數學百子櫃系列（三）

漫談數學學與教

新高中數學課程延伸部分

單元二

作者 黃毅英、張家麟、韓藝詩

教育局
課程發展處數學教育組

ISBN 978-988-8019-64-9

目錄

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深老師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《漫談數學學與教 — 新高中數學課程延伸部分單元二》是這個系列的其中一冊，作者黃毅英教授、張家麟博士和韓藝詩女士對中學數學教學素有研究，本書除談及高中數學課程的學科知識外，對學科教學知識、學習難點等，都有精闢的見解。本書不僅可供教師參考，亦可作為學生讀物。作者撰文期間，高中數學課程仍在修訂，本書內容或與課程最後定稿偶有出入，祈請讀者留意。此外，本書只屬作者個人觀點，並不代表教育局的意見。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
(傳真：3426 9265　電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

作者簡介

黃毅英，文學學士、哲學碩士、教育證書、哲學博士（香港大學），文科教育碩士（香港中文大學），現任香港中文大學課程與教學學系教授。於境內外學報發表學術論文二百餘篇。2001 年獲香港研究資助局重點專案資助（Competitive Earmarked Grant）、2005 年獲學院優秀教學獎、2006 年第三屆全國教育科學研究優秀成果獎三等獎、2008 年獲香港中文大學研究卓越獎。編著有《邁向大衆數學的數學教育》、《數學教育實地觀察》、《數學教育實地再觀察》、《香港近半世紀漫漫「數教路」：從新數學談起》、《華人如何學數學》（與范良火、蔡金法、李士錡合編）、《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育 — 蕭文強教授榮休文集》、《香港近半世紀漫漫「小學數教路」：現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》（與鄧國俊、霍秉坤、黃家樂、顏明仁合寫）、《變式教學課程設計原理：數學課程改革的可能出路》（與林智中、孫旭花合寫）等。香港數學教育學會創會會長，現爲上海師範大學小學教育研究所客座研究員、天津《數學教育學報》及韓國《數學教育研究學報》編委。

張家麟，學數於香港中文大學數學系，先後獲學士、碩士及博士學位。研究興趣為非綫性偏微分方程。曾任職中學教師、香港教育學院及香港中文大學數學系導師，2005 年獲中文大學理學院優秀教學獎。2006 年 7 月任香港教育學院助理教授至今，對數學解難，以及幾何的教與學至感興趣。

韓藝詩，香港科技大學獲得理學士（數學）和哲學碩士（數學）學位，香港浸會大學取得學位教師教育文憑，現於香港中文大學修讀教育碩士課程。曾於香港教育學院擔任專任導師，亦曾於中學任教數學。

1. 緒論

單元二的內容，像以往純粹數學科的課題一樣，是互相交織的。以純粹數學科的 $AM \geq GM$ 為例，它就有多個流行的證明[1]，各具特色、動用了不同的數學工具。除了這種一題多解外，不少數學題是橫跨數個課題的、綜合性的，例如用數學歸納法證明微積分的一些性質。故此，若在教授數學歸納法時，嘗試把所有涉及數學歸納法的題型均作演練其實是不切實際的。因此，我們提出一種「第一次接觸 — 從新檢視（first acquaintance – re-visit）」的教學方式，就是先把課題的基本技巧用比較快的速度教好，讓學生掌握鎚呀、鋸呀等工具，然後再將工具合起來去製造箱呀、櫃呀等等。當然中間可以有「兩條腿走路」的考慮，由於第二階段的學習（不同技巧的綜合運用）是需要不少時間的，往往要一兩個月，要達到這個理想（不是補課！）就要在較早期完成第一階段的「修煉」。其中的要點是上面談到的。在第一階段修練中，只牽涉到基本功，讓學生穩穩妥妥地掌握相關技巧就夠了。學生在第二階段才有足夠時間把基本功轉化成解決問題的能力。

[1] Wong, N. Y. (1993). *A-Level Pure Maths Volume I.*, chapter 3: inequality (pp. 72－98). Hong Kong: Macmillan.

2. 根式

課程中注釋提出可以在教極限及求導法時才引入根式分母的有理化。這明顯是由於根式分母的有理化於求極限及求導法是有巧妙的作用（如求 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$ 之類）。把之放入極限及求導的處境（context）使到學習更有實質（學生常常問「學來有什麼用」往往就是因為抽空來教）。但與此同時，根式之有理化本身也有自足的意義，就是透過共軛的方法，讓根式之四則形成一個完整的體系，即 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 本來看似並非根式的線性組合，但搖身一變成為 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$，又變回根式的線性組合了。換言之，$\mathbb{K}=\left\{ a_0+\sum_{r=1}^{n} a_r\sqrt{p_r} : a_r, p_r \in\mathbb{Q} \right\}$是一個域，其中 $\mathbb{Q}$ 為有理數集。有關域的精確定義，可在標準的抽象代數教科書中找到。粗略而言，$\mathbb{K}$ 作為 $\mathbb{R}$ 中的一個域，意指實數的「加」和「乘」的運算法則均在 $\mathbb{K}$ 中成立且封閉，0 和 1 在 $\mathbb{K}$ 中，並對 $\mathbb{K}$ 中的任意元素，其加法逆元也在 $\mathbb{K}$ 中，對 $\mathbb{K}$ 中的非零元素，其乘法逆元也在 $\mathbb{K}$ 中。

此外，共軛當然是 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的巧妙應用，向下又延續到微積分（前述）及複數 $((a+bi)\div(c+di))$，學生了解箇中來龍去脈，到數學內容就較易融會貫通。

相關網站：

1. 雙重平方根

   http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/95sutdy/PDF/03_root.pdf

2. 根式的意義

   http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_08_4_01/index.html

3. 根式撲克牌

   http://residence.educities.edu.tw/sanchiang/a10.htm

3. 數學歸納法

數學歸納法是大家熟知之課題，其難教之處並不只含有很多變招（所謂第二原理，甚或華羅庚所說的「蹺蹺板歸納法[2]」等，而是它有著極廣泛的應用，包括在代數、三角、幾何、微積分等各個領域。不過追本究源，其實我們只需要第一次接觸時讓學生整整齊齊的運用數學歸納法原理就好了。學生在證明（尤其是代數題）時出現的技術性困難往往在於不太熟習「走動指數」（running index）的意義和應用（「走動指標」與數學歸納法不是一而二、二而一的事情嗎？）例如 $1^3+2^3+......+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$，$n$ 每增加 1，左邊只加一項，但對於 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+......+\frac{1}{2n}$，$n$ 每增加 1，左邊是加了兩項，右邊則只增加一項！

此外，不少數學教育家更關注是數學歸納法的意識（mathematically inductive way of thinking）。透過一些例子，如

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=(1-\cancel{\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}})+...+(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

學生就不只會證明由他人得出的式子，而是自己生出這些式子來。

透過另一些例子，學生不只能得出這些結果，而且數學歸納法的證明已包含在結果的生成過程了。常見的例如河內

---

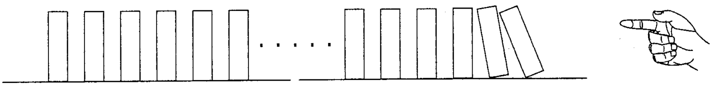
2 華羅庚（1972）。《數學歸納法》。香港：商務印書館。（頁 15）。又見 Wong,N. Y. (1993). *A. Level Pure Mathematics Volume I* (Chapter 2: Mathematical indication: pp. 43－71). Hong Kong: Macmillan.

