。」張老師無奈地道:「這也是。」

如果以百分數改變計算，謝俊豪同學的進步最大；如果以直接分數增加計算，鄭惠樺同學的進步最大；如果以名次改變計算，吳美玲同學的進步最大；那麼誰的進步才是最大呢？

這時校長走過，知道他們正為計算成績進步而苦惱。校長了解情況後，問他們:「一個學生若第一次考試65分，第二次60分。是否一定代表他退步了？」李老師回答:「不一定。兩次考試的內容及難度都不同，兩個分數無法直接比較。」校長：「對的。其實學生們所獲得的分數稱為原始分。當我們用學生的原始分進行比較時，除了要與他們上一次的成績作比較外，也要跟其他同學的成績作比較，看看相對於其他同學，成績進步了或退步了。要客觀地比較，可以用標準分。」他們驚訝得大叫：「什麼是標準分？」

校長說:「說明甚麼是標準分前，先要解釋甚麼是標準差。設有n個測驗分數 x_1，x_2，…，x_n。標準差σ的定義是

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

，其中$\bar{x}$是測驗分數的平均分。

標準差表示的意思是以平均分為中心，計算同學們的分數與平均分的平均差距，它反映出同學分數的分散程度。至於標準分(z)的定義是

$z=\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma}$。標準分是以標準差為參考。首先計算每一位同學的分數與平均分的差距，再把這個差距除以標準差，看看該差距有多少個標準差。標準分是一種以標準差為單位的量。它以整體的平均作比較；若標準分為正，表示學生的成績高於平均，且數值越大，代表成績愈好；負值則表示學生的成績低於平均。

我們只要計算每位同學標準分的改變，若改變愈大，則進步愈大，這樣一來便可知道哪一位學生的進步最大。」

學生	第一次考試的標準分	第二次考試的標準分	標準分改變
陳俊宏	0.504	1.152	+0.648
李怡君	–0.898	–0.641	+0.257
張佳玲	0.705	0.609	–0.096
張宜婷	–1.149	–0.750	+0.399
林玉儀	1.506	1.804	+0.298
區韻如	–1.099	–1.022	+0.077
周志強	0.254	–1.185	–1.439
楊志強	0.154	–0.533	–0.686
陳志建	0.354	–0.478	–0.832
梁雅琪	1.105	0.663	–0.442
吳美玲	0.104	0.717	+0.614
羅立偉	1.055	1.098	+0.043
鄭惠樺	–1.049	–0.424	+0.625
劉志明	0.604	0.772	+0.167
謝俊豪	–2.150	–1.783	+0.368

經過一番計算後，校長發現原來陳俊宏同學的標準分改變最大，因此他的中文科成績進步最大。

校長續說:「除了比較某一科的進步，你們還可用標準分來比較在幾科不同學科中，哪一個學生的進步最大。例如，若想知道哪一個學生在中、英、數三科獲得最大進步，你們只需把第二次考試三科的標準分總和，減去第一次考試三科的標準分總和。增加愈大，則代表進步愈大。」

陳老師、張老師和李老師茅塞頓開。陳老師決定送一份禮物給陳俊宏同學，以表揚他在中文科獲得最大的進步。

(字數: 2440)

季軍作品: 只差一點點

學校名稱：粉嶺禮賢會中學
學生姓名：葉芷欣、陳穎芯
級別：中五
顧問老師：朱吉樑

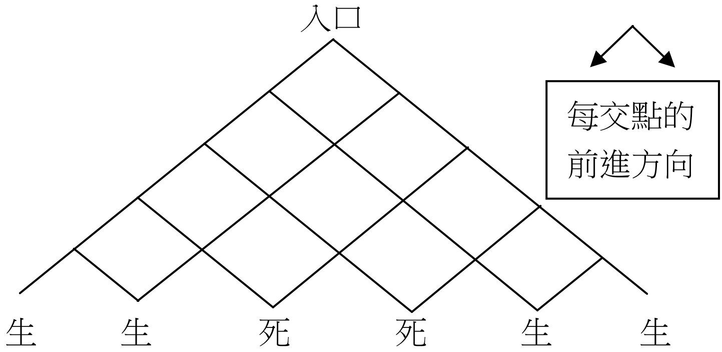
引言

你曾否嘗試過右圖這個遊戲？如果圖中的一些「點」消失或改變位置，會不會影響整個路線呢？其實這個問題與統計學上的概率有密切的關係。就讓我們以牛郎織女的故事作為藍本，來探討這個問題。

織女因為每年只可在七夕與牛郎相見一次，所以患上了相思病。從此以後，再沒有人為天庭編織。因此，玉帝便找了一個新織女–小織女來代替她。

小織女很想到凡間走一趟，便悄悄地偷了皇母娘娘的仙衣下凡。下凡後，小織女與織女的兒子小牛郎結下情意，於是便與小牛郎結婚。本來，他們男耕女織，相親相愛，過著幸福的生活。但不幸的事情總會發生，當玉皇大帝(玉帝)知道小織女私自下凡並與凡人相愛後，非常憤怒。於是便命令天兵捉拿小織女回到天庭。玉帝決定把小織女和小牛郎分開，令他們永遠不能相見。

眾臣聽到這消息後，由於他們很同情小牛郎和小織女的遭遇，不想玉帝棒打鴛鴦，於是一同請求玉帝放過這一對苦情人。玉帝為了平息事件，便想了一個辦法。他設計了一個路線圖(見下圖)。



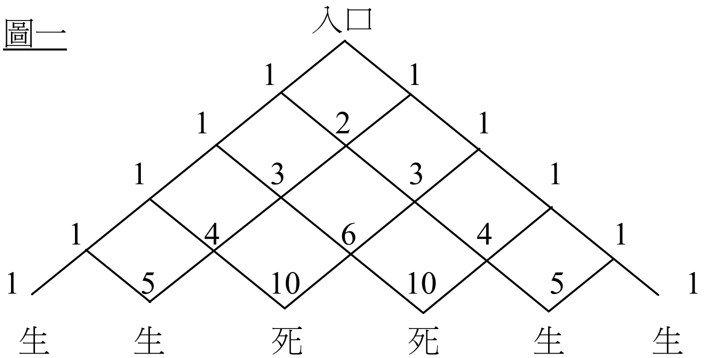
圖上有一個入口，小織女只可以向前走，不可向後走。而每個交點都有兩個**均等**的選擇，即二分之一的機會。如果小織女能成功到達「生」門的話就允許他們在每年的七夕相見一次，否則小織女便永遠不能與小牛郎相見。

眾臣都認為玉帝十分仁慈，因為他們看到圖上有四個「生」門，而「死」門則只有兩個，所以他們覺得小織女應該會有很大的機會會到達「生」門。於是，他們一致認同玉帝這個決定。眾人心想：「一切就要看小織女自己的造化了。」

太上老君知道玉帝是一個很愛面子的人，又怎會那麼輕易放過小織女呢?太上老君看到路線圖上雖然「生」門比「死」門的數目多，但這又

是否代表小織女有很大的機會到達「生」門呢？經過他的神機妙算，得出以下結論(見圖一)：

圖一



圖中交點上的數字，代表走向該交點的路線總數。
「生」即代表「生」門，「死」即代表「死」門

到達每個出口都必會經過五個交點，需要作出五次選擇。雖然有四個「生」門和兩個「死」門，但其中會有20條路線到達「死」門，即是有20/32(62.5%)的機會。

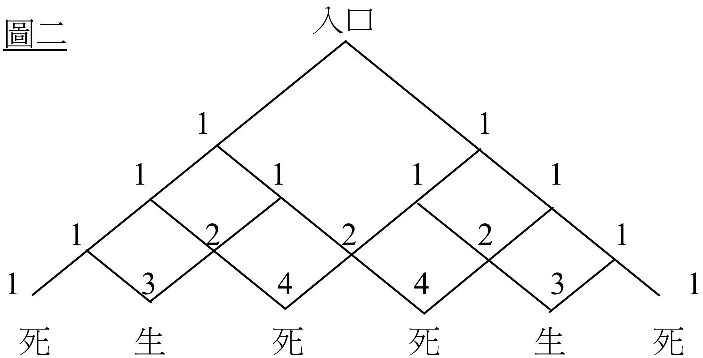
這意味著小織女有高於一半的機會不可與小牛郎相聚。原來，眾臣也被玉帝蒙騙了。

太上老君雖然認為小織女私自拿取仙衣理應受到應有的懲罰，但他也被小牛郎和小織女打動了，便決定幫小織女一次，嘗試盡量降低小織女

到達「死」門的機會。

太上老君想到用掩眼法來瞞過玉帝那雙法眼，以降低到達「死」門的概率。第二天，他便向玉帝展示了一張經過改動的路線圖(見圖二)。

圖二



太上老君便對玉帝說：「微臣認為之前的路線圖太少「死」門了，臣認為應設定多兩個「死」門，即一共四個「死」門，兩個「生」門。另外，臣亦認為把路線圖上的其中一點刪去，以減少路線數目，節省時間。未知玉帝的意見如何？」

玉帝心感不妥，便說：「這個改動會否對整體的概率造成影響？」

太上老君說：「經過微臣一算後，臣發現雖然

到達出口的總路線數目會減16條，但小織女亦同樣地需要作四次選擇，所以她到達「死」門的機會同是10/16(62.5%)，這與玉帝原先所設的概率相同。」

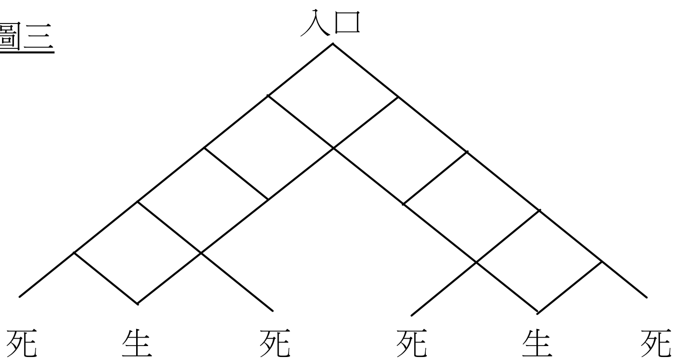
玉帝說:「噢!原來是這樣，路線的數目雖然減少，但概率並沒有因此而改變，那麼便照你的意思去做吧!」

得到玉帝的信任後，太上老君說:「其實微臣還有一個想法…」

玉帝說:「請說。」

太上老君說:「臣認為，不如把需要消失的交點向下移(見圖三)，整個設計就像我們天宮的座席，豈不更加美觀，更貼合玉帝你的身份!」

圖三



玉帝說：「真妙!就這樣決定吧，就在七夕那天按此路線進行吧!」

到了七夕那天，小織女戰戰兢兢地進入入口。數分鐘後，小織女便從「生」門裡高高興興地走出來。

太上老君心裡暗笑：「幸好玉帝並沒有發現其實路線的數目是改變了的。」這改變亦會減少到達「死」門的機會，以到達左方「死」門為例(參考圖四)，概率是：

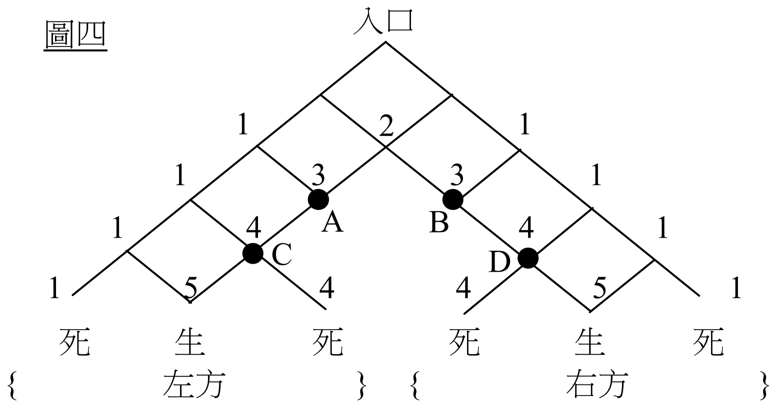
$$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{4}$$

會經過 A 點的 3 條路線，每交點只有 4 個選擇。

不會經過 A 點的 2 條路線，每交點有 5 個選擇。

所以到達左方「死」門的機會便是四分之一。

圖四



當小織女到達路線圖(見圖四)上的A和B點時，她只有一個選擇到C和D點。一共有五條路線可到達左方「死」門，其中三條路線會到達A點，所以小織女便需作4次的選擇。其餘兩條路線則不會經過A點，所以小織女仍需作出5次的選擇。由於路線圖是對稱的，所以到達右方「死」門的概率也是一樣。到達「死」門的概率，由原先玉帝所設定的62.5%下降至50%。所以到達「生」門的概率便是 $\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$ (即50%)。太上老君成功提升了小織女到達「生」門的機會。

結果小織女能在每年的七夕與小牛郎相見。小織女知道自己有錯在先，應受到懲罰，能每年見小牛郎一次，已心滿意足。同時，她亦非常感激太上老君暗中的幫忙。

玉帝原來就是只差這「一點」，使分開他們的概率大幅減少，不過小織女能走到「生」門，其實機會亦只是一半(50%)，所以，可能是他們的愛真的感動了上天!