塔、n 條（不平行，且三線不共點）直線在平面上有多少個點（又或分成多少塊）等。大眾若有興趣，可看 Pólya 現身說法教授 n 塊平面將空間切成多少塊[3]。

有些人或會提問，究竟數學歸納法本身如何得到證明。其實若還記得高等數學就知道數學歸納法「無法證明」(當然如果採取 von Neumann 定義自然數的寫法又另當別論，那就要參考梁鑑添、陳麗珠博士《初等集合論》卷 II 第 6 章「自然數」(頁 77－90）[4])。因為它是自然數的基本性質（皮亞諾第五公設)。不過就有人提供了關於骨牌原理和爬梯的兩個有趣的「隱喻」:

「一個非數學表示是我們考慮一排磚使得任何一塊磚倒下是必會撞跌下一塊。然而這只是一種潛能，要真正撞跌整排磚，其充分條件為撞跌第一塊。否則不可能撞跌整排磚。」

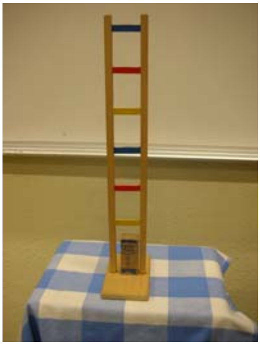
「另一表示是關於一張梯(原文註：Dickson, College Algebra, p.100)。『我們必須要一張梯能從任何一腳踏（k^{th}）爬至下一腳踏（$(k+1)^{th}$)，然而此將必須置於堅實之基地使得我們能爬上此梯（$k=1$ 或 $k=2$)。』」[5]



3 George Pólya (1966). “Let us to teach guessing” (video). Washington, D. C.,Mathematical Association of America.

4 Leung, K.T., & Chen, D.L.C. (1970). *Elementary Set Theory (Parts I & II)*. Hong Kong: Hong Kong University Press

5 Young, J. W. A. (1908). On mathematical induction. *American Mathematical Monthly, 15*, 145－153.

建議課堂活動：跳棋

活動目標：　學生透過遊戲歸納出棋子的數目與棋子移動次數目間的關係。若設 n 為黑／白色棋子數目，T_n 為棋子移動的最少次數，則 $T_n = n(n+2)$ 。

活動內容：　棋子只可利用空格位置向前移動，使得黑色和白色棋子的位置互換。

●	●		○	○	→	○	○		●	●

相關網站：

數學歸納法簡介

(a) http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_10_4_06/

(b) http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/8023.pdf

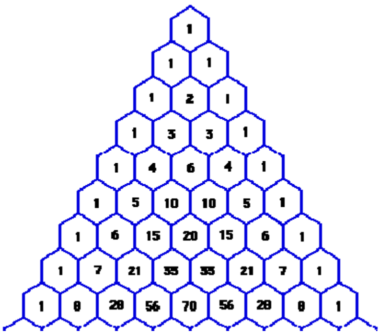
(c) http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/804.pdf

(d) http://www.vtsh.tc.edu.tw/~jck/project/mi.htm

(e) http://staff.ccss.edu.hk/jckleung/jiao_xue/mathindu/index.html

4. 二項式定理

一些學生或會覺得二項式定理不只乏味而且難明。乏味的其中一個原因是不了解其用途，除了$(1+x)^n$在迫近的用處外，其他用途尚包括古代中國解方程的想法（即透過完全平方、完全立方等）。就算不談完全平方、立方等構思，略談楊輝（賈憲）三角的故事[6]（從楊輝三角說起）亦應能加添一點趣味。此外，由學生熟知的$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$出發，計算$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，以至$(a+b)^4$及$(a+b)^5$，從而列出楊輝三角，讓學生觀察當$n$為正整數時，$(a+b)^n$與$(a+b)^{n+1}$展式中，各項係數是如何關聯着的，即$C_r^n+C_{r-1}^n=C_r^{n+1}$，是一個好的切入點。



楊輝三角

至於難明，依法操作並不困難，不過一般學生感到數學歸納法證明二項式定理不只「又長又累贅」，且在日後其他課

6 華羅庚（1964）。《從楊輝三角談起》。北京：人民教育出版社。
梁宗巨（1992）。《數學歷史典故》（第 16 章：賈憲三角—頁 392－407）。沈陽：遼寧教育 出版社。

題均沒用處（考試又通常不會要求考生證明）。其實二項式定理的證明除了數學歸納法外，還可以有較直觀的利用組合想法去證明（其實又是一而二，二而一）。就是若

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{第一個}\underbrace{(a+b)}_{第二個} \ \cdots \ \underbrace{(a+b)}_{第n個}$$

要「生出」$a^r b^{n-r}$來（學生首先要認識到若 a 的冪是 r，b的的冪必須是 $n-r$）。相等於從 n個不同的括號（以次序區分）中選取 r個來提供 a，其餘的 $n-r$ 個提供 b，故此其方法總數是 C_r^n。這樣，便可推導出二項展式：

$$(a+b)^n = C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n\text{-}1} b + C_2^n a^{n\text{-}2} b^2 + \cdots + C_r^n a^{n\text{-}r} b^r + \cdots + C_n^n a^0 b^n \quad (*)$$

因數學歸納法本身也可以進一步淨化數學歸納法思維。若學生覺得 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$難明，可先讓他們看看 $P(3) \Rightarrow P(4)$，

$$\begin{array}{rl}
 & (a+b)^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b + C_2^3 ab^2 + C_3^3 b^3 \\
\times & (a+b) \\
\hline
= & C_0^3 a^4 + C_1^3 a^3 b + C_2^3 a^2 b^2 + C_3^3 ab^3 \\
+ & \qquad\qquad C_0^3 a^3 b + C_1^3 a^2 b^2 + C_2^3 ab^3 + C_3^3 b^4 \\
\hline
= & C_0^3 a^4 + C_1^4 a^3 b + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 ab^3 + C_3^3 b^4 \\
 & \qquad\qquad\qquad（由於 C_r^n + C_{r-1}^n = C_r^{n+1}） \\
= & C_0^4 a^4 + C_1^4 a^3 b + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 ab^3 + C_4^4 b^4 \\
 & \qquad\qquad（由於 C_0^3 = C_0^4 = 1,\quad C_3^3 = C_4^4 = 1）
\end{array}$$

「以簡御繁」本身是變有意義的數學思維方式[7]。

二項式展開還有一個有趣的應用，就是求擲數枚骰子擲出指定點數總和的概率。例如擲 3 枚骰子，求點數總和為 10

[7] 黃毅英（1990）。解題與數學教育。《數學傳播》54 期，71－81。後載黃毅英（編）（1997）。《邁向大眾數學的數學教育》（頁 59－82）。台北：九章出版社。

的形成方法，用類似原理，總數等於$(x + x^2 + \ldots\ldots + x^6)^3$中 x^{10}之係數，上式即

$$\frac{x^3(1-x^6)^3}{(1-x)^3} = x^3(1-3x^6+\ldots)(1+3x+\ldots+36x^7+\ldots)$$

x^{10}之係數為$(1)(36) + (-3)(3) = 27$。

此外，在表達(*)時，引入求和記號：

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r \quad ,$$

既可讓表達式變得清晰簡潔，亦可令學生掌握應用求和記號的方法與技巧，可謂一舉兩得。

相關網站：

1. 有趣問題

   http://163.21.42.19/mathpath/%B2%C4%A4K%AF%B8/8.htm

2. 二項式與π

   http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d232/23211.pdf

3. 多項式

   http://homepage.ntu.edu.tw/~p94922001/Downloads/Polynomials Coefficient.pdf

4. 楊輝三角

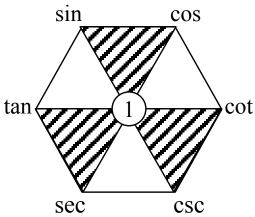
   (a) http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d271/27110.pdf

   (b) http://kss.hkcampus.net/~kss-wsf/theory.htm#triangle

   (c) http://www.chiculture.net/0803/html/c65/0803c65.html

5. 續三角函數

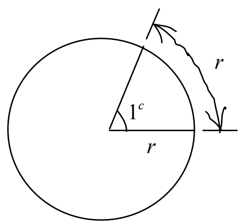
眾所周知，正弦與餘弦是基本的三角函數，在某意義上，這兩個三角函數就「夠」了，即其他三角函數均可用此兩函數表示（當然，理論上，只要一個正弦就夠了，但不保證線性）。故此，我們可以看到「以正弦及餘弦表示 $\sin\theta\dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$」一類的題目。在另一方面，直角三角形共有三邊，取其二邊成三角比，故有 6 種可能性，這就生成 6 個三角比。當然這些函數亦有歷史的根源[8]。右圖是相關公式常見的「巧記法」。



雖然我們可以用弧長引入弧度法，配合微積分就有多一重意義。$\sin x$（及其他三角函數）的求導全靠 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。而此式之成立，$x$ 必須以為弧度[9]。

$$\begin{cases}\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B\\ \cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\\ 2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)---(*)\\ 2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\end{cases}$$



8 梁宗巨（1992）。《數學歷史典故》（第 5 章：三角學－頁 103－122）。沈陽：遼寧教育出版社。

9 Siu, M. K. (1985). Radian or degrees? – do I have a choice? *Mathematics Bulletin, 10*, 8－9.

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

三組公式當然是互相關聯，由第一組就容易推出其他兩組。又是「用」的問題，這些公式自然在微積分中有用，例如應用（*）代以 $A = B = x$，得出 $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C$。不過這三組公式也表現了一種數學思維，就是對於某些函數，與 $k(x + y) = kx + ky$ 和 $\frac{d}{dx}(x + y) = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx}$ 等不同，沒有可加性（$f(x+y) \neq f(x) + f(y)$）。其實先前已遇過了，如 $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$、$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 但又要把它「拆開」。第一組的作用就是把 $\sin(A+B)$ 一類式子拆開來。此外，三組公式實質上是在不同的形式（form）間轉來轉去。其他公式（如 $\sin 2A$，$\cos 2A$ 等）都可以有這種理解。

相關網站：

三角函數

http://webcai.math.fcu.edu.tw/course/trig.htm

6. e的簡述

e、指數函數（exponential function）和自然對數（natural logarithm）

e（Euler number）對中學生而言，是一個既神秘，又奇妙的實數。它之所以神秘源於它的定義；它之所以奇妙，來自以它為底（base）所定義的指數函數，以及它相應的逆函數（inverse function）自然對數在物理世界中的種種應用。

e 的引入

可以透過複利的計算公式來引入 e：

$$S = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

此處 P 是本金，S 是本利和，n 是期數，而 r 及 t 則分別代表利率和時期。眾所周知，當 n 增加時，S 將會變大。有趣的問題是：當 n 無窮地遞增時，S 將會如何變化？為使討論更清晰明確，取 $r=t=P=1$，則問題轉變為討論極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

是否存在。答案是肯定的，它的值就是 $e = 2.718281828\cdots$。要證明極限的存在性，我們可確立：

（i） 序列（sequence）$T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 是嚴格單調上升（strictly monotonic increasing）的，即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，$n$ 為自然數；

（ii）T_n是有界的，事實上，$2 \le T_n$是明顯的。容易由幾何級數的估值證明對所有自然數 n，$T_n \le 3$成立。應用實數序列的單調收斂定理（monotone convergence theorem）：單調上升/下降的實數序列收斂$\Leftrightarrow$該序列為有界序列，知極限$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$存在，故$e$為一有精確意義的數值記號。此外，還可以考慮序列 $S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}$，$n$ 為自然數，並證明：$e = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ [10]。

e 的重要性質

（1） $2 < e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

（2） e是無理數（irrational number），即不能將e寫成$\frac{p}{q}$的形式，其中p, q為整數，$q \ne 0$

（3） e是超越數（transcendental number），即e不是任何一個以有理數為係數的多項式的根

應用序列S_n與e的誤差估計，可為（2）給出一個漂亮的

---

10 雖然証明是標準的，卻並不容易，直接比較可知$T_n \le S_n$，難的一步是利用二項定理於T_n，n遠大於k，並看出：

$$T_n = 1+\sum_{i=1}^{n} C_i^n \frac{1}{n^i}$$
$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$
$$\ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

再取$n\to\infty$，推出$e \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} = S_k$。歸納上述結果，得$T_k \le S_k \le e$，再於上式，應用夾逼定理（squeezing theorem），使$k\to\infty$ 即可得預期結果。

證明[11]。（3）的證明較艱深！不屬於一般的中學課題。

指數函數 e^x 的定義及性質

要講解以e為底又或是以一般正實數為底的指數函數，是一個頗令高中老師頭痛的問題。要講解e^x，首先要定義e^x，難題立即湧現：

（I） 當r為有理數時，e^r的意義是熟知的，但當x是無理數時，怎樣賦予e^x一個合理的定義？

想不通往往要翻書求救，誰不知在那些「高等數學」書中，定義以e為底的指數函數$e^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$時，往往會參照引入$e$的方法，對實數$x$定義$e^x$為：

（II） $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，或

（III） $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$

用這些定義來講解，恐怕有點難度。例如，要理解$e^{\sqrt{2}}$時，學生如何去算$e^{\sqrt{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)^n$或 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^k}{k!}$？另外，這樣的定義，會否與一般考慮$e^r$（$r$為有理數）時所用的定義一致？

（IV） 即使老師定義了e^x，接下來要問的，將是如何說服初學者下列有關實數的指數定律仍然成立：

---

11 參閱復旦大學《數學分析》編寫組（1967）。《數學分析・上冊》。香港：商務印書局。（頁 68－69）。

（1） $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ 及

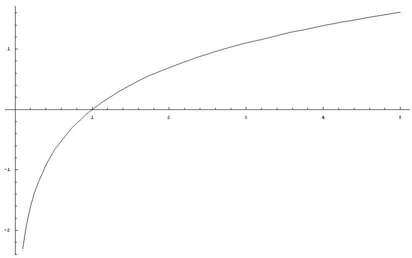
（2） $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$，其中 x與 y為實數。

在附錄一中，我們介紹一種方法，在定義 e 之後以 e^r（其中 r 為有理數）去逼近 e^x，從而使 e^x 有意義，並由此看出 e^x 是 x 的連續函數以及（1）和（2）成立。

<u>自然對數 ln x 的定義及性質</u>

定義了以 e為底，單調連續的指數函數 $y(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ 後，由於它是雙射的，下一步，便可以考慮它的逆函數自然對數函數：$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x \ \ (= \log_e x)$。

與 $y = e^x$一樣，$y = \ln x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 也是單調上升的連續函數。