(字數: 1755)

參考資料：

1. 帕斯卡三角形

http://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html

2. 牛郎織女的故事

http://www.youtube.com/watch?v=2pW5OSeQK80

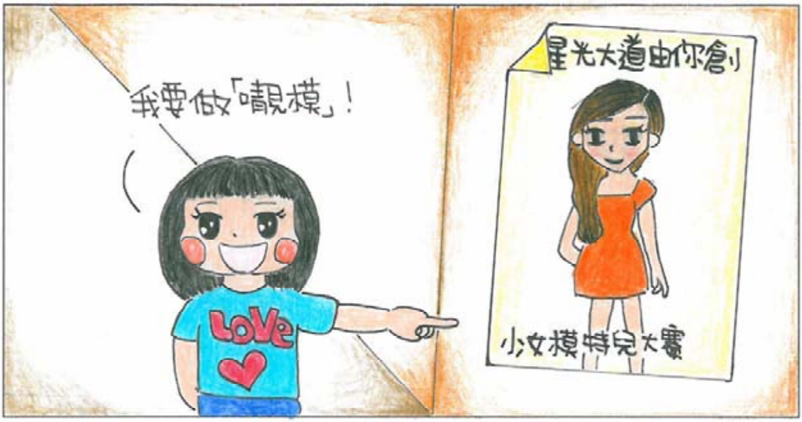
優異作品: 纖體物語

學校名稱：香港神託會培基書院
學生姓名：江佳維、李庭芳及佘仲聆
級別: 中五
顧問老師：黃智君

引言

近年，纖體瘦身的風氣盛行，不少愛美一族更為此而一擲千金。透過主角秀娜的故事，筆者將為大家揭開纖體廣告背後所隱藏的統計謎團！

「這是我一舉成名的機會！」秀娜在旺角街頭興奮地大叫，並指向「星光大道由你創─少女模特兒大賽！」的宣傳海報。秀娜為圓明星夢，毫不猶豫地報名參賽，並繳付近萬元的報名費用。雖然有這麼難得的成名機會，但秀娜卻擔心自己身型過胖，選美時穿上泳裝後會醜態百出。為了讓自己成為嬌艷多姿的少女模特兒，所以她決定到纖體公司參加修身療程。



秀娜發現修身療程種類繁多，而且不同計劃的費用及成功率也大相逕庭。在纖體公司的宣傳刊物中，「極速修身療程」的成功率高逾75%，而「健康修身療程」的成功率則只有約45%。秀娜自知體重高達150磅，所以不惜一擲千金，參加成功率較高的「極速修身療程」。其後，秀娜每天都到纖體公司接受療程，馬不停蹄地瘦身，希望可

以趕在模特兒大賽之前，讓自己看起來更苗條。

在完成兩個星期的修身療程後，其他參加者的身型日見苗條，而秀娜卻沒有明顯的改善。一氣之下，秀娜跑到纖體公司去討個公道。怎料公司卻說是她體質不配合，與修身療程的成效無關，並拒絕退款及賠償給她。秀娜氣得七竅生煙，她心想「極速修身療程」的廣告標榜成功率超過75%，但為何自己卻不成功呢？反之，「健康修身療程」明明寫著成功率只有約45%，何以其他參加者的成效會如此顯著呢？秀娜認為纖體公司以不良的宣傳手法誤導消費者，所以決定自己搜集證據以便向纖體公司提出指控。在仔細研究公司的宣傳單張及刊物後，秀娜終於找到了有關成功率計算的數據。有關資料以一百磅的體重為界，將

顧客分為兩個群組，並分別計算兩個修身療程的成功率 (見圖表一及二)。

圖表一：纖體療程的成功率 (原本體重在一百磅以下的顧客)				
纖體療程	成功人數	失敗人數	總數	成功率
「極速修身療程」	30	70	100	30.0%
「健康修身療程」	400	600	1000	40.0%
總數	430	670	1100	

圖表二：纖體療程的成功率 (原本體重在一百磅或以上的顧客)				
纖體療程	成功人數	失敗人數	總數	成功率
「極速修身療程」	800	200	1000	80.0%
「健康修身療程」	90	10	100	90.0%
總數	890	210	1100	

在仔細研究數據後，秀娜更是勃然大怒。在兩個顧客群組中，「極速修身療程」的成功率都低於另一個纖體療程。這跟廣告標榜的情況完全相反，費用較高的療程成效反而較低。在原本體重在一百磅或以上的顧客群組中，其成功率雖然有 80%，但仍然遠低於「健康修身療程」的 90%。在原本體重在一百磅以下的顧客群組中，

其成功率更只有30%，但宣傳單張上標榜的75%是怎樣計算出來呢？意氣用事的秀娜一口咬定纖體公司以不當手法作宣傳，利用較高的成功率欺騙顧客，所以決定到消費者委員會(消委會)投訴。怎料消委會的職員卻告訴她，有許多人曾經投訴過這間纖體公司，但所有指控最後都不成立。秀娜聽後怒火更盛，直斥職員欺負自己年幼無知。消委會職員力勸秀娜冷靜下來，然後向她詳述箇中玄機。

在了解過秀娜所搜集的數據後，消委會職員坦誠地表示自己明白秀娜的不滿，但同時指出宣傳單張上標榜的成功率並無不妥。但怒氣沖沖的秀娜不斷重申「極速修身療程」的成功率都低於另一個纖體療程，這跟廣告標榜的情況完全相反。職員指出玄機在於成功率的計算方法，秀娜的計

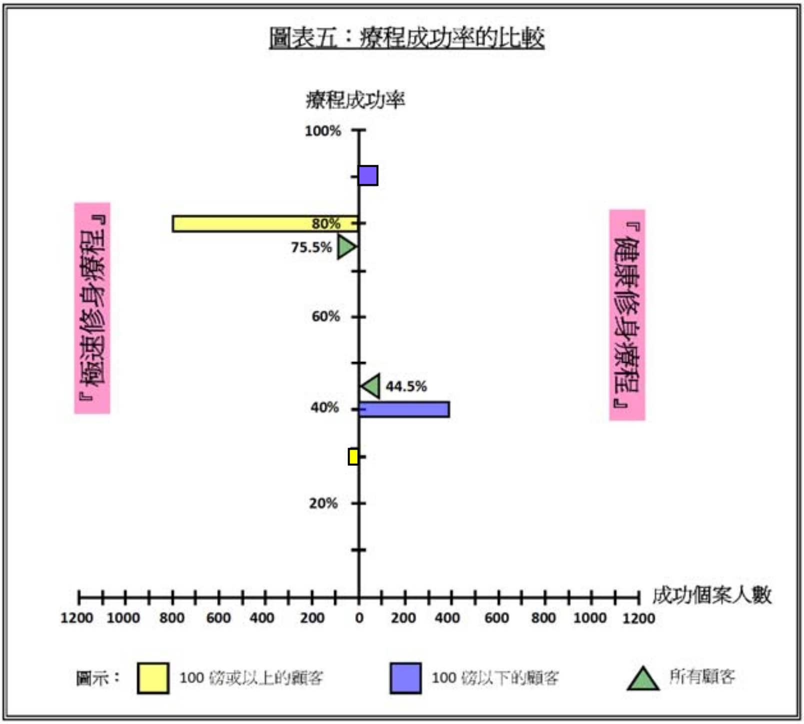
算作分組考慮，而纖體公司則合併所有顧客群組作計算。為了更有效地作解說，他將秀娜的兩個數據圖表合併 (見圖表三)，而計算出「極速修身療程」的成功率正好是75.5%，遠高於「健康修身療程」的44.5%。為進一步向秀娜解釋，他更將分組和合併考慮的成功率作比較 (見圖表四)。雖然秀娜明白消委會職員的計算，但仍質疑「極速修身療程」的分組成功率都低於另一個療程，何以在合併考慮時會出現完全相反的情況呢?

圖表三：纖體療程的成功率				
纖體療程	成功人數	失敗人數	總數	成功率
「極速修身療程」	830	270	1100	75.5%
「健康修身療程」	490	610	1100	44.5%
總數	1320	880	2200	

圖表四：成功率的比較			
纖體療程	分組考慮的成功率		合併考慮的成功率 (所有顧客)
	(原本體重在一百磅以下的顧客)	(原本體重在一百磅或以上的顧客)	
「極速修身療程」	30/100 = 30%	800/1000 = 80%	830/1100 = 75.5%
「健康修身療程」	400/1000 = 40%	90/100 = 90%	490/1100 = 44.5%

眼見秀娜怒火已熄及對問題有尋根究底的精神，消委會職員決定繼續向她解釋這個令人困惑的統計現象—「辛普森悖論」(Simpson's Paradox)，意指「在分組比較中都失勢的一方，在總合比較時反而是佔優勢的一方」！消委會職員明確地指出以上所謂的成功率只能說明「成功人數與顧客總數的比例」，若果顧客人數不多，其成功率便沒有太大的代表性。因此，統計數據的數量及其分佈更有助我們深入了解實況。消委會職員指出若將兩個纖體療程的成功率及成功個案人數分別繪畫在圖表上，便能領會到「辛普森悖論」的奧妙所在。在圖表上(見圖表五)，消委會職員先以黃色螢光筆加上一百磅或以上的顧客在兩個纖體療程的成功率及成功個案人數，然後再以藍色螢光筆加上另一個顧客群組的情況。從圖中的黃色棒及藍色棒可見，「健康修身療程」

在兩個顧客群組的成功率都高於「極速修身療程」。最後，消委會職員以「黃加藍變綠」的原理在圖中加上兩個綠色三角形標示，以顯示「極速修身療程」的整體成功率反而佔優，遠高於「健康修身療程」。在細閱圖表後，秀娜點頭表示明白圖中的成功率，但直言仍對「辛普森悖論」感到困惑！



在完成統計圖表後，消委會職員重申「辛普森悖論」的奧妙在於成功纖體個案的數量及其分佈。其實，兩個顧客群組的成功率相差很大，就

是說一百磅以下的顧客的成功率很低，而一百磅或以上的顧客的成功率很高。大部分原本體重較高的顧客都選擇參加標榜成功率較高的「極速修身療程」，而大部分較苗條的顧客則惠顧價錢相宜的「健康修身療程」。在數量上作考慮，大部分的成功個案集中在「極速修身療程」。雖然「健康修身療程」的分組成功率較高，但成功個案的數目相對地並不算多。其實，這情況跟加權平均數(weighted mean)的計算相似，「極速修身療程」中的原本體型較胖的成功個案比較多，在成功率的計算中，其加權(weight)便會遠高於其他顧客組別。因此，若將所有顧客組別作合併考慮，「極速修身療程」的整體成功率反而佔優。

聽過詳盡的解說後，秀娜終於了解「辛普森悖論」的原理，亦明白宣傳單張上標榜的「成功率逾75%」並無誤導成份。消委會職員語重心長地向秀娜指出統計學其實很有趣，統計數字可以用來呈現真實情況，也可用來迷惑消費者，在還沒有瞭解數據背後所隱藏的資訊前，不要胡亂相信統計數字！數天後，秀娜在報章頭版看到「少女明星夢—世紀大騙案」的報導，方知騙人的不是纖體公司的宣傳，而是少女模特兒大賽的廣告！

(字數: 2198)


怎麼辦啊？我要做「靚模」呀！
××報
××日××月××××年
少女明星夢——
世紀大騙案

優異作品：猜？不猜？

學校名稱：聖保羅男女中學
學生姓名：王可瀠
級別：中四
顧問老師：廖晉平

引言

許多人對於「猜答案」往往抱有輕視的態度，認為只有實力才能決定成績的高低。究竟在做選擇題時應不應該猜答案呢？本文將通過小欣和姐姐對於某科學知識問答競賽的討論，計算有關選擇題中的概率問題，以及猜測答案對於最終結果的影響。

小欣有一天垂頭喪氣地回家，顯得悶悶不樂。姐姐見了，便上前問道：「怎麼了小欣？」小欣嘟噥著說：「我今天和小丁一起參加科學知識競賽。小丁平時科學成績沒有我那麼好，憑什麼比我高分？我怎麼可能輸給他！」姐姐想了想，說道：「小欣，是你的水平問題，還是其他原因造成的呢？不如我們一起分析吧。你先將競賽規則講給我聽。」 小欣聽了，臉色稍稍緩和，便開始解釋。姐姐邊聽邊在紙上刷刷地寫下：

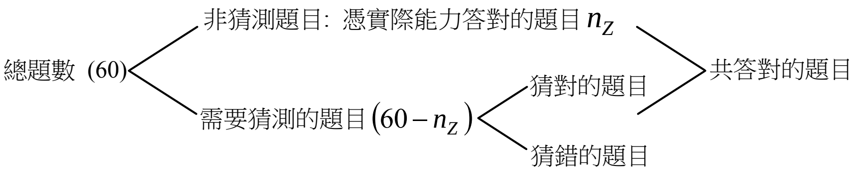
科學競賽規則： 競賽有60道選擇題，每題4個選項，有且只有1個選項正確； 答題時間為30分鐘； 每題答對得1分，答錯不扣分，得分多者獲勝。

章節一：分析小欣與其他同學正常情況下的得分

「按理說，你和小丁應當誰得高分呢？」姐姐說道，「我們來計算一下」。在「四選一」的問題中，若是完全憑猜測，那麼猜對的概率為 $p=\frac{1}{4}$ 。

設某考生在 60 題中能夠憑能力答對 n_Z 題 (由於每題一分，即得到 $n_Z\times 1=n_Z$ 分)，n_Z 的數值依考生實際水平高低而變化。

那麼剩下$(60-n_Z)$題則需要猜測來回答，其中一定題目猜對得分，其餘猜錯。



由於需要猜測的題數為 $(60-n_Z)$， 所以考生的猜測得分的期望值 $G=\frac{1}{4}\times(60-n_Z)^*$

*競賽中共有 n 道選擇題，答對每一題的概率為 p，若 X 為競賽中答對的題數，則 X 遵循二次分佈 $B(n,p)$，其期望值如下：$\mathrm{E}(X)=np$

考生預計試卷得分$R=$ 實際能力得分 + 猜測得分的期望值

$$= n_Z + G$$

$$= n_Z + \frac{1}{4}\times(60-n_Z)$$

$$= 15+\frac{3}{4}\times n_Z$$

小欣看了看這個數字，十分不解：「我的能力高過小丁許多，那麼我的 n_Z 值當高於他的 n_Z 值，就是

$n_{Z\text{小欣}} > n_{Z\text{小丁}}$ 。這樣 $R_{\text{小欣}} > R_{\text{小丁}}$ ，我的實際得分不是應該高於他的嗎？」

姐姐猶豫了一下，忽然看到「60題，30分鐘」的字眼，心想在30分鐘內沒有猜測地做完60道題是難以做到的任務，便心存疑惑地問小欣：「你在規定時間裡把全部的題目都做完了嗎？」

章節二：分析小欣輸的原因——比較完成題目數量和得分關係

小欣聽了姐姐的話，有些不好意思：「其實沒有全部做完。」

姐姐恍然大悟：「那就難怪了。讓我根據你們的情況作如下假設吧。」

<table>
<tr><th></th><th>小欣</th><th>小丁</th></tr>
<tr><td>做一道題所用時間 (秒)</td><td colspan="2">60 (1分鐘)</td></tr>
<tr><td>猜一道題所用時間 (秒)</td><td colspan="2">10 ($\frac{1}{6}$ 分鐘)</td></tr>
<tr><td>實際能力</td><td>每 5 題中會做前 4 題，最後一題需要猜測完成</td><td>每 5 題中會做前 2 題，後3題需要猜測完成</td></tr>
</table>

註：兩人猜測能力相等，依據上文，概率即 $\frac{1}{4}$

	小欣	小丁
每完成5題用時（秒）	$4\times60+1\times10=250$	$2\times60+3\times10=150$
30 分鐘內共完成多少個“5 題”	$1800\div250=7.2$	$1800\div150=12$
共完成題數 n_A	$7\times5=35*$	$12\times5=60$ (全部完成)
其中實際能力得分 n_Z (分)	$7\times4=28$	$12\times2=24$

*由於 $(7.2-7)\times250=50<60$，不夠時間完成一題，因此予以忽略。

在上一章節中，預計試卷得分 $R=n_Z+\frac{1}{4}\times(60-n_Z)$，其中「60」為總題數，且隱含的假設為60題全部完成。

但是小欣實際上並沒有在 30 分鐘內完成 60 題，因此將「60」以 n_A 代替，表示實際完成的總題數，得出：

$$R=n_Z+\frac{1}{4}\times(n_A-n_Z)$$

$$R_{小欣}=n_{Z\,小欣}+\frac{1}{4}(n_{A小欣}-n_{Z小欣})$$

$$=28+\frac{1}{4}(35-28)\approx30$$

$$R_{小丁} = n_{Z\,小丁} + \frac{1}{4}\left(n_{A小丁} - n_{Z小丁}\right)$$

$$= 24 + \frac{1}{4}(60 - 24) = 33$$

結論： $R_{小欣} < R_{小丁}$

小欣目瞪口呆地看著姐姐這個結論，不由懊惱地說：「難道實際能力還比不上隨意猜出來的答案嗎？那豈不是人人都不用讀書了，光猜都能猜贏其他認真答題的人。既然這樣，考試競賽還有甚麼意義！」

章節三：討論考試中「猜」的運用

姐姐微微一笑：「其實這個競賽考驗的是參賽者的反應能力和應變能力，這一點從 30 分鐘要完成 60 道題可以看出。平均每 30 秒就要做完 1 道題，如果做題速度不夠快，或者糾纏於一兩題上，時間很快就浪費過去，實在得不償失。所以這時候，『猜』的作用就很好的表現出來啦。」

「那平時的考試和測驗呢？」小欣問道。

「平時考試測驗老師都會安排較合理的時間讓學生完成題目。這種情況下，考生能夠做完所有選擇題，那麼完成總題數 n_A 值就相等。試卷分數 R 的不同就能從實際能力

得分 n_z 的差異中反映出來。在這樣時間充裕的情況下，自然是要好好思考每一道題，『猜』反而是其次了。」

姐姐頓了一頓，又接著說道：「香港的考試通常都是單項選擇，答錯也不扣分，可是有些國外的選擇題可以有多個正確答案，甚至答錯還要倒扣分。這時候，真考生連『猜』的勇氣也沒有，只能靠真才實學答題了。」

小欣點一點頭：「姐姐我明白了。做不同的試卷要有不同的方法，對吧？」

姐姐贊同：「是啊，在考試中，不一定能力強或知識掌握得扎實就一定能得高分，對於考試技巧的運用也非常重要，要學會靈活變通，適當調整。很多時候『猜』也不失為一個好辦法，就像這次的科學知識競賽一樣。」

「猜」的運用也是一門學問。猜或者不猜，的確是個值得思考的問題。

(字數: 1479)

參考資料：

1. 馬鳳昌、錢在中 (1991)。也談選擇題中的概率問題。《數理統計與管理》，*2*，48-50。

優異作品: 赤壁外傳之諸葛亮巧施「田忌賽馬」之術

學校名稱 ： 粉嶺禮賢會中學
學生姓名 ： 黃福志、黃福榮、謝恩賜
級別 ： 中五
顧問老師 ： 朱吉樑

引言

兩隊隊伍對壘，強隊是否永遠勝利呢?事實上，只要動一動腦筋，結局是可以非常出人意表的。在三局兩勝賽制下，田忌賽馬的故事帶給我們當中的智慧：較弱的隊伍只需改變出場的次序便可以反敗為勝。以下故事，我們把現代的標槍比賽，帶進三國時代，以三國演義的故事為藍本，再加以統計學的正態分佈特性來探討田忌賽馬的問題。

火燒連環船後，曹操不忿，心有不甘。但為免浪費兵力，又想討回一口烏氣，決定找東吳主帥周瑜進行一場標槍大賽。各方派出三名將領參賽，以三局兩勝制一決勝負。

比賽當天，風和日麗。氣勢凌人的曹軍派出主帥曹操及其下屬程昱、張遼出賽。而東吳主帥周瑜帶領下屬黃蓋、魯肅迎戰。比賽開始了，在主帥對戰中，周瑜全力一擲，獲得個人最佳成績 228 尺(編者按：1尺≈ 0.241米)，心想：感謝上天給我軍一個好的開始。這時，身形高大，孔武有力的曹操一聲冷笑，隨手一擲，標槍直飛 270 尺，結果周瑜大敗。餘下兩場亦有類同情況，黃蓋雖擲出 208 尺的佳績，可惜仍敗於力大如牛的程昱，對方以 226 尺獲勝。至於張遼對魯肅的一戰，張遼失手一擲，只擲出 206 尺。可惜，魯肅的力量實在相差太遠，用盡全力也只擲出 166 尺。最後，曹軍一方大獲全勝。(見下表)

曹操(270尺)(勝)	⇨	周瑜(228尺)(敗)
程昱(226尺)(勝)	⇨	黃蓋(208尺)(敗)
張遼(206尺)(勝)	⇨	魯肅(166尺)(敗)

曹操露出得意洋洋的樣子，周瑜不忿地向曹操說：「曹將軍，你別太開心，我們三天後重賽，怎麼樣?到時我軍定必取勝。」曹操高興地說：「無問題，怕你不成!」

周瑜回到營中，為了取勝與部下勤奮練習，望能打敗

曹軍。

第二天，他們練習的效果不大。有見及此，黃蓋靈機一閃，向周瑜說：「主帥，聽聞春秋戰國時期，齊國大將田忌和齊威王約定要進行賽馬比賽。由於齊威王每匹上、中、下等級的馬都比田忌同級的馬強很多，若以同等級的馬對賽，田忌必敗。但田忌好友孫臏獻計，以下等馬對齊威王的上等馬；接著以上等馬對他的中等馬；再以中等馬對他的下等馬，最後比賽以三局兩勝贏了齊威王(見表二)。所以我軍只要調換三場比賽的出場次序，就能轉敗為勝。將軍，我們為何不模仿呢?」

表二

第一場比賽:　　　　第二場比賽:

田忌		齊威王		田忌	齊威王
上等馬(敗)	⇨	上等馬(勝)		上等馬(勝)	上等馬(勝)
中等馬(敗)	⇨	中等馬(勝)	⇨	中等馬(勝)	中等馬(敗)
下等馬(敗)	⇨	下等馬(勝)		下等馬(敗)	下等馬(敗)

周瑜聽後大喜，立刻把出場順序調換(見表三)，果然， 結局呈現三局兩勝之現象。

表三

周瑜(228尺) ⇨ 曹操(270尺)		周瑜	曹操	東吳負
黃蓋(208尺) ⇨ 程昱(226尺)	⇨	黃蓋	程昱	東吳勝
魯肅(166尺) ⇨ 張遼(206尺)		魯肅	張遼	東吳勝

兩軍再度對決當天，場上依然風平浪靜。氣勢凌人的曹軍胸有成竹，而周瑜亦充滿信心。

比賽開始，周瑜依計行事。在曹操對魯肅一戰，曹操使勁地擲出，標槍飛到 275 尺遠處，魯肅亦竭盡所能擲出標槍，只擲得169 尺。曹操看過魯肅的表現後，不禁捧腹大笑，曹操輕鬆勝出。至於周瑜對程昱，程昱把標槍用勁擲出，擲得 232 尺。周瑜瞄準程昱的標槍，竭盡全力擲出標槍。可是，標槍只能在程昱的槍旁墮下， 只有 230 尺。結果周瑜也輸了。黃蓋對張遼一戰，由於黃蓋壓力太大，表現失準，只擲得 201 尺。另一邊廂，張遼則擲得 204 尺。結果，曹操再以三局全勝周瑜。(見表四)

表四

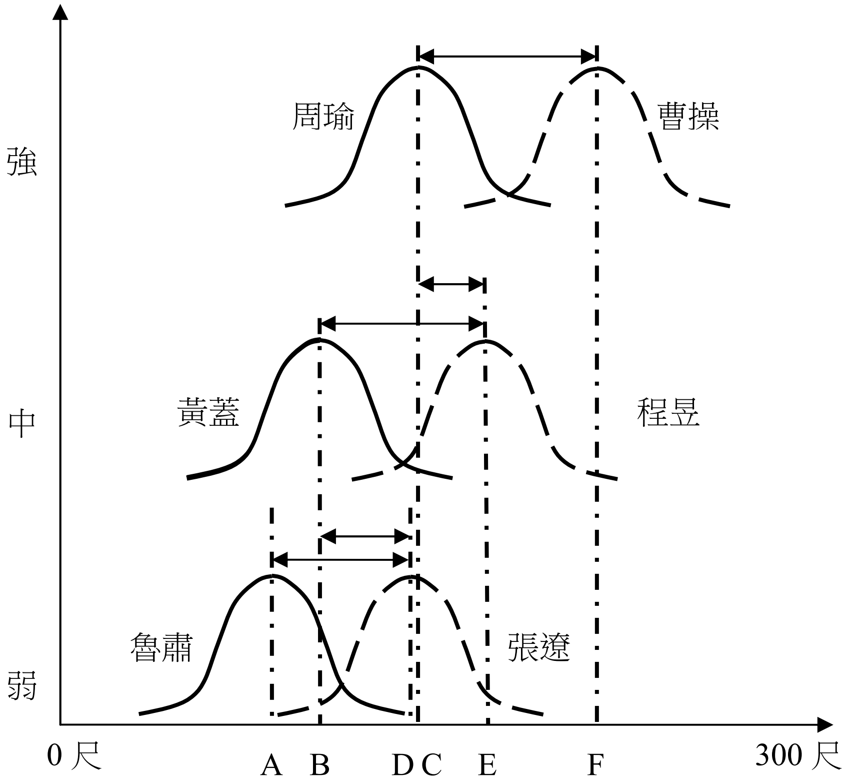
曹操(275尺)(勝)	周瑜(230尺)(敗)
程昱(232尺) (勝)	黃蓋(201尺) (敗)
張遼(204尺)(勝)	魯肅(169尺)(敗)

曹操興奮地對周瑜說:「周將軍，無論比賽多少次，結果也是一樣，你還是投降吧!」

周瑜強顏歡笑地回應說:「曹將軍，我軍因今天狀態欠佳，給予我軍一個月休息時間，一個月後，我軍定必取勝。」

曹操大笑回應說:「沒有問題，只怕你軍又再大敗，哈哈!」

周瑜回到營中，怒火攻心，結果吐血暈倒，臥病不起。魯肅見狀，請來諸葛亮商討。諸葛亮問過病情後，微笑說:「不必擔心，將軍之病，我能治癒。」諸葛亮到訪周瑜，諸葛亮說：「周將軍且聽亮之分析，了解問題的根源，再商議破敵之策。」諸葛亮拿起了紙筆，畫出以下圖像(見下圖)。「事實上，每人投擲的距離可以正態分佈模擬。平均值表現了各人能力的強弱，從正態分佈中，不難看出即使能力有差距，但弱者仍有可能戰勝強者，只是概率的高低問題已矣。以下正態分佈圖可模擬之前的比賽的情況，為了方便解釋，亮假設了每位參賽者的圖像形狀一樣(標準差相同)，而平均值則按各人的往績計算。」



諸葛亮說:「周將軍，請你看看以上正態分佈圖，我們可見曹軍的實力非常強大。基本上，曹軍各將的平均距離皆比吳軍同級的將軍為高(比較 D、E、F 與 A、B、C 點)。如果同級對戰，各級平均差距為 CF、BE 和 AD。總括來說，你打敗曹操的機會很少。即使你用田忌賽馬的方法亦只能拉近其中兩隊的平均距離，即是 CE 和 BD，但曹軍與我軍勢力仍有相當大差距，即使在曹操隊伍中最

弱的張遼也只是比將軍稍弱(比較 C、D)。所以單靠田忌賽馬之策是不夠的。」

周瑜說:「諸葛先生可有良策?瑜必盡力配合。」

諸葛亮:「在如斯緊急的時間,將軍只能集中所有資源訓練一人,務求個人差別減至最少。以田忌賽馬的方法,我們無須對魯肅作出任何訓練,因為他一定會敗給曹操。而將軍與程昱(CE)的差距較黃蓋與張遼(BD)為少,所以那人必為黃蓋!」

周瑜:「如將軍所言,拉近了黃蓋與張遼的距離,但我軍與曹軍仍有差距,又怎能獲勝?」

諸葛亮:「雖然將軍的實力比起曹操的實力仍有差距,但不代表沒有勝利機會。將軍可記得亮有借風之術,只要適時借風,代表程昱和張遼的正態分佈圖便會向左平移。若將軍與黃蓋保持水準,必能創造奇蹟,大事可成!現在當務之急,是要對黃蓋加強訓練,而將軍也要養好身子,否則空有東風也未能成事。若一切配合,我軍將以二勝一敗之局,擊敗曹軍,將軍必可討回一口氣。」

周瑜大喜,不久病癒。而黃蓋亦積極練習,決為東吳軍爭回一口氣。

一個月後,兩軍再次對壘。如眾人預料,曹操與魯肅

實力懸殊，魯肅戰敗。當程昱和張遼投擲時，諸葛亮立即起壇作法借來東風，程昱和張遼投擲的距離明顯減少。周瑜和黃蓋則把握時機，使勁地擲出標槍，結果兩人一同勝出。最後，東吳軍以兩勝一敗獲勝，周瑜與將士高興得互相擁抱，而曹操卻氣得七孔生煙。

後記: 在現今正規的標槍比賽中，因要顧及公平性，減少其他因素如風速、風向的影響，若運動場上的風速超過每秒 2 米，比賽所創紀錄將不予承認。未知此舉與曹、周之戰可有關係。但要真正獲得勝利，努力才是當中的關鍵。

(字數: 2495)

參考資料：

1. 羅貫中 (2005)。《三國演義》。香港: 精英出版社有限公司。

2. 田忌賽馬
http://www.minghui-school.org/school/article/2005/6/16/45030.html

3. 風與標槍: 是敵是友?
http://www.szmb.gov.cn/article/ZhuanTi/gzwqxzt/dyhtyyqx/2009/12/09/4b1f4b21ec79d.html

4. 世界氣象’s Archiver
http://www.21cma.net/archiver/tid-1762.html

5. 2009 國際田徑比賽規則_中文譯本
http://www.hkssf-nt.org.hk/district/sec/rules/aaf.pdf

優異作品: 平均分的迷思

學校名稱: 荃灣官立中學
學生姓名: 梁浩崙、馮景昌、林冬陽
級別: 中五
顧問老師: 梁曉牧

引言

現時一般學校計算級名次的方法，是根據各科分數的總和計算的平均數而定；但高中學生選修科目不同，這種方法對反映成績實況會有何影響？其他統計工具能否更有效量度學生的考試表現呢?