$y = \ln x$的圖像

可驗證，對正實數 x，y及實數 α，以下對數定律成立：

（1） $\ln x + \ln y = \ln(xy)$，

（2） $\ln x-\ln y=\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$，

（3） $\alpha\ln x=\ln x^{\alpha}$。

至此，對一般的指數函數 $y(x)=a^{x}$， $x\in\mathbb{R}$， $a>0$均可以通過 $a^{x}=e^{x\ln a}$來定義，顯然它是連續函數，且滿足一般的指數定律。

回應指數函數e^{x}的定義中的問題（II），要看出 $e^{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$， $x\neq 0$，我們注意到：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^{x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{x\ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]}=e^{x\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]}=e^{x},$$

此處，我們已應用了e^{x}與$\ln x$的連續性，以及將在附錄一中證明：

（※） $$e=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

要想確切理解（III），並不容易，它牽涉到一般的無窮級數理論，在此不作論述。但引導學生從 $e=e^{1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\dfrac{1}{n!}\right)$出發去討論 $e^{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^{k}}{k!}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n}(x)$的意義，卻是一個極具挑戰性的探究活動。對一給定的實數 x，

要高中學生證明，(i) $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是有界序列，並且(ii)對足夠大的正整數 N，$\{S_n(x)\}_{n\geq N}^{\infty}$是單調上升序列，從而 $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$存在，是一件非常有意義事！

<u>指數及對數函數的微分</u>

特別重要的是 $y=\ln x$的微分性質。對 $x>0$應用對數定律，$y=\ln x$的連續性及e的定義得：

$$(\ln x)'$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \qquad \text{（導數的定義）}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \qquad \text{（對數的性質（2））}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \qquad \text{（對數的性質（3））}$$

$$=\frac{1}{x}\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right] \qquad \text{（對數的連續性）}$$

$$=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}. \qquad \text{（由(※)，}\frac{x}{h}\to\pm\infty\text{）}$$

由逆函數的性質 $x=\ln(e^x)$，對所有實數 x成立，應用鏈式法則（chain rule）得：

$$1=\frac{dx}{dx}=\frac{d[\ln(e^x)]}{dx}=\frac{1}{(e^x)}\frac{d(e^x)}{dx}\ ,$$

指數函數 e^x 的微分公式：對所有實數 x，

(*) $$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

以一般實數 $a > 0$ 為底定義的指數函數 a^x 及對數函數的微分便可推得：

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x\ln a})' = (\ln a)a^x，$$

及 $$(\log_a x)' = (\frac{\log_e x}{\log_e a})' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}。$$

以上是一個有關指數及對數函數的微分公式推導的可行途徑。然而，要推導(*)，只要能證明：

(**) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

便可。細心分析，(**)等價於(*)於 $x = 0$ 時成立：

$$\frac{d(e^x)}{dx}\Big|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 = e^x\Big|_{x=0}。$$

事實上，要確定(**)$\Rightarrow$(*)，只需注意到：

$$\frac{d(e^x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x\cdot 1 = e^x.$$

此處可看出(**)作為一個基本的極限關係式，它的功用，便有如 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 在推導三角函數的微分公式時所起的作用一樣，有異曲同工之妙！但要直接由定義出發來導出(**)卻絕非易事。鼓勵學生從 $y = e^x$ 的圖像，動手估算在 $x = 0$ 處切線的斜率，又或是直觀地考慮 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$，可知 $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$ 故當 $x \to 0$，$\frac{e^x - 1}{x} \to 1$ 是一個「期望」中

的結果。對他們理解(**)是非常有幫助的。

還須指出，以 e 為底的指數函數 $y=e^x$ 還可被定義為函數 $y=y(x)$，它是滿足微分方程：$y'=y$，且適合初始條件 $y(0)=1$ 的唯一可微函數 $y=y(x)$。然而，這種引入亦不易為學生所理解。

最後，指數及對數函數除了以上的引入方法外，另一可行的途徑，是在討論了微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）後，再引入自然對數函數 $y=\ln x:(0,\infty)\to\mathbb{R}$：

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \text{ ， } x>0 \text{ ，}$$

並以其逆函數來定義指數函數 $y=e^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$，其優點是不用以極限來定義冪函數，且容易導出微分及種種特性，詳情可參閱附錄二。

總的來說，引入指數和對數函數，附錄一介紹的方法雖然有點繁複，但能緊扣學生的經驗，易於為學生所接受。附錄二所討論的方法則比較抽象，雖然手法很乾淨利落，但微積分基本定理是關鍵的一步，學生並不容易掌握當中真義！至於利用無窮級數作引入，則最為困難，主要是中學生對無窮級數的認識不足，故不建議採用。當然，教師還有很多「變招」與「方法」。這裏並沒有提及，建議採用與否，最重要的是看教師能否讓學生理解當中的數學內涵，並自圓其說。

對於指數函數 $y=e^x$ 及 $y=\ln x$ 在複利計算、人口增長及放射衰變中的應用，均是熟知的標準課題，在此不贅。

值得注意的是，在應用函數模型：$y=kx^n$ 或 $y=ka^x$ 於實際情況時，往往需要以實驗的方法，從搜集得來有關的 x 及 y 數據，決定 k 及 n(前者)，或 k 及 a(後者)的數值。這都可以通過

指數的變換進行。前者，在兩方取自然對數（設： $y,x,k>0$，否則，可應用如 $(-y)=(-k)x^n$ 的方式再取對數），得 $\ln y=\ln(kx^n)=n\ln x+\ln k$，這是 $(\ln x,\ \ln y)$ 平面上以 n 為斜率，$\ln k$ 為 y 軸截距的直線方程，由 $(x,\ y)$ 可知 $(\ln x,\ \ln y)$，再由數據決定 n 及 $\ln k$ 的數值，亦即 n 及 k 的數值。同理（設： $a,k>0$， $a\neq 1$），在後者兩方取自然對數，得 $\ln y=\ln(ka^x)=(\ln a)x+\ln k$，這是 $(x,\ln y)$ 平面上以 $\ln a$ 為斜率，$\ln k$ 為 y 軸截距的直線方程，由 (x,y) 知 $(x,\ln y)$，再由數據決定 $\ln a$ 及 $\ln k$ 的數值，亦即 a 及 k 的數值。因為我們對尋找通過數據的「最佳直線」方程，所知甚多，故以上的方法，對實際的應用，甚具價值。學生熟習這種確定數學模型中參數的技巧，對日後的發展，十分重要。

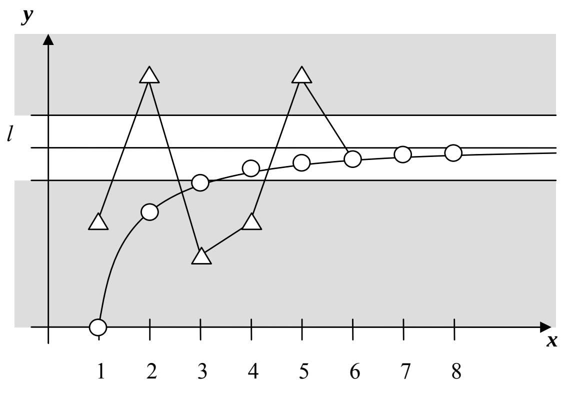
相關網站：

e 的簡述

http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_e/index.html

7. 極限

極限的引入通常有三個方向，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$、$\lim_{x\to a} f(x)$和$\lim_{n\to\infty} a_n$。由於學生大部份曾接觸的函數均是連續，故此除非引用很「怪誕」的函數（如$y = x\sin\frac{1}{x}$之類），否則$\lim_{x\to a} f(x)$均是$f(a)$。故此用$\lim_{x\to a} f(x)$引入極限比較突兀。先以$\lim_{x\to\infty} f(x)$引入極限的概念。再轉到$\lim_{x\to a} f(x)$，然後再引進連續的定義可能比較自然。我們可以利用「最終趨勢」（eventually tendency）的觀念指出若$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$，$f(x)$，當$x$足夠大時，會「縮進」$l$的左近（隣域），而這些不受前面的數值影響（若以$a_n$而言，那怕你改動前 1000 個$a_n$，也不會影響其極限）。