考試剛過去不久，同學們已經收到成績表，得悉自己的分數。A、B、C、D 是好朋友。A 和 B 選修物理、化學、生物三科，是理科班學生。成績方面，A 的成績比 B 的好。C 和 D 則選修企業、會計及財務概論 (企會財)，以及經濟、歷史，是文科班與商科班的學生。成績方面，C 的成績比 D 的好。他們四個在閒聊時亦少不免討論各自的成績，比較一會。他們拿出成績表一看，原來大家的主科分數相若，於是再往上看看各自的級名次（見表1），由高至低依次為 A、B、C、D。C 看完深感奇怪，說：「為甚麼我的級名次會這麼差？」

表 1: 根據平均分計算的級名次

A	$\frac{13}{60}$	B	$\frac{30}{60}$	C	$\frac{35}{60}$	D	$\frac{57}{60}$

A 對 C 說：「想不到 B 的級名次還比你高呢。」

B 向 C 點著頭說：「對啊，我在三個科目裡的排名明明屬於中等，為何級名次卻比你高呢？」

D 說：「哦，B 的平均分比 C 高，自然級名次較高了。」

C 聽後忿忿不平：「不公平！我每科表現都很好啊。不信的話，看科名次吧！(表 2)」

表 2: 科名次

	A	B		C	D
物理	$\frac{10}{30}$	$\frac{20}{30}$	企會財	$\frac{5}{30}$	$\frac{23}{30}$
化學	$\frac{10}{30}$	$\frac{20}{30}$	經濟	$\frac{2}{30}$	$\frac{18}{30}$
生物	$\frac{15}{30}$	$\frac{25}{30}$	歷史	$\frac{2}{30}$	$\frac{20}{30}$

「你且聽我說。正如 D 所說，平均分決定級名次。將全部科目的總分除以科目數目，就是平均分了。」B 爭著解釋道:「可是這不代表一切，因為選修科目根本不同。我們看看科名次（表2）和各科分數（表3）。例如 C 每科排名都高，平均分卻低於A、B，因為他每科分數看來較 A 和我低。我和 D 表現相若，較為普通，但我讀理科取分易，級名次就比 D 高了。同樣地，A 科名次如你般高，因理科取分易，他每科都很高分，所以平均分以至級名次也這麼高了。」B 難得在他們面前發表偉論。

表 3: 各科分數

	A	B		C	D
物理	90	75	企會財	60	50
化學	85	70	經濟	70	55
生物	80	60	歷史	70	55
平均分	85	68	平均分	67	53

C 聽後嘆道：「正因讀文科不易拿高分，即使我成績不俗，平均分還是低於 A，甚至你啊。」

D 不解地問：「那怎麼計算才能更有效反映實況呢？」

A 見 B 這時倒不語，道：「只是平均數與標準差的概念而已，才剛學完，很容易啊。唉，我解釋好了。」搖頭續道：「這裡平均數針對選讀的科目而言。同科同學有30人，平均數便是全班同學總分除以全班 30人。標準差則反映著自身分數跟班平均數之偏差，在這裡我們須保持其穩定才行。」

B、D 異口同聲對著 A 說：「行了！用不著這樣子嘛。我們都知道你無非想說知道了平均數和標準差之後，便能將自身科目分數跟平均數之差除以標準差，得出標準分數，有助比較而已。我們先前都從老師得悉了每班平均數和標準差(表 4)，現在我們可以利用這些數據計算每科的標準分數，然後再計算標準分數的平均值。(表 5) 我們保證，你只須等我們一會兒就行了。」

表 4: 平均數及標準差

	平均數	標準差		平均數	標準差
物理	85	5	企會財	55	5
化學	80	5	經濟	60	5
生物	80	5	歷史	60	5

表 5: 標準分數

	A	B		C	D
物理	1	-2	企會財	1	-1
化學	1	-2	經濟	2	-1
生物	0	-4	歷史	2	-1
標準分數之平均值	0.67	-2.67	標準分數之平均值	1.67	-1

<u>公式</u>:

設 x_k 為第 k 位同學的分數，n 為全級總人數。

平均數 $\bar{x} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$ 標準差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2}{n}}$

標準分數 $z_k = \dfrac{x_k - \bar{x}}{\sigma}$

A 尷尬地笑著說：「不好意思嘛，請息怒，息怒。」片刻過後，他們得出結果了。標準分數若是正數，數值越大，表現越好；若是負數，數值越小，表現越差。

D 拍著 C 的肩膀，說：「你看，依此計算，排名倒是由你領先，A 為次，我第三而 B 第四。如此看，你的表現比 A 好了！」

A 倒也沒甚麼：「嗯，這次我確實心服口服。不過下次呢，我們四個來個良性競爭，呵呵！」眾人一同含笑答應。

總結

以上的故事講述了兩種方法的分別。在故事裡，將各科列入考慮，以平均分排級名次，並不準確。因為這方法沒考慮到科目不同，評分準則和試卷深淺不一，會造成很大差異，以致名次不能反映學生自身的能力及所付出的努力。另一方面，標準分數量度原始分數和母體平均數之間的距離，也考慮統計分佈程度，更能反映學生每科的表現，不會因科目不同而造成表現不及他人的誤解。

由此可見，使用平均分排名次的計分制度存有弊病。使用標準分數不但準確表達實況，亦公平對待每位學生，正好可以補此不足。

(字數: 1781)

優異作品: 朱古力世紀大騙案之圖表陷阱

學校名稱: 粉嶺禮賢會中學
學生姓名: 鄧富成
級別: 中五
顧問老師: 朱吉樑

引言

現今商業社會，騙案層出不窮。大至企業騙案，小至網上商業騙案，均有其獨特之處。現在便有一宗以圖表陷阱去欺騙企業的騙案發生，究竟事主能否破解此騙局呢？他又能否利用正確的圖表去識穿產品銷售員的計謀呢？

小豬是 ABC 朱古力品牌的產品銷售員，為了增加他的佣金收入，他決定到位於東區的 SAS 食品商店約見福志經理，從而推銷 ABC 牌的朱古力。

小豬:「你好！我是負責推銷 ABC 牌朱古力的產品銷售員小豬。我們公司的分潤制度是當朱古力的銷量愈高，合約公司所得到的利潤便愈大，ABC 牌朱古力公司會以合約公司的銷量而決定合約公司能獲得的額外利潤，兩者是正比關係。ABC 牌朱古力於 2008 年創立，它是近三年來被喻為全港銷量最高的朱古力，而且每年與我們簽約的公司愈來愈多。」(見下表)

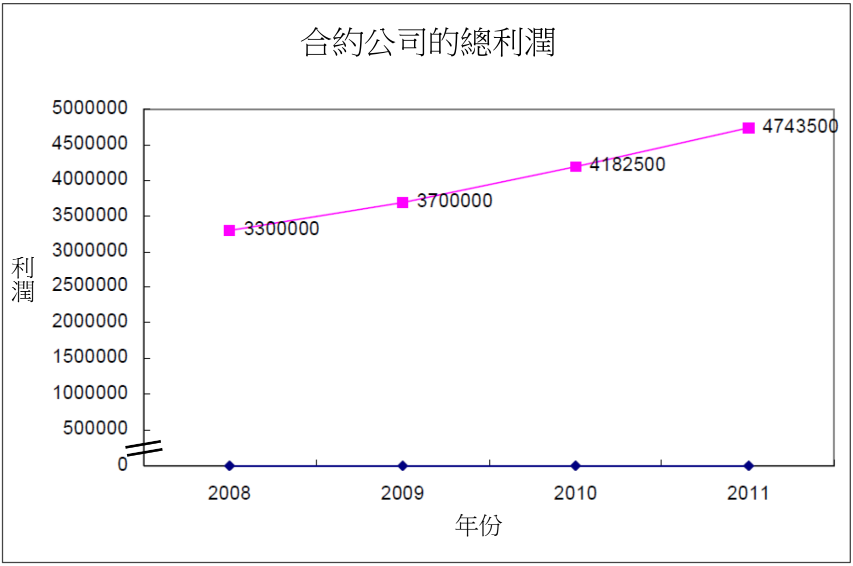
年份	2008	2009	2010	2011
合約商店的數目	3000	3400	3900	4500
ABC牌朱古力的銷量(件)	660000	740000	836500	948700
產品銷量按年增長率		12.12%	13.04%	13.41%

(由於2008年是 ABC牌朱古力的成立首年，所以沒有產品銷量增長率。)

福志:「的而且確，ABC牌朱古力的銷量正在穩步上揚，而且產品銷量增長率也十分驚人，它是一種市場潛力不俗的產品。」

小豬:「沒錯！而且為了更方便客人了解我們產品的業

績，所以我們以每售一條朱古力能獲利 5 元的利潤計算，製造了一個折線圖。」(見下圖)



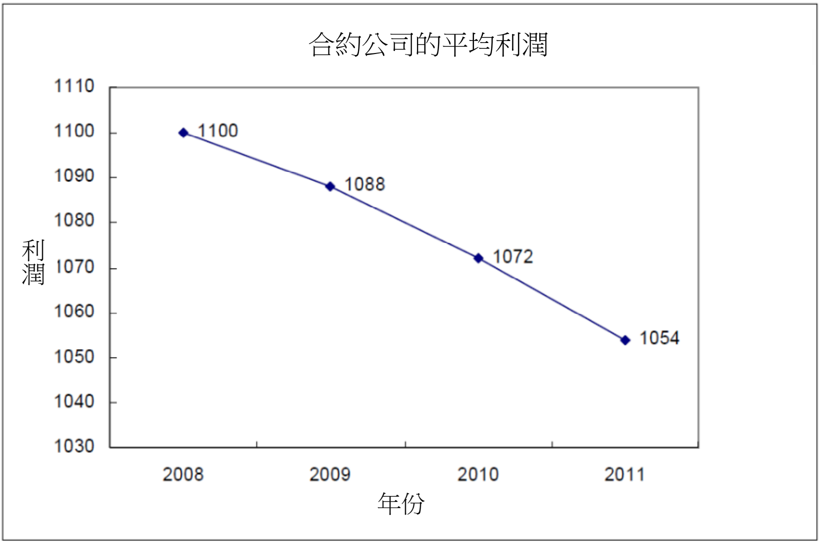
小豬:「經理！從兩份資料說明ABC牌朱古力不論在合約公司數目、產品銷量和銷售利潤都節節上升，充分反映這是一盤有利可圖的生意。不用考慮了，還是加盟我們的公司吧！」

小豬隨即遞上一份與ABC牌朱古力公司合作的合約給福志經理。

福志:「等一等！雖然ABC牌朱古力的利潤和銷量看來正在上升，但在現實情況中卻並非如此。你只是採用了整體計算和局部計算所產生的誤差來誤導他人，從而引誘他人加盟你們的公司。」

小豬:「不可能！我的圖表反映了事實，我並沒有做假！」

福志:「為了讓你心服口服，清楚明白我為何會識破你的圖表，讓你看看真正的資料。」(見下圖)



福志:「你巧妙地以合約公司整體利潤製作折線圖，令到合約公司的整體利潤維持上升趨勢，但要知道一種產品的利潤的多少是取決於每一間公司的營利情況，並非整體數據。因為與你們合作的公司數目愈來愈多，便會令產品銷量和利潤都有很大可能上升。但實際上，必須以一間公司計算營利狀況時，才能真正反映加盟後，我所得的利潤情況。」

小豬:「經理果然絕頂聰明，但ABC牌朱古力仍屬於一種有利可圖的產品，因為實際上每間合約公司賺取利潤的下降率只介於1.09%至1.68%之間，其產品利潤下降的速率甚微，所以經理不必擔心ABC牌朱古力的短期回報」(見下表)

年份	2008	2009	2010	2011
產品利潤按年下降率		1.09%	1.47%	1.68%

(由於 2008 年是 ABC牌朱古力的成立首年，所以沒有產品利潤下降率)

福志:「你說得並非毫無道理，而且圖表看起來也沒有任何古怪，證明它仍是一種有利可圖的產品，所以我便決定以短期合約的方式與貴公司簽約吧！」

就在福志經理正在簽署合約的時候，一位名叫雪玲的女職員突然撞門而入。

雪玲:「不要簽！」

福志和小豬二人立即被雪玲的叫聲嚇了一驚。

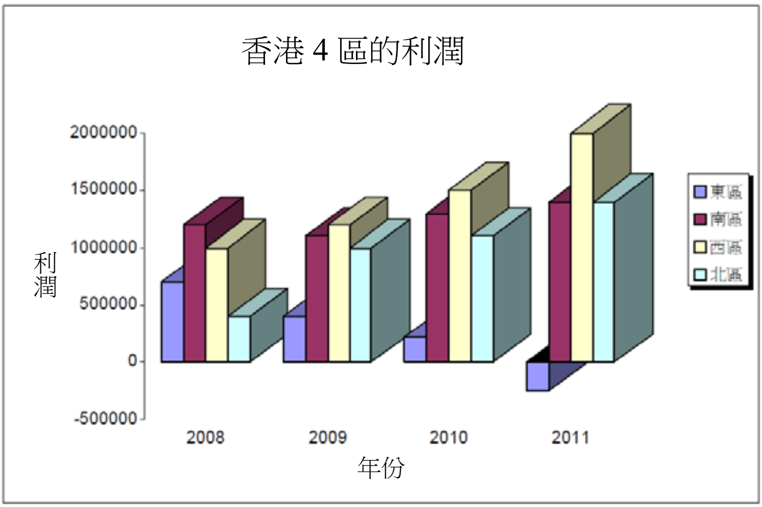
雪玲:「經理，我剛剛從辦公室門外的地上拾獲一張有關ABC牌朱古力在不同區域的利潤分佈圖，你快點看一看。」

福志經理在看過圖表後立即把合約扔在地上。

福志:「豈有此理！」

小豬:「發生了什麼事？」

福志：「根據ABC牌朱古力的整體利益計算，公司的利潤是不斷上升；而若以個別合約公司計算其利潤，雖然正在輕微下降，卻在可接受的範圍之內，它仍是一種有利可圖的產品。但銷情在不同的區域會有不同，即有一定的影響了。從你的圖表中(見下圖)，本區(東區)的利潤正不斷下降，甚至在2011年錄得虧蝕，這可是一個很大的問題。即使合約公司的整體利益不斷增長，但對於身在東區的本公司而言，卻是一盤得不償失的生意。」



小豬聽到福志的說話後便臉色驟變。

福志:「你竟然收起了香港4區的利潤分佈圖，這是嚴重違反產品銷售員操守的行為，要知道作為一個稱職的產品銷售員，應把有關產品的所有相關資料展示給客戶觀看才對，但是，你卻收起了其中一份對自己公司不利的資料。企圖掩飾ABC牌朱古力在東區的利潤是虧蝕的真相，從而希望賺取達成交易的佣金。豈有此理！我要報警拘捕你。」

小豬大叫一聲:「三十六計，走為上計。」便一支箭似的跑出SAS食品商店。

(字數: 1615)

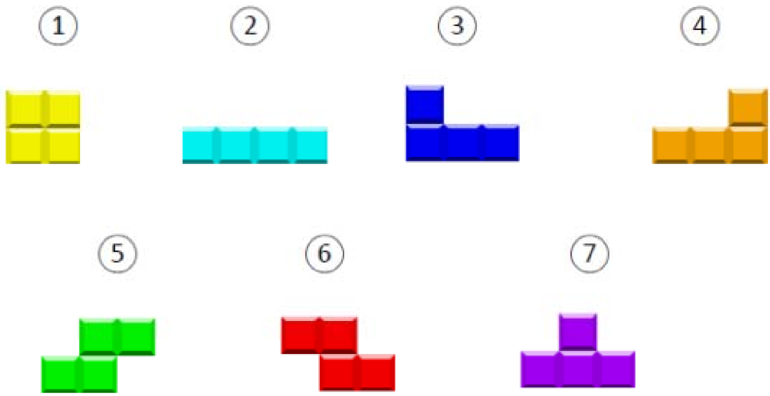
優異作品：俄羅斯方塊高手之路

學 校 名 稱 ： 聖 公 會 呂 明 才 中 學
學 生 姓 名 ： 鄒 沅 桓 、 林 良 浩
級 別 ： 中 四
顧 問 老 師 ： 盧 偉 業

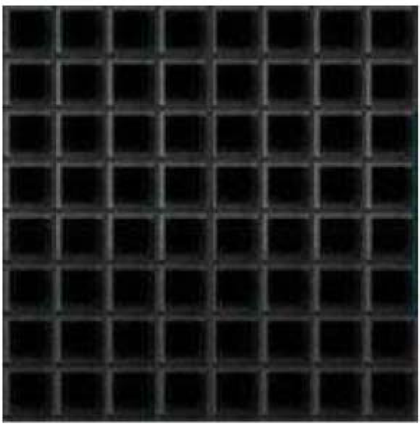
引言

經典益智方塊遊戲「俄羅斯方塊」以其數學性、動態性與知名度於八十年代末一度風靡全球，直至現時仍頗受廣大遊戲玩家的歡迎。而這個經典益智遊戲背後隱藏著一個簡單的數學規律，隨時可以令玩家登上不敗之地，究竟這個簡單而巧妙的規律是什麼呢？讓我們開始探索之旅吧！

經典益智遊戲「俄羅斯方塊」中，一般有 7 種不同形狀的方塊，為方便解釋，以下我們將以代號表示各方塊：



接下來，我們將在一個寬度為 8 格的俄羅斯方塊遊戲版面（圖一）以不同的處境來分析以不同方塊組合填滿一層空格的概率。



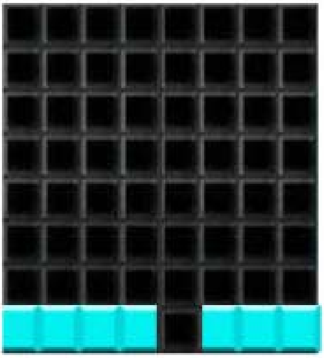
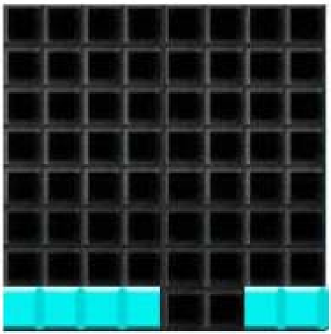
圖一

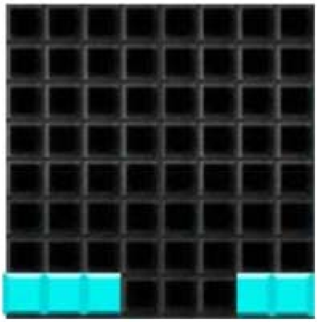
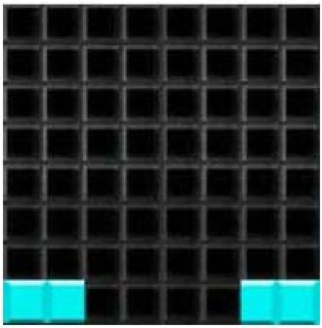
假設：

1. 遊戲開始時，版面只有最底層有方塊。
2. 遊戲中，所有方塊均會隨機落下，而且落下時均可進行90度的旋轉。

處境一:

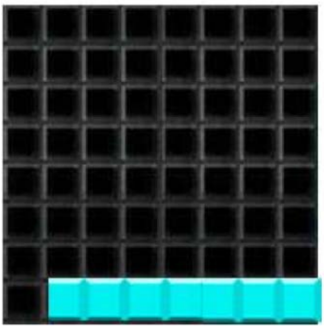
在底層有 1 至 8 個空格的情況，以一個方塊填滿一層格子的概率。

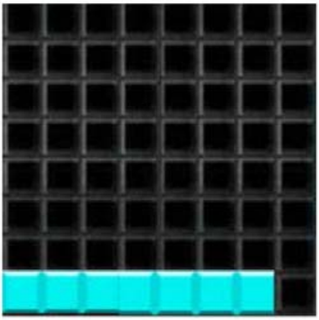
	圖二: 底層有1個空格的情況 除方塊 1 外，其他皆可以完成， 所以概率為 $\frac{6}{7}$。
	圖三: 底層有 2 個空格的情況 除方塊 2 、 7 外，其他皆能做到， 所以概率為 $\frac{5}{7}$。

	圖四: 底層有 3 個空格的情況 除方塊 3、4、7外，其他皆不能做到， 所以概率為 $\frac{3}{7}$。
	圖五: 底層有4個空格的情況 只有方塊 2 能做到，所以概率為 $\frac{1}{7}$。

底層有 5 個空格的情況開始，概率都為 0 。

然而空格的位置會影響填滿一層的概率。例如：

	圖六: 底層有 1 個空格於最左面的情況 除方塊 1、3、5外，其他皆可以完成。 或

	圖七: 底層有 1 個空格於最右面的情況 除方塊 1、4、6外，其他皆可以完成。

這兩個情況下，雖然預留空格的數量同樣是１，但由於部分方塊未能填入，因此填滿一層的概率將減至 $\frac{4}{7}$ 。

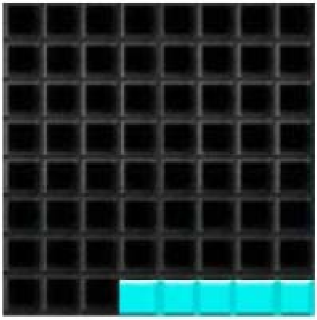
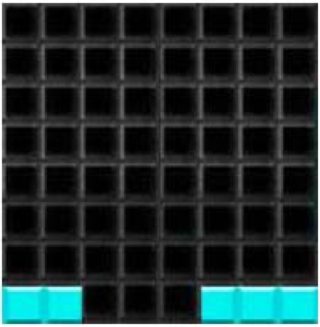
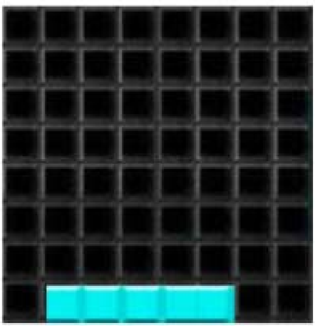
由此可見，在底層只有1個空格而這個空間並不靠邊的情況下，最容易填滿一層 (概率為 $\frac{6}{7}$)。

除了以上的可能性外，我們亦可以用兩個、三個，甚至更多的方塊將一層填滿。接下來，讓我們看看在不同的情況下，放二個方塊填滿一層的可能性吧！

處境二:

在底層有 1 至 8 個空格的情況，以兩個方塊填滿一層格子的概率。

以下的分析將主要考慮下列三種情況：

	圖八: 情況 A 缺口相連並且靠邊。
	圖九: 情況 B 缺口相連而不靠邊。
	圖十: 情況 C 缺口不相連而靠邊。

經過繁瑣的計算後，我們得到了以下的結果：

空格數量	情況 A	情況 B	情況 C
1	$\frac{36}{49}$	$\frac{48}{49}$	不適用
2	$\frac{35}{49}$	$\frac{47}{49}$	$\frac{16}{49}$
3	$\frac{36}{49}$	$\frac{46}{49}$	$\frac{28}{49}$
4	$\frac{38}{49}$	$\frac{43}{49}$	$\frac{20}{49}$ 或 $\frac{16}{49}$
5	$\frac{31}{49}$	$\frac{37}{49}$	$\frac{20}{49}$ 或 $\frac{8}{49}$
6	$\frac{19}{49}$	$\frac{19}{49}$	$\frac{8}{49}$ 或 $\frac{9}{49}$
7	$\frac{6}{49}$	不適用	$\frac{6}{49}$
8	$\frac{1}{49}$	不適用	$\frac{1}{49}$

如此，在以上三種情況中的填滿概率就能一目了然。根據上表，我們可以得到以下結論：

如果是情況A 而底層有4 個空格，填滿一層的概率最大。

如果是情況B 而底層有1 個空格，填滿一層的概率最大。

如果是情況C 而底層有3 個空格，填滿一層的概率最大。

最後，綜合整個處境二，我們發現，當我們以兩個方塊來填滿底層時，進行情況B(即缺口相連而不靠邊）並預留1格，就最有機會完成 (概率為 $\frac{48}{49}$)！

總結

以上面兩個處境推敲下去，我們不難發現，無論可以落下的方塊數目怎麼改變，預留１個空格於每層上，就最有機會填滿。換句話說，只要我們進行遊戲時，盡可能預留１個空格，那麼就更容易取得高分數且避免在遊戲中落敗。

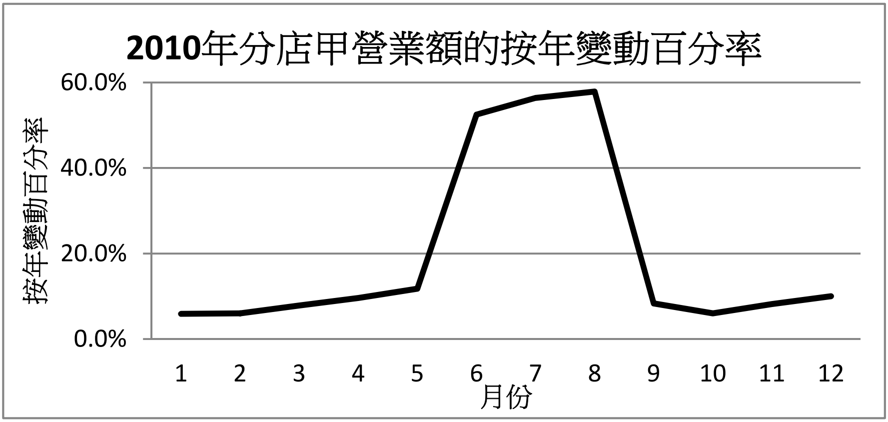
希望大家看完這份報告後，能如標題一樣，巧妙運用概率及統計的知識，踏上俄羅斯方塊的高手之路！

(字數: 1071)

邀請作品: 升幅之謎

在ABC服裝公司的業績報告會上，分店甲的店長與分店乙的店長分別向董事長報告其分店於往年的營業額增長。以下是他們的對話。

董事長: 分店甲和分店乙作為本公司最大型的分店，我想先了解一下這兩間分店在過去一年的營業額增長。先由分店甲開始吧。

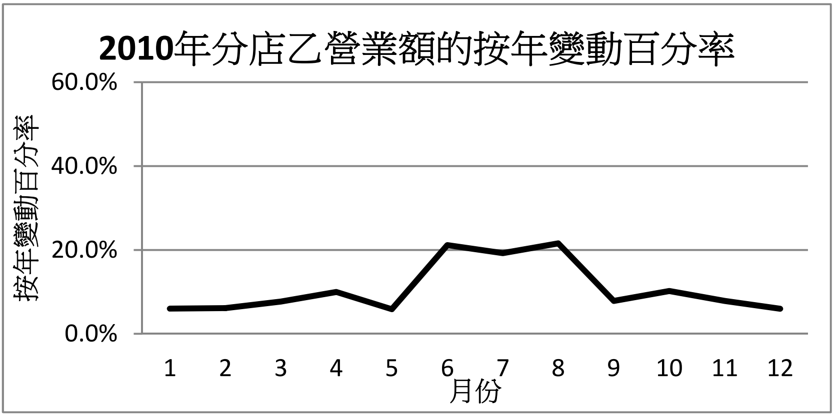


分店甲店長: 請大家看一看分店甲於2010年每月營業額的按年變動百分率:

從此圖可以清楚看見，相比2009年同期，分店甲在2010年夏季出現顯著的增幅，而在其

他月份亦維持穩定增長。夏季的增幅，相信是來自分店甲在夏季舉行的大型時裝表演，所產生的宣傳效果。

分店乙店長: 請大家看一看分店乙於往年營業額的按年變動百分率:

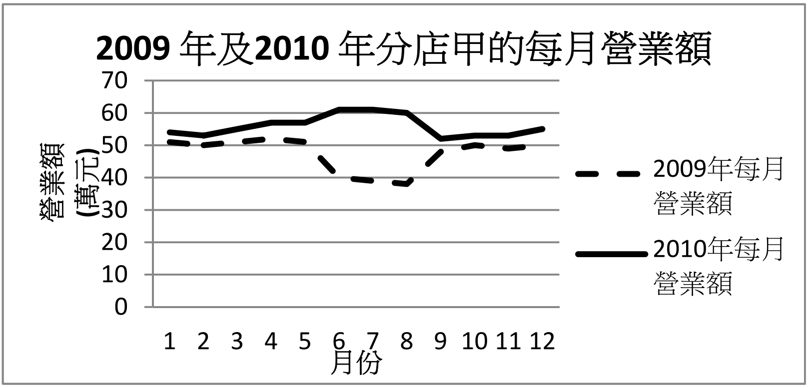


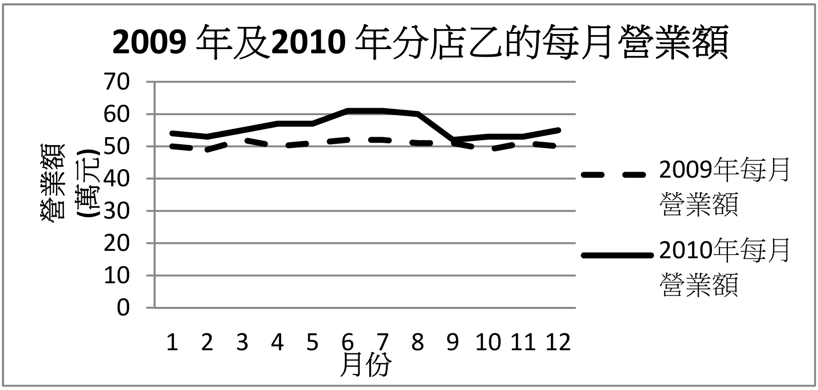
從圖中所見，分店乙在2010年每月營業額的按年變動百分率維持穩定水平，在夏季更輕微上升。相比分店甲，雖然我們的增長並不顯著，但同事們在這年的努力也是值得嘉許的。

董事長: 從以上的圖表看來，兩間分店的成績都不錯。咦?生產部經理，剛才看你的樣子很疑惑，不妨提出你的意見啊!

生產部經理：董事長，我負責為各分店生產時裝，據我們所知，兩間分店在銷售能力方面一直是勢均力敵，而在往年夏季，生產部提供予分店甲和分店乙的時裝款式與數量也是相若的，為何分店甲與分店乙在夏季的營業額升幅差距這麼遠呢?

董事長: 你的觀察力很好! 兩位店長，請你們向大家展示一下2009年以及2010年每月的營業額吧。





董事長: 就上圖所示，分店甲與分店乙於2010年每月的營業額走勢相似，2010年夏季相比同年其他月份都較為高。另一方面，分店甲於2009年夏季錄得較低的營業額，而其他月份的營業額則較為穩定;而分店乙於2009年每月的營業額則維持穩定水平。請讓我簡單說明一下營業額的按年變動百分率的計算方法，計算某月份營業額的按年變動百分率的方程如下:

$$\frac{(2010\text{年某月的營業額} - 2009\text{年同月的營業額})}{2009\text{年同月的營業額}} \times 100\%$$

從兩年的營業額比較所得，相信分店甲在2010年夏季的營業額錄得很高的按年變動百分率，主要原因是由於2009年夏季的營業額過低所做成的。分店甲店長，可以向大家解釋一下個中的原因嗎?