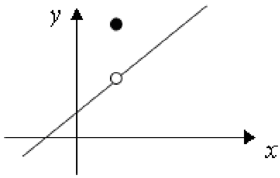


○：$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

△：改動前面數值不會影響極限

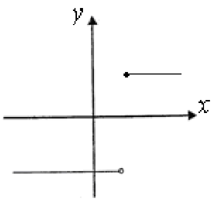
至於$|x|$、sgn(x)等之引入，自然是要利用非連續函數的「非常例子」建構連續的概念。雖然在數量上，非連續函數比連續函數多得多，但對於學生而言，曾經接觸到的非連續函數可以說是絕無僅有。故此引入$|x|$、sgn(x)等可能會有人工化之嫌。我們也許轉一個彎，先看看如果是非連續會出現甚麼情況，可以是「有洞」(所謂「可取代的不連續」－replaceable discontinuity：$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ 但不等於 $f(a)$)；「落差」(jump：$\lim_{x\to a^+} f(x)$、$\lim_{x\to a^-} f(x)$均存在但 $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$) 或不斷振盪(所謂「實質不連續」－ essential discontinuity：$\lim_{x\to a^+} f(x)$ 或 $\lim_{x\to a^-} f(x)$不存在)。當然我們不必介紹這些名稱的分類法，但從這個入手點再引進$|x|$、sgn(x)等可能更合理一點。

(i)



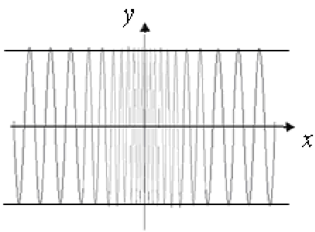
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{當} x \neq 1 \\ 4 & \text{當} x = 1 \end{cases}$$

(ii)



$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{當} x \geq 1 \\ -2 & \text{當} x < 1 \end{cases}$$

(iii)

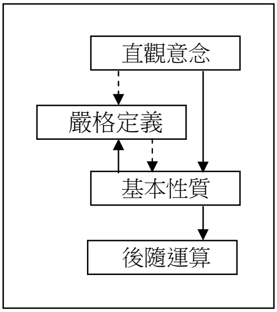


$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{當} x = 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} & \text{當} x \neq 0 \end{cases}$$

老師的其中一個疑惑是我們不介紹極限的嚴格定義怎樣

可以推導出各種性質？馮振業與黃毅英[12]便提出，先以直觀意念（配以圖像）得出一些基本性質的想法如下：

設 $k,l,m\in\mathbb{R}$，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ 、 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ 均存在，其中 $a\in\mathbb{R}$ 或 $a=\pm\infty$ 則



（a） $\lim\limits_{x\to a} k=k$ ；

（b） $\lim\limits_{x\to a} kf(x)$ 存在，且為 kl ；

（c） $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 存在，且為 $l\pm m$ ；

（d） $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ 存在，且為 lm ；

（e） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且為 $\dfrac{l}{m}$，其中 $m\neq 0$ ；

（f） 若 $l=m$ 並在 a 鄰近有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$ ，則 $\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ （「三文治原理」）；

（g） 對於正有理數 a ， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^a}=0$ 。

之後便可按照這些基本性質，作出其他推導的運算。

相關網站：

極限簡介

(a) http://www.edp.ust.hk/previous/math/history/5/5_6/5_6_3.htm

(b) http://math.ntut.edu.tw/file/upload/chap1.pdf

(c) http://webcai.math.fcu.edu.tw/calculus/calculus_html/2-2/Limit.htm

(d) http://ind.ntou.edu.tw/~metex/ch2.pdf

12 馮振業、黃毅英（1997）。極限的故事。《課程論壇》7 期，102－105。

8. 求導法

求導法於技術層面並不困難，因為微分比積分「幸運」。透過加法、積、商等法則，不少複雜函數的導數均可「拆開來」求導。再透過鏈式法則，可以「拆括號」。

教師還需注意學生經常犯的「小毛病」，例如在應用「積法則」求導時，學生會否粗心大意的忘記了把乘積中的某一個函數微分；又或在應用「商法則」時，把分子和分母的微分次序弄錯了。提醒學生，以免他們「因小失大」是重要的！此外，有些鏈式法則的記號是十分容易令學生混淆的，例如把鏈式法則寫成：

$\dfrac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$。等式右方在 $g'(x)$ 的「 ' 」是表示對變量 x 作微分，而 $f'(g(x))$ 中的「 ' 」則表示對 $f(y)$ 中的變量 y 先作微分，然後再以 $y=g(x)$ 代入所得的結果中。因此，應用繁瑣一點的寫法 $\dfrac{d}{dx}f(g(x))=f'(y)|_{y=g(x)}\ g'(x)$ 還是較為合適的。另一方面，上式正是「拆括號」的精義所在：左式表示要「進」括號內取 x 的微分，方法正如右式所言，先對 $f(y)$ 中的變量 y 先作微分，再以 $y=g(x)$ 代入；同時微分便進入了括號中，作用於 $g(x)$，所得的數式，就像「鎖鏈」般與 $f'(y)|_{y=g(x)}$ 相扣（乘）着！

順帶一提，雖然學生學過二項展式，要應用它從定義出發去證明導數的非負整數冪法則：$\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ 原非難事，但卻不若應用積法則與數學歸納法（讓學生應用這重要的數學

事實，絕對能使他們得益）的證明來得簡單直接。

相關網站：

求導法簡介

http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v16/10LeungCK_diff.pdf

9. 求導法的應用

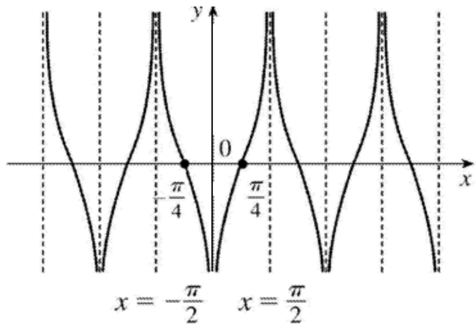
了解求導法之定義及其歷史根源，其應用可以不說自明。不過現時較多集中於求切線，至於變率（rate of change）等較少討論。

至於描繪曲線（包括極大值和極小值的計算），其實有許多討論空間，不必很快的化成機械化的操作。

首先現時電腦軟件這麼方便，何以要費這麼多的功夫去描繪曲線呢？這要牽涉到描繪與逐點繪畫（plot）的分別。逐點繪畫雖然很準確，卻很多時候不如曲線描繪能給出整體圖像。