分店甲店長: 我想起來了，分店甲於2009年夏季發生水浸意外而導致長期停電，因此當時的營業額大受影響!

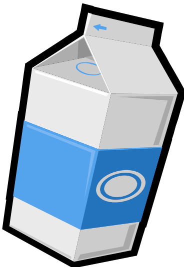
董事長: 原來是因為分店甲在2009年夏季發生了事故，導致該季的營業額下跌，再加上2010年同月的營業額趨向平穩，這兩個因素加起來才使得

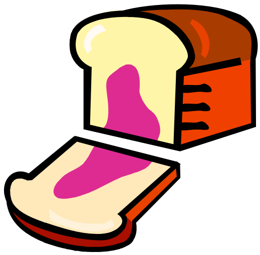
2010年夏季的按年變動百分率非常突出。不過，兩間分店在2010年夏季的營業額均有增長，相信分店甲在夏季舉行的大型時裝表演，可能對於整個公司品牌帶來宣傳效果，令兩間分店的營業額都有所增長吧。

由以上的故事，我們可以發現以按年變動百分率分析每月數據時，大眾可以清楚看到今年某一月份對比去年同一月份的數據變化，但在解讀這些數字時，我們需要留意變動百分率的高低，除受到當年數據的影響外，亦包括去年同期數據表現的因素。另一方面，數據提供者在分析數據同時，亦應合理解釋數據背後可能隱藏的各種因素。

邀請作品：究竟價格升定跌？

不知道大家有沒有留意，我們在日常生活中經常會接觸「指數」(indices)，以了解社會現象的變化。例如「消費物價指數」(Consumer Price Index)能有效量度住戶一般所購買的消費商品及服務的價格水平隨時間而變動的情況，因而常被用作量度通脹的指標。究竟我們應該怎樣才能正確詮釋指數呢？以下將會以故事形式探討指數在統計學上的應用。



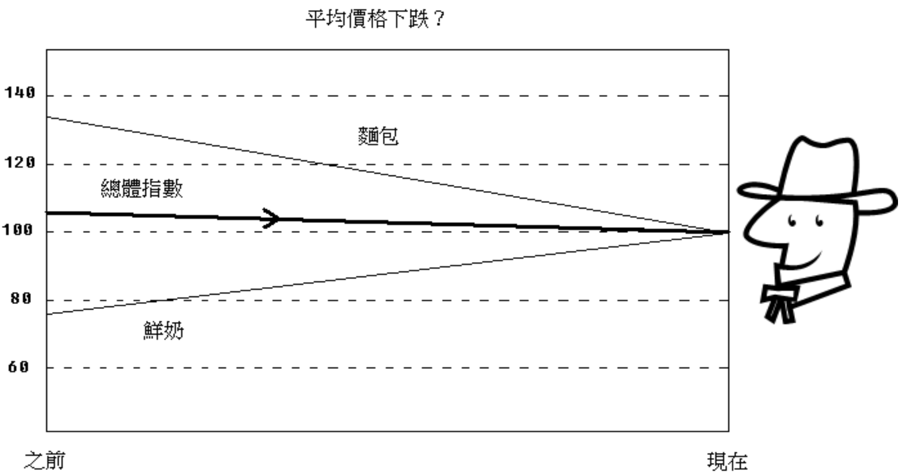


12元 ➡ 16元	8元 ➡ 6元

售貨員：早晨，小姐!一家人一同來買早餐嗎？跟平日一樣購買一盒鮮奶和一排麵包吧! 今天麵包十分便宜呢，是平日價格的七五折，只賣6元一排!

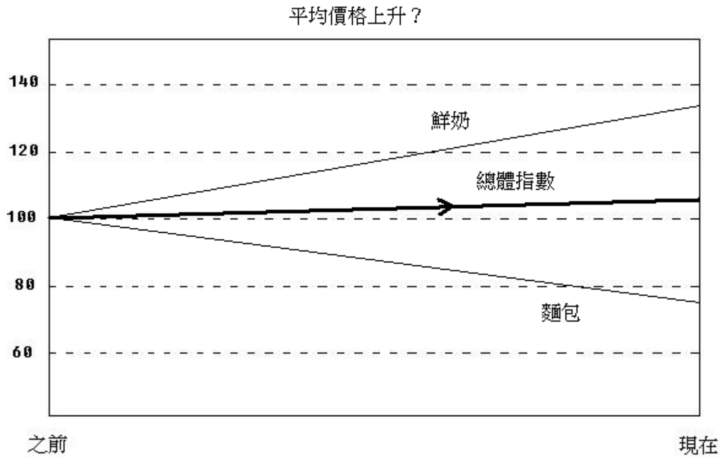
婦人:　讓我看看。嗯……麵包好像便宜了，但是一盒鮮奶比平日的價格可貴了4元呢!

售貨員: 唔……話雖如此，但如果將現在的價格設定為基數100，麵包之前比現在貴了33% $(=\frac{8-6}{6})$，價格指數由133降至100，而鮮奶價格指數則由75升至100，平均指數由 104 $(=\frac{133+75}{2})$ 降至100。平均消費價格下降了呢!



婦人： 你所說的好像很有道理，但總是覺得怪怪的……

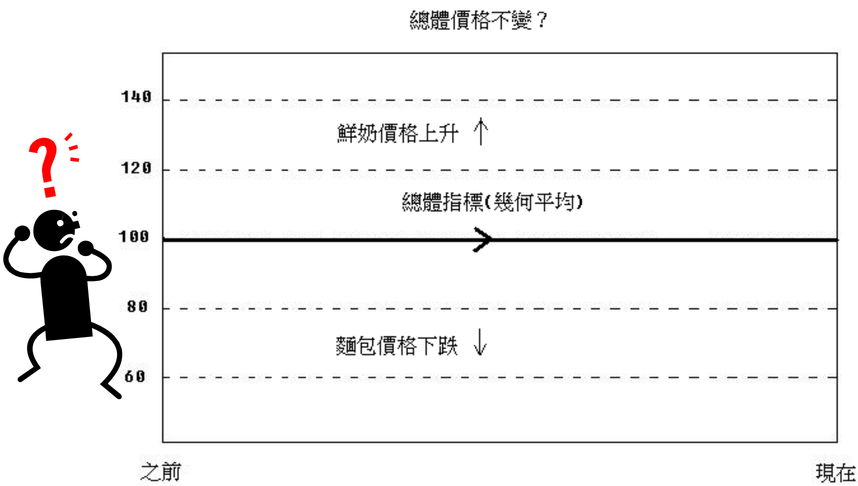
女兒： 媽媽不要聽售貨員胡說！如果將之前的價格設定為基數100，麵包七五折，價格指數由100降至75，但鮮奶價格比之前上升33% $\left(=\frac{16-12}{12}\right)$，價格指數由100升至133，平均指數由 100升至104 $\left(=\frac{133+75}{2}\right)$。平均消費價格反而上升了！



售貨員：小孩子不要亂說！我之前的解說可是有數學根據的，你怎樣解釋呢？

女兒： 這……

兒子:　不是啊，除了算術平均(arithmetic mean)外，我近來在學校還學會了一樣東西叫幾何平均(geometric mean)。無論我們以之前還是現在的價格設定為基數100，幾何平均指數之前和現在都是100 ($=\sqrt{133\times 75}$)。平均消費價格沒有改變啊!



售貨員：……

大家看完以上故事後，認為哪個說法正確呢？如果大家思路清晰的話，現在買一盒鮮奶和一排麵包的總開支比之前上升了2元 $(=(16+6)-(12+8))$，為原來總開支的10%，上述沒有一個計算方法能夠充分反映。其實，使用指數並沒有一個最正確方法，視乎實際情況決定，但其中兩點在使用指數進行分析時必須要注意：

(1) 計算平均的方法有很多，除了上述的算術平均和幾何平均外，還有調和平均(harmonic mean)等，再加上中位數(median)、眾數(mode)、峰度(kurtosis)等統計參數(parameters)，各有優劣。進行分析時各位可按照需要選擇適當的統計參數使用。

(2) 計算平均數或指數時可賦予加權(weights)。售貨員、女兒和兒子的計算方法均以購買件數為單位，以兩個單位計算平均消費價格指數。但是，總體消費的單位為元，以消費開支比例作為計算單位會更為可靠。而所定基年(base year)不同，加權比重亦會改變，如一盒鮮奶和一排麵包的加權，以之前價格為基數比重是12:8，以現在價格為基數比重則是16:6。比重不同，計算結果也會有出入。

以香港為例，「消費物價指數」使用2009年10月至2010年9月固定基期，而「本地生產總值平減物價指數」(gross domestic product price deflator)則以環比物量(chain volume)的方法，每年更新基年以反映過去最新一年的物量比重情況。

參考資料:

1. Huff, Darrell, & Irving Geis. (1993). *How to Lie With Statistics*. New York: W.W. Norton & Company.

邀請作品: 德軍有多少坦克?

陳秀騰
教育局數學教育組

地球資源有限，國家之間很多時為了爭奪資源而爆發戰爭。我國與越南、菲律賓等鄰近國家正為南沙群島的主權誰屬爭論不休，當中涉及國與國之間的利益，不排除動武的可能。在人類的歷史上發生了兩次世界大戰，傷亡慘重，慘不忍睹。二次世界大戰距今已超過半個世紀，大部分人對其印象模糊。諷刺地，那時各國因為處於危急關頭，十分重視先進武器的研發，科技在這期間迅速發展。當時德軍所研製的新型號Panther Mark V坦克更是該國的皇牌武器，所向無敵。盟軍想盡辦法掌握德軍Panther Mark V坦克的總數，方便調節應戰策略。

盟軍如何推算德軍坦克的總數呢? 原來是得到統計學者的幫助，運用統計學的點估計的概念推算。盟軍是利用樣本的數據 (繳獲的德軍Panther Mark V坦克數目) 去估計總體參數 (德軍所製造的Panther Mark V坦克總數)。

盟軍於戰爭時擄獲了一些德軍 Panther Mark V坦克，並記錄了它們的生產編號。不要看輕這個號碼，內裡隱藏著十分有用的訊息，提供線索。德國人做事很有條理，盟軍發現德國人製造每一部新型坦克時，會為它們從1號開始連續編排號碼。如何運用這些編號估計德軍坦克的總數呢?

為方便說明，假設盟軍擄獲了德軍其中5台Panther Mark V 坦克，發現這些被擄獲的坦克上面有編號{8，25，12，48，37}，其中一位統計人員提出估計德軍總共有 51台坦克。他如何提出這個猜測? 首先，設總體參數是未知的德軍坦克總數 N，而繳獲坦克的編號則是其中一個隨機樣本。假設各坦克被繳獲的機會均等並相互獨立。若我們找到數列 1，2，...，N 的中項為m。因此，將有 m-1 項少於 m，m-1 項大於 m。所以，包括 m 這一項，我們總共有 $N=(m-1)+1+(m-1)=2m-1$。但是，我們並不知道確實的 m 值。我們很合理地借用被繳獲坦克編號的中位數或平均數取代 m。我們把樣本內坦

克的編號由小至大排列，依次為 8，12，25，37，48。當中25及26 分別為所得樣本{8，12，25，37，48}的中位數及平均數。根據以上所建議的公式，估計德國所製造的新型號 Panther Mark V坦克總數為 $\hat{N}_1 = 2\times 25-1 = 49$ 和 $\hat{N}_2 = 2\times 26-1 = 51$。不幸地，這樣的估計值有可能出現 $\hat{N}_1$ 和 $\hat{N}_2$ 均小於樣本的最大值。例如，設盟軍所擄獲的5 台德軍坦克上面有編號{8，11，25，34，52}。我們採用相同的方法同樣得到樣本的中位數和樣本的平均數分別為 25 及 26。因此，估計德國所製造的坦克總數為 $\hat{N}_1 = 49$ 或 $\hat{N}_2 = 51$。兩者均小於樣本的最大編號 52。這種估計 N 的公式的缺點是不能保證總數的估值一定大於紀錄中的最大編號。

有沒有方法合理地設計另一個點估計的公式使到其估計值一定大於或等於樣本的最大值？這次我們嘗試運用“數與數的間距”這個訊息。假設這次盟軍擄獲德軍 n 台坦克，坦克上的編號依次為 $\{X_1，X_2，\ldots\ldots，X_n\}$。假設這 n 個數字很均勻地散佈在 N 裡面。考慮所繳獲坦克樣本的對稱性，即大於 X_n 而未被發現的坦克總數與小於 X_1 而未被發現的坦克總數相約。因此，我們可以從以下公式估計德國所製造的坦克總數 $\hat{N}_3$，當中 $\hat{N}_3 - X_n = X_1 - 1$，得出 $\hat{N}_3 = X_n + X_1 - 1$。若以樣本 {8，25，12，48，37} 作例子，$\hat{N}_3 = 48+8-1 = 55$。

延伸這一概念，我們可假設大於X_n而未被發現的坦克總數為**分段數目的平均值**: 即小於X_1而未被發現的坦克總數 ;X_1與X_2之間而未被發現的坦克總數 ;X_2與X_3之間而未被發現的坦克總數，...，X_{n-1}與X_n之間而未被發現的坦克總數之平均值。因此，

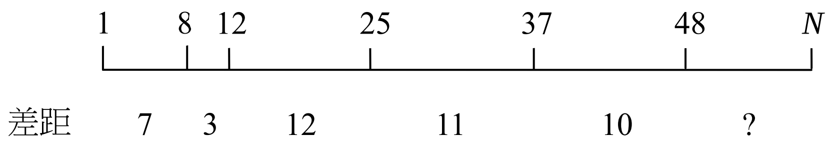
$$\hat{N}_4 - X_n = \frac{(X_1 - 1) + (X_2 - X_1 - 1) + (X_3 - X_2 - 1) + (X_4 - X_3 - 1) + \ldots + (X_n - X_{n-1} - 1)}{n}$$

$$\hat{N}_4 - X_n = \frac{(X_n - n)}{n}$$

$$\hat{N}_4 = X_n + \frac{X_n}{n} - 1$$

$$\hat{N}_4 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) X_n - 1$$

我們再以樣本{8，25，12，48，37}作說明，情況如下圖所示:



若果我們能夠猜測第48部坦克與第 N 部之間的差距，那麼我們就可以正確推測 N 的數值。由上圖得知: 我們可引用五部坦克的平均差距，來代表第48部與最後一

部之間的差距，因此我們可以推測

$$\hat{N}_4 = 48 + \frac{1}{5}(7 + 3 + 12 + 11 + 10)$$

$$\hat{N}_4 = 56.6$$

$$\approx 57$$

這種方法的各種變形曾經應用於二次世界大戰之中。從戰後發現的德軍紀錄來看，盟軍的估計值非常接近所生產的坦克的真確值。記錄表明統計估計比通過其他情報方式做出估計要大大接近於真實數目。統計學家做得比間諜更漂亮! 若德軍對於坦克的編號不是從1開始，情況又怎樣? 你又有何建議呢?