曲線描繪亦牽涉到微積分與解析幾何的關係。傳統上，高中數學會包括代數、三角、解析幾何和微積分等。現時單元二沒有解析幾何。當然其中一個原因是解析幾何在必修部分已經出現。不過其實有一個觀點認為微積分的學習可以取代了解析幾何的學習。特別是圓錐曲線的探究（甚至有人認為圓錐曲線的學習只不過是基於一些歷史原因，因為古希臘人欣賞圓錐曲線之美）。無論如何，曲線描繪能讓學生跳到一個通則的層面，利用微積分看一般曲線的特性。故此除了逐點去考察曲線的對稱性，截距等，其實可讓學生先作一般性的探討，以增強其觀察能力，例如

$y = \ln(\tan^2 x)$



一望而知 $f(x) = \ln(\tan^2 x)$ 與 $\tan x$ 一樣是周期函數，並有周期 π 於 $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$。它是偶函數，因為 $f(-x) = \ln(\tan^2(-x))$ $= \ln(\tan^2 x) = f(x)$，故圖像 $y = f(x)$ 以 y 軸為對稱軸，且有垂直漸近線 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 和 $x = 0$。雖然某些特徵不在課程注釋所列出之數點內，但我們卻不會說課程不夠完備。相反，我們要提出的是我們不應墨守成規，在處理問題時不一定要樣板化的逐條核對！

此外，猶如過往純粹數學科的考試報告中指出，考生常常犯極大值就是「$f'(x) = 0,\quad f''(x) < 0$」等毛病。其實極大／小值不一定可導。以往考卷中經常出現。$y = |x|$ 等便是一些關於極大／小值非可導的例子。

又有些學生誤以為 $f''(x) = 0$ 就一定是拐點，但 $f(x) = x^4$ 有 $f'(0) = f''(0) = 0$，然而 0 並非拐點。

一般而言，若 $f^{(r)}(x) = 0\ (1 < r < k)$ 而 $f^{(k)}(x) \neq 0$，而若 k 是奇數，則 x 是一拐點。不過這只是充份條件而非必要條件，

一函數的拐點甚至可以不能二次可導。1987 年高級程度考試純粹數學科卷 2 第 7 題的 $f(x)=\frac{x|x|(x+7)}{x-1}$ 就是了。又例如 1986 年高級程度考試純粹數學科卷 2 第 6 題 $f(x)=x^3-3x^2+4$，其拐點應沒有 $f'(x)=0$。

以定義而言，拐點是在一個順滑（smooth，即可導）函數中之一點，其切線不只接觸其曲線，且跨越（cross）之[13]。

相關網站：

1. 例子

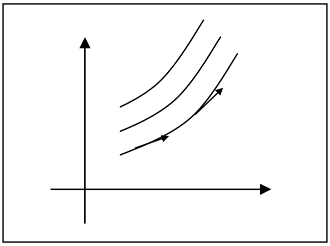
   http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/differentiation.pdf

2. 錐術

   http://www.chiculture.net/0803/html/c71/0803c71.html

13 Wong, N. Y. (1989). Points of inflection. *Mathematics Bulletin, 18*, 19.

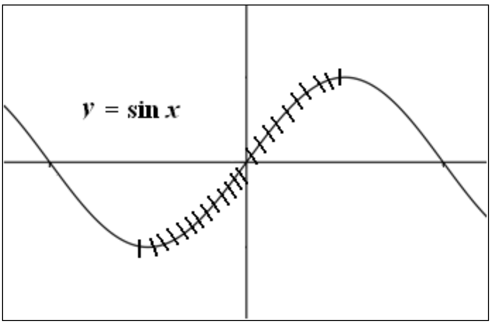
10. 不定積分法

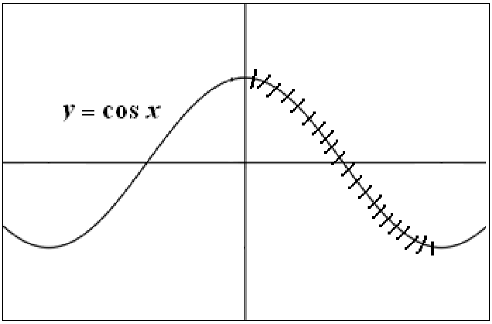


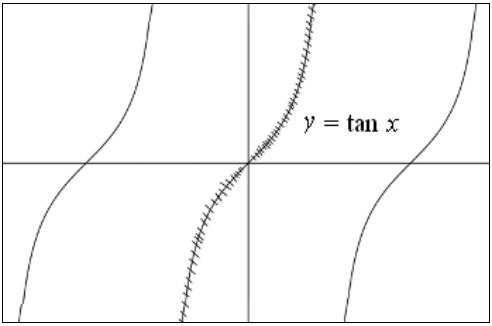
不定積分法之理念也相對簡單。在介紹它是求導法的逆之同時，也可指出當一個函數知道它的趨勢（導數）時，就可「復原」函數本身。當然這有無限個可能，不過這些可能均只有常數差。在圖像來說，是垂直的平移。

如上所述，積分的運算沒有如導數般有求和、積、商的方便法則，故此較難，一般只能逐類逐類的計算。學習上亦如是，亦可提醒學生某一些積分至今亦未能計出。

至於 $\sin^{-1} x$ 和 $\tan^{-1} x$ 的主值，一些學生只靠死記，其實道理很簡單，均是找一個包括原點 0 值連續的一段就是了。







分部積分法其實來自導數的積法則，即若 $u(x)$是 $w(x)$的原函數（primitive function），$\int vwdx = \int vdu = uv - \int udv = uv - \int u\frac{dv}{dx}dx$。所以，計算$\int v\frac{du}{dx}dx$可被$\int u\frac{dv}{dx}dx$取代。若 v 是多項式（或其他簡單的$\frac{dv}{dx}$），變成$\int u\frac{dv}{dx}dx$更易於計算，因為在經過重覆微分後 v 會消失。故我們可利用分部積分法（integration by parts）把$\int f(x)g(x)dx$ 變成 $\int f(x)d(G(x))$ 或 $\int g(x)d(F(x))$，更可以用$\int f(x)g(x)dx$自己本身（設 $u(x) = f(x)\ g(x)$和 $v(x) = x$）。這雖然看似複雜，但一般學生遇到的數題主要是$\int f(x)g(x)dx$的形式。故此只有兩個可能性，其一是嘗試將 $f(x)$「搬進」「d」

內，即$\int f(x)g(x)dx=\int g(x)dF(x)$。另外一個是什麼也不放進去，直接處理。

例如計算$\int x^2\ln xdx$有兩個「搬進去」的選擇。第一個「搬進去」的選擇是將$\ln x$「搬進去」，得$\int x^3 d[(\ln x)^2]$，隨後的積分更難處理。第二個較容易的方法是把 x^2「搬進去」得出$\int \ln xd(x^3)$。雖然 x^3 的次數（degree）比 x^2 高，但經過分部積分後，ln x 變成$\frac{1}{x}$，故

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \ln xdx &= \frac{1}{3}\int \ln xd(x^3) \\
&= \frac{1}{3}[x^3 \ln x - \int x^2 dx] \\
&= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C\text{。}
\end{aligned}
$$

什麼都不「搬進去」，直接處理，得出來看似不容易處理的積分$\int (2x^2\ln x + x^2)dx$，但仍然可得出答案。

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \ln xdx &= x^3 \ln x - \int xd(x^2 \ln x) \\
&= x^3 \ln x - \int x(2x\ln x + x^2 . \frac{1}{x})dx \\
&= x^3 \ln x - \int (2x^2 \ln x + x^2)dx \\
\int x^2 \ln xdx &= x^3 \ln x - 2\int x^2 \ln xdx - \int x^2 dx \\
3\int x^2 \ln xdx &= x^3 \ln x - \int x^2 dx \\
\int x^2 \ln xdx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C
\end{aligned}
$$