參考資料：

1. Gudmund R. Iversen, & Mary Gergen(1997). *Statistics: The Conceptual Approach*. New York: Springer.
2. Roger W. Johnson (1994). Estimating the size of a population, *Teaching Statistics*, *16*(2), 50-52.

邀請作品:　A Happy Lady Tasting Tea?

Professor Stephen M.S. LEE
Department of Statistics & Actuarial Science
The University of Hong Kong

A tasty cup of tea is made up of three important ingredients – water, sugar and a tea-bag. The order in which these three ingredients are put together depends very much on the drinker's personal taste.

Sitting alone in a dressing room is a lady, who is being served tea by three servants named W, S and T. W is in charge of water, S takes care of sugar, and T, of course, tea-bags. One at a time the lady asks the three servants to enter her room and put inside her cup the ingredients. To make the cup of tea, the lady has six different ways to order the entries of her three servants, as listed below:

(1)W-S-T, (2) W-T-S, (3) S-W-T,
(4) S-T-W, (5) T-W-S, (6) T-S-W.

There is no single option among these six orders which will always be taken by the lady. In fact, she will select an order at random, in a manner according to her present mood. Long-term observation of this lady's past tea-drinking behaviour has revealed the following facts:

- If she has a happy mood, she will select an order according to the following probability distribution,

Order	W-S-T	W-T-S	S-W-T	S-T-W	T-W-S	T-S-W
Probability	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- If she has an unhappy mood, she will select an order according to the following instead,

Order	W-S-T	W-T-S	S-W-T	S-T-W	T-W-S	T-S-W
Probability	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{3}$

Due to her extreme ego, the lady, sitting behind her closed door, never communicates with anybody except her three servants.

The lady has a secret admirer, named Stephen, who wants very much to know whether his goddess is in a happy mood today. Not being able to approach the lady directly, Stephen can only tell a plausible answer indirectly by observing the way she orders her cup of tea today. For the latter information, Stephen may turn to the three servants…

Generally speaking, the first servant ordered by the lady only sees an empty cup before he puts in the first ingredient;

the servant who puts in the second ingredient can see the first ingredient already inside the cup; the servant who puts in the last ingredient can see inside the cup only a mixture of the first two ingredients without knowing what has gone in first.

The three servants never communicate with each other, so they only know what they see by themselves. For example, if the actual order chosen by the lady is W-S-T, then W only knows that water is the first ingredient to go into the cup and nothing more, S knows the complete order as he sees only water inside the cup before he adds sugar to it, and T knows only that water has already been added when he puts in the tea-bag but does not know if sugar has been added yet, since sugar dissolved in water is not visible to him.

Greedy by nature, the three servants are only willing to tell Stephen what they see for a price, which is fixed at $1,000 each. Of course, Stephen will get to know the complete order of the three ingredients if he pays all three servants for their information, which will cost him $3,000. A tricky question is:

Can Stephen ask fewer people (so as to save some money) for what they see yet without losing any useful information which could have been obtained from a complete knowledge of the true order of ingredients?

If so, who should he ask?

To answer the above question, we need first to understand what we mean by "useful" information. Suppose Stephen decides to ask only T but not the other two servants for information, and T replies that he only sees water inside the cup, possibly with sugar dissolved in it, when he puts in the tea-bag. It implies that the true order must be one of the following three possibilities: W-S-T, S-W-T or W-T-S. This is all we can tell from T's answer.

But, could we gain better knowledge about the lady's mood if we had known more details? This question can be answered by checking the "conditional" probability of each of the three possible orders "given" that we know the true order must be one of them. We tabulate such conditional probabilities below, which follow by a simple application of Bayes' theorem.

- If the lady is happy,

Order	W-S-T	W-T-S	S-W-T
Conditional probability	$\frac{1/12}{1/12+1/4+1/15}=\frac{5}{24}$	$\frac{1/4}{1/12+1/4+1/15}=\frac{5}{8}$	$\frac{1/15}{1/12+1/4+1/15}=\frac{1}{6}$

- If she is unhappy,

Order	W-S-T	W-T-S	S-W-T
Conditional probability	$\frac{1/24}{1/24+1/8+1/15}=\frac{5}{28}$	$\frac{1/8}{1/24+1/8+1/15}=\frac{15}{28}$	$\frac{1/15}{1/24+1/8+1/15}=\frac{2}{7}$

Now we see that if the true order is indeed W-S-T, which is more likely to be taken by a happy lady (with chance 5/24) than an unhappy one (with chance 5/28), we are then more inclined to judge that the lady is happy. However, if the true order is S-W-T, the situation will become just the opposite and we will judge that the lady is more probably unhappy. This example shows that given T's reply, Stephen could have sharpened his knowledge further about the lady's mood if he had access to more details, such as whether the order is indeed W-S-T or S-W-T. Thus, knowing only T's answer may cause Stephen a loss of some essential information.

As for the servant S, we may argue in a similar way to see that his answer too does not tell everything that the true order of the three ingredients could have told about the lady's mood.

Let us turn finally to W. Suppose now Stephen asks only W for information but not the other two. There are only four possible responses from W:

1. "The cup is empty before I pour water into it."

2. “I see only a tea-bag inside the cup before I pour water into it.”
3. “I see only sugar inside the cup before I pour water into it.”
4. “I see a tea-bag with sugar inside the cup before I pour water into it.”

Responses 2 or 3 imply immediately that the true order is T-W-S or S-W-T, respectively, so there is nothing more Stephen would like to look for from the servants. In the case of response 1, Stephen knows now that the true order must be either W-T-S or W-S-T. Given this reply from W, calculations similar to the above lead us to the following conditional probabilities:

- If the lady is happy,

Order	W-S-T	W-T-S
Conditional probability	$\frac{1/12}{1/12+1/4}=\frac{1}{4}$	$\frac{1/4}{1/12+1/4}=\frac{3}{4}$

- If she is unhappy,

Order	W-S-T	W-T-S
Conditional probability	$\frac{1/24}{1/24+1/8}=\frac{1}{4}$	$\frac{1/8}{1/24+1/8}=\frac{3}{4}$

Interestingly, no matter how the lady feels, the odds that she will pick W-S-T instead of W-T-S remain 1:3. This means that knowing further which of these two orders is the correct one does not gain for Stephen any extra useful information to help him refine his judgment concerning the lady's mood. We may repeat the same analysis for the case of response 4, which implies the true order to be either S-T-W or T-S-W. Again we find that whether happy or unhappy, the lady will pick S-T-W instead of T-S-W with the odds 3:5, so that further distinction between S-T-W and T-S-W adds nothing to Stephen's information about the lady's mood. We thus conclude that W's response has already contained all the relevant information that Stephen can hope for from a complete knowledge of the order of the three ingredients. Nothing more needs be asked further from the other two servants.

In this way we have solved Stephen's problem. To save the most money, he should pay only W for his information and nothing more.

The above story touches upon a very important statistical concept, first developed by Sir R. A. Fisher, known as the "*principle of sufficiency*". Stephen's problem can indeed be worded in the form of a classical problem in statistical inference theory:

How can we find a "sufficient statistic" to summarize our observations without losing any essential information relevant to our inference problem?

In the context of our story, the inference problem is Stephen's fundamental problem: "*is the lady happy or not?*" He attempts to answer this by taking observation of the order of the three ingredients that are used to make the lady's cup of tea. Since the complete observation comes at a cost, naturally Stephen would like to seek a more economical summary, that is a sufficient statistic, of this complete observation so that he can pay less yet gain exactly the same information about the lady's mood. The responses from the three servants provide three alternative statistics that Stephen may consider adopting. It turns out that only one servant, W, can provide him with a sufficient statistic. Some ingenious methods have been found to help people seek out the best sufficient statistics for general inference problems. Coming back to our story, a simple method to deduce the best sufficient statistic requires us only to consider the ratio of probabilities for each order between the two moods of the lady, that is

Order	W-S-T	W-T-S	S-W-T	S-T-W	T-W-S	T-S-W
Ratio	$\frac{1/12}{1/24}=2$	$\frac{1/4}{1/8}=2$	$\frac{1/15}{1/15}=1$	$\frac{1/10}{1/5}=\frac{1}{2}$	$\frac{1/3}{7/30}=\frac{10}{7}$	$\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}$

We see from the above table that W-S-T and W-T-S share the same ratio (=2), so they convey exactly the same information about the lady's mood. The same holds for the two orders S-T-W and T-S-W, which also share the same ratio (=1/2). Thus, in practice, Stephen only needs to distinguish between four subgroups of the six orders:

1) {W-S-T, W-T-S}, 2) {T-W-S},
3) {S-W-T}, 4) {S-T-W, T-S-W}.

Each subgroup conveys a distinct type of information concerning the lady's mood. Now, it is clear that the above four subgroups correspond exactly to the four possible responses of W. This helps us identify W as the most "useful" informant. This method can be generalized to any statistical inference problem, but the details should be left to a formal statistics class…

邀請作品：香港的教育堅尼系數

屈錦培博士
香港大學統計及精算學系

一聽到堅尼系數 (Gini coefficient) 這個耳熟能詳的詞語，相信大家即時會聯想到貧富懸殊的問題。沒錯，堅尼系數可以作為一個衡量分佈平均的統計量，最常見的社會應用是量度不同地區的人口或家庭收入分佈是否平均。但大家有沒有想到堅尼系數其實也可以應用在其他方面呢？

為了讓大家更易理解，在此先作一個簡單的例子，簡介何謂堅尼系數。

什麼是堅尼系數

假設社區甲和乙各有五個人，這十人的每月收入（<u>由少至多排列</u>）分別如下表所示：

社區甲	
人口	收入（元）
甲一	16,000
甲二	18,000
甲三	20,000
甲四	22,000
甲五	24,000
社區	100,000

社區乙	
人口	收入（元）
乙一	8,000
乙二	10,000
乙三	12,000
乙四	30,000
乙五	40,000
社區	100,000

表一：社區甲和社區乙的人口每月收入

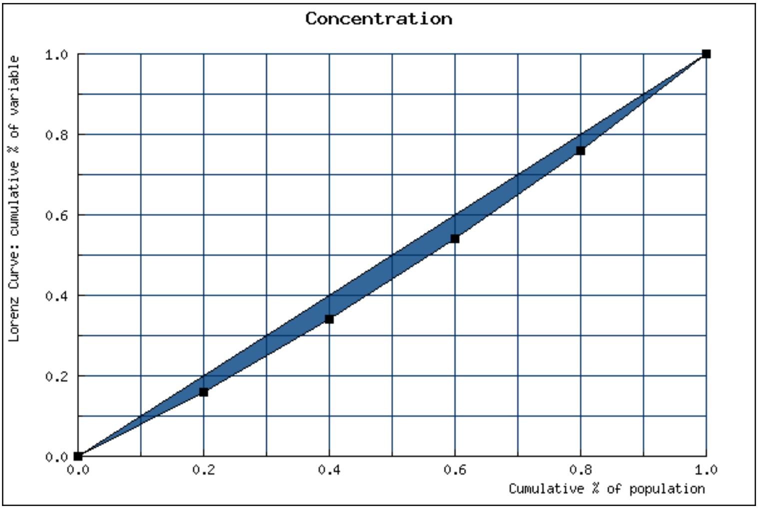
其實大家從這個假設例子的數據上已經可以輕易看見社區甲的收入分佈較為平均，而社區乙的收入分佈則較為懸殊。(筆者設計以上的數據是用於方便解釋和作比較。) 但如果有人問社區甲的收入分佈有多「平均」？而社區乙的收入分佈又有多「懸殊」？這些問題又可怎樣回答呢？堅尼系數則可以作為一個較客觀的準則和回答以上問題。要計算堅尼系數，首先，將社區甲的數據再作進一步的處理，得出下表：

累積人口 i	累積人口比率 $Q_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$	累積收入（元） $\sum_{j=1}^{i} np_j y_j$	累積收入比率 $S_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} np_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} np_j y_j} = \frac{\sum_{j=1}^{i} p_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j}$
0	0%	0	0%
1	20%	0 + 16,000 = 16,000	16%
2	40%	16,000 +18,000 = 34,000	34%
3	60%	34,000 +20,000 = 54,000	54%
4	80%	54,000 + 22,000 = 76,000	76%
5	100%	76,000 + 24,000 = 100,000	100%

表二：社區甲的收入數據處理

(p_j 為每人對於整個社區的比例，即 20%； y_j 為第 j 人的每月收入，j = 1, … ,5；n 為社區的人數總數，即 5 (於處理分類數據時 n 則為類別數目)；Q_i 為累積人口比率，也定義 $Q_0 = 0$ ； S_i 為累積收入比率，也定義 $S_0 = 0$ 。)
註：累積人口的排序必須為由收入少至收入多，即 y_i 一定不大於 y_{i+1} 。

如果我們把累積人口比率（第二欄）和累積收入比率（第四欄）的數據配合起來，即(Q_i , S_i): (0,0)、(0.2,0.16)、(0.4,0.34)、(0.6,0.54)、(0.8,0.76)、(1,1)，再把它們繪畫在直角座標圖象上，然後連上這些點，我們便畫出了社區甲的勞倫茨曲線 (Lorenz curve)，見下圖方點連接的線。[1]



圖一：社區甲的勞倫茨曲線

[1] 網上有免費的軟件繪畫勞倫茨曲線，詳見參考資料。

這裏，我們也畫上由 (0,0) 連至 (1,1) 的對角線，稱為完全平等線。試想一想，如果收入的分佈是完全平均(在以上例子即是五人每人收入為20,000元)，那麼所得出的勞倫茨曲線就正正是這條完全平等線。可見勞倫茨曲線愈接近完全平等線，數據的分佈就愈平均。相反，參差的數據所得出的勞倫茨曲線就會非常偏離完全平等線。兩線的偏差可以用兩線包圍的面積（圖中陰影的部分）作為統計量，而堅尼系數就是這個面積的兩倍[2]。

$$\begin{aligned}
\text{堅尼系數} &= 2\times \text{ 陰影面積} \\
&= 2\times(\text{下半圖面積 } - \text{ 陰影區域以下所有梯形面積}) \\
&= 2\times\left[\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\left(S_i+S_{i-1}\right)}{2}\right] \\
&= 1-\sum_{i=1}^{n}p_i\left(S_i+S_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