相關網站：

不定積簡介

(a) http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_integral/index.html

(b) http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_2_07/index.html

11. 定積分

雖然課程要求介紹微積分基本定理，學生可能有以下疑惑：

（一） 為什麼突然那麼有興趣研究小片面積的和？

（二） 何以黎曼和（定積分）與導數的逆（不定積分）有關？

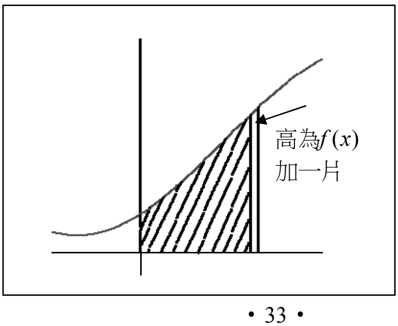
這正正是由於（二），我們才可動用所有不定積分的技巧計算定積分，即

（i） 當 $f(x)$ 為黎曼可積時而 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函數，即 $F'(x)=f(x)$，有 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$ 而不必計算複雜的求無窮級數的和：

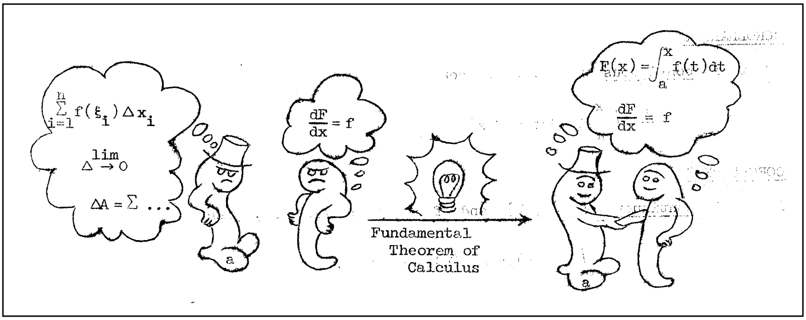
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n} f(x_r)\Delta x_r$$

當然微積分基本定理不容易作出證明（在歷史上，I. Barrow：1630 – 1677 雖然有此揣測，但也要等到其學生 I. Newton 才能證出）。此外，即使不知道原函數 $F(x)$是否存在，我們仍可證明 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 x 的連續函數，即 $\lim\limits_{x\to x_o} G(x) = \lim\limits_{x\to x_o}\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt = G(x_0)$。

（ii）若 $f(x)$是一連續函數時則黎曼和與 $f(x)$有更深一層的關係。以圖像來說，$y=f(x)$ 底下的面積的增加率可以看成再加上一片 $f(x)$。故此 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$，



亦即 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的原函數。



（取自蕭文強教授 1978 年香港大學數學系一年班「基礎數學」講義，謹此致謝。）

在討論關於 $\int_a^b f(x)$ 的性質時，可以提醒學生不一定 $b\geq a$。對於 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 也沒有說過 $a\leq c\leq b$。這就是其中微妙之處，這些性質有不少圖像表示（包括奇函數與偶函數）。但與此同時，學生又應會得跳出圖像的直觀以代數（符號）方式考慮問題。

定積分故然有不少應用，因為不涉及求表面面積，求面積與體積的公式均與直觀吻合，故不應太困難。

函數的對稱性，對定積分的計算，十分重要，例如，當 f 為連續函數，a 為一固定實數時，以下的運算技巧是經常用到的：

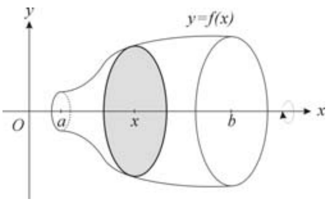
(a) 若 f 為奇函數，即對所有 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(-x)=-f(x)$，則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$；

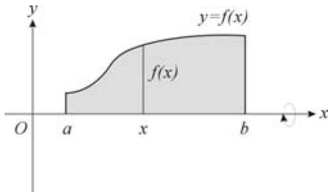
(b) 若 f 為偶函數，即對所有 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(-x)=f(x)$，則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

(c) 若 f 是以 ω 為週期的週期函數（periodic function），即對所有 $x \in \mathbb{R}$，有 $f(x+\omega)=f(x)$，則 $\int_a^{a+\omega} f(x)dx = \int_0^{\omega} f(x)dx$。

以上事實，可利用適當的變量代換，加以證明。很多時候，繪畫函數的圖像，對幫助學生理解如何找出合適變量代換，是非常有幫助的！

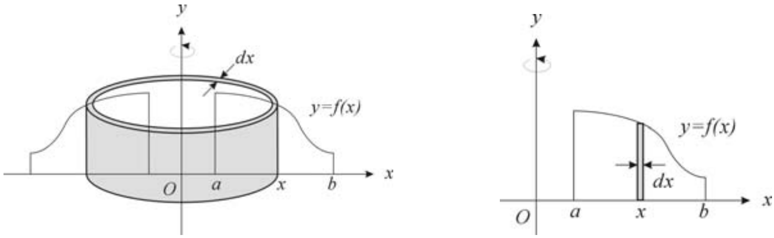
還有一點值得注意的是如何應用定積分，計算繞固定坐標軸旋轉的旋轉體體積。最為熟知的是應用圓盤法（disc method），意即垂直於旋轉軸，如下圖所示，可先從 a 到 b，將旋轉體近似地看成是由半徑為 $f(x)$，厚度為 Δx，體積為 $\pi[f(x)]^2\Delta x$ 的圓盤所拼合而成的。





當 $\Delta x \to 0$，在 $[f(x)]^2$ 為可積的情況下，應用定積分的原理，旋轉體體積 V 可以表示成：$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$，再進行計算。

然而，有時些時候，應用外殼法（shell method）計算旋轉體體積會更為簡便快捷。例如，由下圖所示，把繞 y-軸旋轉的旋轉體，近似地看成一系列以 y-軸為中心，連續變化的，半徑為 x（x 在區間 $[a,b]$ 中取值），高度為 $f(x)$，厚度為 Δx，體積為 $2\pi x f(x)\Delta x$ 的「空心」圓柱（殼）的拼合：



當 $\Delta x \to 0$，在 $xf(x)$ 為可積的情況下，應用定積分的原理，旋轉體體積 V 可用下列等式表示：

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx\text{。}$$

細心思考一下，當 $a = 0$，$b = \pi/4$，$f(x) = \sin(x^2)$ 的情況，便可領略到當中的奧妙之處。

12. 行列式

行列式可以直接地引入，但這樣介紹比較「抽離處境」（out of context）。學生在不明白行列式何以如此定義和為何要有行列式時，會覺得它只是一種數學家攪出來的遊戲。

行列式（determinant）與矩陣的逆有密切的關係（determine whether a matrix is singular）。若我們先介紹矩陣，在 2×2 的情況下很容易用解聯立方程得到有逆矩陣的充分條件：

$$(*)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\#)\begin{cases} aw+by=1 \text{ ——— ①} \\ ax+bz=0 \text{ ——— ②} \\ cw+dy=0 \text{ ——— ③} \\ cx+dz=1 \text{ ——— ④} \end{cases}$$

d①－b③：$(ad-bc)w=d$

d②－b④：$(ad-bc)x=-b$

a③－c①：$(ad-bc)y=-c$

a④－c②：$(ad-bc)z=a$

除非 $a=b=c=d=0$（其時更不可能有（*）成立），（#）有解的充要條件是 $ad-bc\neq 0$，而 $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}=\dfrac{1}{ad-cd}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。從這個出發點（當然不是推導）。我們即可引入三階行列式的定義。由這些定義容易得出相關的性質。