其實，堅尼系數還有其他定義，例如以下的數學公式[3]：

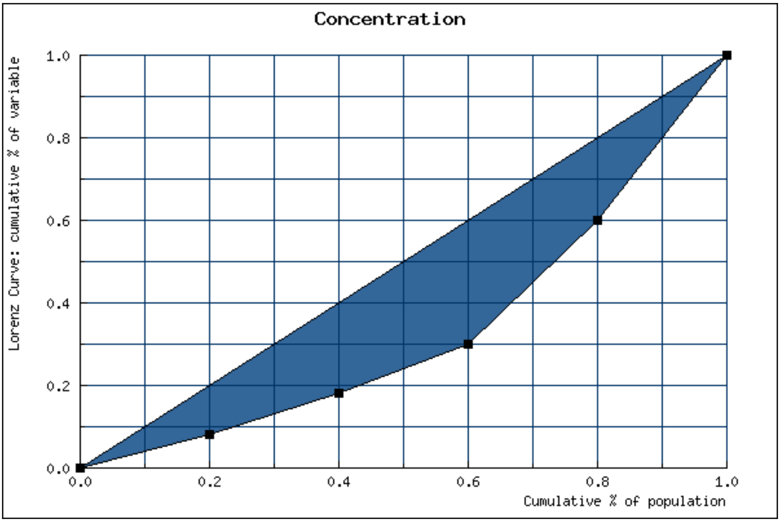
$$\text{堅尼系數} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}p_i\left(y_i-y_j\right)p_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i y_i}$$

以上兩個定義其實是同等的，詳見附錄。

[2] 用兩倍面積可以使堅尼系數介乎於 0 和 1 之間，方便比較。

[3] 筆者選擇用勞倫茨曲線的方法帶出堅尼系數，主要原因是這個方法較易理解，同時可用圖像協助解釋。

社區甲的收入堅尼系數為0.08（同學可以自行計算驗證）。在此要記著，堅尼系數的值愈小，就代表數據分佈愈平均。同時，我們也看看社區乙的勞倫茨曲線：



圖二：社區乙的勞倫茨曲線

社區乙的收入堅尼系數為0.336(也請同學自行計算驗證)。一如剛才的說法，社區乙的收入數據分佈比較不平均，所以圖中陰影面積和堅尼系數也較社區甲的為大。

教育堅尼系數

從以上簡單的例子，相信同學已大概掌握了何謂堅尼系數，以及為何它能夠用於解釋貧富差距的情況，但其實堅尼系數也有其他方面的應用。教育堅尼系數 (Education Gini coefficient，簡稱EGC) 或稱堅尼指數 (Education

Gini index，簡稱EGI) 就是一例，主要用於研究教育不平等 (Educational inequality) 的情況。

我們能夠在香港接受教育都算是幸福的一群，香港政府自20世紀70年代末期實施九年免費教育以來，大家都有機會接受基本的教育，窮孩子都可以用「知識改變命運」的心態去脫貧。新學制更會引入十二／十三年免費教育，大家的教育水平又會邁向新的里程。可是，同學又有否想到，在一些貧困的國家，基礎教育也可算是奢侈品。

一些研究教育的學者就曾經利用教育堅尼系數去探討不同國家人民接受教育的情況。和剛才介紹堅尼系數的例子相似，不過每人收入的數據就改成在學的年數。筆者翻查過研究資料，發覺類似的研究包括如中國、日本、印尼、菲律賓、土耳其等等地區，偏偏卻沒有香港。現在就讓我們一起探討一下香港的情況吧！

香港的教育堅尼系數

在政府統計處每年發表的《香港統計年刊》，我們可以找到本港十五歲及以上人口的教育程度分佈，由1992年至2008年[4]（共17年）的數據（百分比）可以歸納如下：

[4] 由於 1992 年前及 2008 年後的數據結構有所不同，所以於這個研究中剔除。

年份	未受教育／學前教育	小學	初中	高中	預科	專上教育	總計
1992	12.4	26.7	16.1	29.1	3.8	11.9	100
1993	11.5	26.2	15.8	30.1	3.9	12.5	100
1994	11	25.5	16.1	30	4.1	13.3	100
1995	10.6	24.3	16.4	29.6	4.4	14.7	100
1996	9.6	23.7	16.7	29.7	4.5	15.8	100
1997	9.3	23	16.2	29.9	4.4	17.2	100
1998	8.9	22.9	16.2	30.5	4.1	17.4	100
1999	8.4	22.3	16.5	30.8	4.4	17.7	100
2000	7.6	22.2	16.7	30.7	4.3	18.5	100
2001	7.3	21.5	16.8	30.2	4.6	19.7	100
2002	6.9	20.8	16.7	30.1	4.7	20.7	100
2003	7	20.2	17	29	5.3	21.4	100
2004	6.8	19.5	16.8	29.8	5.3	21.9	100
2005	6.4	19.3	16.2	30.1	5.2	22.8	100
2006	5.9	18.6	16.5	30	5.3	23.8	100
2007	5.5	18.2	16.4	29.9	5.6	24.3	100
2008	5.5	18.2	16.1	30.3	5.4	24.5	100

表三：十五歲及以上人口的教育程度分佈（1992年至2008年）

我們採用下表計算不同教育程度的在學年數（請注意這裡跟新高中的學制不同）：

類別	在學程度	個別在學年數	在學年數
1	未受教育／學前教育	0	0
2	小學	6	0 + 6 = 6
3	初中	3	6 + 3 = 9

類別	在學程度	個別在學年數	在學年數
4	高中	2	9 + 2 = 11
5	預科	2	11 + 2 = 13
6	專上教育	3	13 + 3 = 16

表四：在學年數的數據結構

由於資料的精確度有限，上表只能讓我們作一個大概的估算。舉例說，正在修讀小學的人口的在學年數還未夠6年，即是以上類別2至6的在學年數或有下調的空間；又例如部分繼續進修碩士、博士的人口的在學年期應該更長，不只16年，即是類別6的在學年數或有上調的空間。以1992年的數據為例：

類別 i	人口比率 p_i	每人在學年數 y_i
1	12.4%	0
2	26.7%	6
3	16.1%	9
4	29.1%	11
5	3.8%	13
6	11.9%	16

表五：1992年的數據處理一

1992年香港人的平均在學年數為：

$$12.4\%\,(0) + 26.7\%\,(6) + \ldots + 11.9\%\,(16)$$
$$= \quad 8.65$$

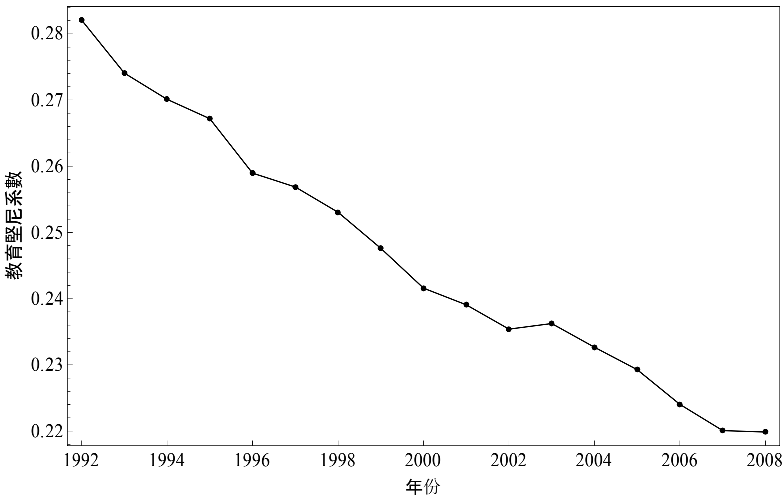
這個平均在學年數一方面可以作為研究分析，另一方面也可以協助我們計算累積在學年數。

類別 i	人口比率 p_j	累積人口比率 $Q_i=\sum_{j=1}^{i} p_j$	$p_i y_i$	$\sum_{j=1}^{i} p_j y_j$	累積在學年數比率 $S_i=\dfrac{\sum_{j=1}^{i} p_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j}$
0	0%	0%	0	0	0
1	12.4%	12.4%	0	0	0
2	26.7%	39.1%	1.602	1.602	18.5202%*
3	16.1%	55.2%	1.449	3.051	35.2717%*
4	29.1%	84.3%	3.201	6.252	72.2775%*
5	3.8%	88.1%	0.494	6.746	77.9884%*
6	11.9%	100%	1.904	8.65	100%

* 四捨五入至小數後四個位。

表六：1992年的數據處理二

同樣地，用兩欄累積比率的數據（或用表五的數據直接代入公式），就可得出1992年香港的教育堅尼系數為0.282071。按照相同的步驟處理所有的數據（共17年），就可得出以下的結果。



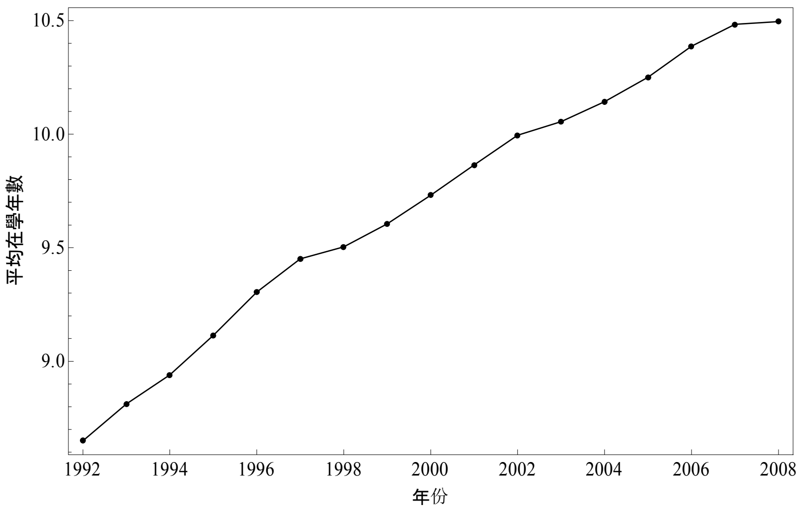
圖三：香港的教育堅尼系數（1992年至2008年）

由圖中可見，香港的教育堅尼系數在近二十年間，有下降的趨勢（下降幅度約為20%），表示香港人口的在學年數的分佈趨向平均。但是大家在分析時亦應該注意以下一點，雖然指數下降了，但我們不能單憑這點作出簡單的結論，因為一個分佈的不平均，可以是數據側重於數值小的一方（即在學年期短、教育程度低）或是側重於數值大的一方（即在學年期長、教育程度高）。即是，我們不應該誤以為教育堅尼系數愈小，就一定代表整體的教育程度高。舉例說，假設全港所有人都只有小學程度（當然這是太誇張的假設），那麼所有人的在學年數都是6，分佈當然絕對平均，堅尼系數必定為0。

與此同時，即使在一個「正常」、「理想」的情況之

下，不同人的教育程度也應有所不同。有人所追求的是知識，這類人或許會不斷進修；有人或許因為種種原因，讀書讀到一定程度便工作。我們斷不能以追求完全平均為目標，所以我們分析統計量時都要小心考慮實際情況。

可喜的是，從以下的圖表中可見，香港人的平均在學年數的確是每年都在節節上升。



圖四：香港人口的平均在學年數（1992年至2008年）

綜合了教育堅尼系數和平均在學年齡這兩個教育研究學者常採用的統計量，我們可以推論，香港人口的普遍教育程度在這十多年間是有所提升的。而且，政府實施了免費教育政策後，因為經濟原因而不能上學的情況已經不再出現，所以教育堅尼系數下降亦不無道理。大家小時候都

會經常聽到長輩說以前讀書的機會少，相信大家從這個簡單的數據分析中都驗證到一點點吧。希望同學們都可以好好珍惜學習的機會，不要虛度光陰。

其實堅尼系數還有很多不同的用途，例如解釋生物多樣性、判別信貸評級模型的可靠性，以至化學上及工程學上等等的應用都有。筆者早前就閱讀了報章副刊一篇名為《哪個聯賽最具看頭？》的文章，作者利用堅尼系數來分析各大足球聯賽當中不同隊伍的實力懸殊，創意十足。同學們也可以想想，堅尼系數 (又或者其他統計學的知識) 在日常生活中還有什麼趣味應用呢？

參考資料：

1. Gini coefficient. Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Gini_coefficient

2. Hojo, M. (2009). Inequality in Japanese Education. *The Japanese Economy*, *36*(3), 3-27.

3. Thomas, V., Wang, Y., & Fan, X.(2001). Measuring Education Inequality – Gini Coefficients of Education. *Policy Research Working Paper*, 2525. The World Bank.

4. 何景安(2009)。《香港教育小百科》第九章(9)基礎教育。 http://www.sew.com.hk/publication/mini-enc-hke/Ch09.pdf

5. 香港統計年刊。政府統計處。
http://www.censtatd.gov.hk/products_and_services/products/publications/statistical_report/general_statistical_digest/index_tc_cd_B1010003_dt_detail.jsp

6. 香港教育。維基百科。
http://zh.wikipedia.org/zh-hk/%E9%A6%99%E6%B8%AF%E6%95%99%E8%82%B2

7. 哪個聯賽最具看頭？信報副刊，2010年6月15日。
http://hkscience.blogspot.com/2010/06/blog-post_15.html

8. 堅尼系數計算器：Wessa, P. (2010). Free Statistics Software, Office for Research Development and Education, version 1.1.23-r6.
http://www.wessa.net/

附錄：堅尼系數的同等定義

要計算堅尼系數，也不一定要按文中的方法逐步算出個別的累積量 S_i，再計陰影面積的兩倍，正如文中所提及，堅尼系數也有公式可以直接算出：

$$\text{堅尼系數} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} p_i\left(y_i - y_j\right)p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}$$

這公式的好處是方便直接輸入電腦程式，不用從以幾何面積的方法計算。

我們可以證明這個定義是等同於文中兩倍陰影面積的定義，考慮以上公式的分子：

$$\text{分子} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} p_i\left(y_i - y_j\right)p_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} p_i y_i p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} p_i y_i p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=j+1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=i+1}^{n} p_j y_j - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{j=i+1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{i} p_j y_j - \sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \right) \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{i} p_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j} - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} p_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \right) \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - S_i - S_{i-1} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \right) \left[\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(S_i + S_{i-1} \right) \right]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \right) \left[1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(S_i + S_{i-1} \right) \right]$$

因此，堅尼系數 $= 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(S_i + S_{i-1} \right)$

如文中所述，這就是陰影面積的兩倍。

二零一零/一一 年度中學生統計創意寫作比賽的籌備委員會：

主席	楊良河博士，香港大學統計及精算學系
總評審主任	張家俊博士，香港大學統計及精算學系
籌委會成員	陳秀騰先生，教育局
	陳建良先生，政府統計處
	陳家豪先生，政府統計處
	郭銘樂先生，政府統計處
	劉瑞琪女士，政府統計處

數學百子櫃系列		作者
(一)	漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分	張家麟、黃毅英、韓藝詩
(二)	漫談數學學與教新高中數學課程延伸部分單元一	韓藝詩、黃毅英、張家麟
(三)	漫談數學學與教新高中數學課程延伸部分單元二	黃毅英、張家麟、韓藝詩
(四)	談天說地話數學	梁子傑
(五)	數學的應用: 區像處理—矩陣世紀	陳漢夫
(六)	數學的應用: 投資組合及市場效率	楊良河
(七)	數學的應用: 基因及蛋白的分析	徐國榮
(八)	概率萬花筒	蕭文強、林建
(九)	數學中年漢的自述	劉松基
(十)	中學生統計創意寫作比賽 2009作品集	
(十一)	從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀	張家麟、黃毅英
(十二)	2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集	