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

亦可同時介紹日本數學家關孝和在行列式的貢獻（首先於1638年為行列式定型）。關孝和在他1683年的著作《解伏題之法》（即解行列式問題的方法）中對行列式的概念和展開已經有清楚的敘述。1693年萊布尼茲在研究線性方程組的解法時，開始使用指標數的系統集合來表示方程組的係數到現在稱為的一個行列式。而行列式早期的工作大都是為了研究方程組，以求得緊湊簡單的表達式。

相關網站：

1. 行列式定義與性質
   (a) http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F
   (b) http://www.tngs.tn.edu.tw/teaching/math/research/determine.pdf
   (c) http://jxjy.ecust.edu.cn/jpkc/xxds/2.pdf
2. 歷史
   http://www.edp.ust.hk/previous/math/history/5/5_3/5_3_30.htm
3. 計算機程式
   http://lpl.hkcampus.net/~lpl-wwk/Casio50/Determinant%20and%20Ajoint%20of%203x3%20matrix%202.htm
4. 有趣問題
   (a) http://w3.cmgsh.tp.edu.tw/~math/03.doc
   (b) http://www.chiculture.net/0803/html/c55/0803c55.html

5. 有關關孝和的資料

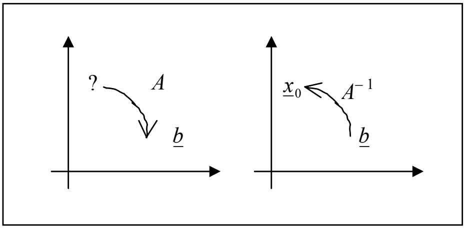
   (a) http://203.68.20.65/science/content/1987/00020206/0015.htm
   (b) http://episte.math.ntu.edu.tw/people/p_seki/index.html
   (c) http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol3no2b.htm
   (d) http://www.cnmaths.com/zttj/Print.asp?ArticleID=51

13. 矩陣

為何要引入矩陣定義又是一個要考慮的問題，較自然的方法是透過聯立方程組或線性變換，也可以一提《九章算經》第八章「方程」正正是用方程組的增廣矩陣（augmented matrix）去表示方程組。而幾何變換與聯立方程組不是一而二、二而一的事嗎？箇中想法其實相當巧妙。

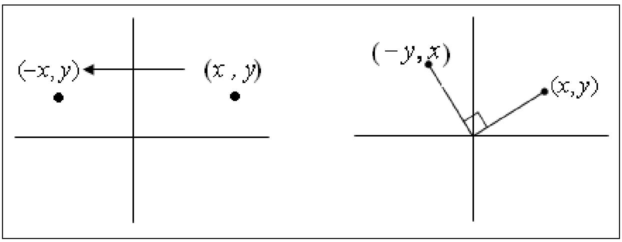
考慮聯立方程組

$$A\underline{x} = \underline{b}$$



A 可看成一個線性變換。現時要問，甚麼的 $\underline{x}_0$ 會在 A 的變換下會走到 $\underline{b}$？若 A 可逆，我們只須把整個空間（無論是 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{R}^n$）作逆變換 A^{-1}，看看 $\underline{b}$ 走到那裡就是了！

故此我們仍覺得用線性變換引入矩陣比較自然。反正在新課程中，線性變換在初中經已出現。我們可以把反射和旋轉等「縮寫」為 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\ y\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$。



用這個方式引入矩陣，再作正式之定義。

因為學生在常見的 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中，有 $ab=ba$，縱使有 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，我們還需解釋，當 $n\neq m$ 時，$n\times m$ 不可能有逆矩陣。

建議課堂活動：圖形變換

活動目標：　加深學生對矩陣運算、概念的認識。

活動內容：　學生設計不同的矩陣，使得圖形造出不同的變換，例如平移、反射等等。

相關網站：

1.矩陣簡介

(a) http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%9F%A9%E9%99%A3%E7%90%86%E8%AB%96

(b) http://www.edb.gov.hk/FileManager/TC/Content_4687/matrix.pdf

2. 學生常犯問題

http://library.ksvs.kh.edu.tw/ksvs%20paper/7/file/12.pdf

14. 線性方程組

課程中提出以克萊瑪法則[14]、逆矩陣和高斯消去法解聯立二元和三元線性方程組。這往往是學生覺得混淆之處，不少學生會覺得，用傳統之代入法最為方便，何必要學其他種種方法。這正正是本課可以發揮之處，就是從較高層面比較各方法之優劣，布魯姆課程目標之最高層次：評鑑（evaluation）。

首先傳統之代入法，高斯消去法（以至將增廣矩陣化成梯矩陣）可以說是一而二、二而一的事（不過梯矩陣更為廣義，可處理 n 個變數 m 條方程，其中 m 不一定等於 n）。只是大家的表示方式不同吧了。也可以說，利用高斯消去法是傳統代入法，只不過在書寫時把各元（x, y, z）省去。

此外，我們要考慮我們之目標是要求解還是堪察方程組的性質。若果求解而各係數等均是數值，以上消去法已能解決一切。對學生也較親和，用不著學克萊瑪法則或逆矩陣。若輔以電腦（或 Derive®等軟件），又或將來面對 $n \times n$ 方程組（$n = 4, 5, \ldots$），逆矩陣是較方便的。

其次當我們遇到形如以下的問題時，（即考察解的性質而非直接求解）消去法就不能派用場。

---

14 其證明可見 Campbell, H. G. (1965). *An introduction to matrices, vectors and linear programming*. New York: Appleton – Centary – Crofts. 中譯：楊獻（1968 / 1972）（譯）。《矩陣、向量與線性計劃》。香港：桃園出版社。或 Wong, N. Y. (1993). A. Level Pure Mathematics, Chapter 4: System of linear quations. (pp. 99－122). Hong Kong: Macmillan.

●證明當 k ≠ 0 時，$\begin{cases} 34x+56y+3kz=324 \\ 12x+11y+kz=120 \\ 10x+24y+kz=120 \end{cases}$ 有唯一解。

●求 $\begin{cases} x+2y+(k+1)z=0 \\ 2x-3y+(k-1)z=0 \\ -x+y+kz=0 \end{cases}$ 何時有唯一解?

●求 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ky+z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$ 何時有唯一解?

克萊瑪法則雖較方便，但它涉及的條件並非充份。例如 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \\ 4x+5y+6z=2 \end{cases}$ 有無限解，$\begin{cases} x+0y+3z=0 \\ 0x+0y+0z=1 \\ 2x+0y+6z=0 \end{cases}$ 沒有解，然而它們的Δ、Δ_1、Δ_2、Δ_3 均為 0，而逆矩陣更有著上面所說的美妙圖樣表示[15]。

建議課堂活動：數學魔術

活動目標： 學生透過解釋魔術的結果明白消去法解方程的原理，並能把此活動延伸，知道不同的紅牌和黑牌數目、第一和第二排牌的數目的關係。

活動內容： 從紙牌上拿出九張紅牌及九張黑牌，洗牌後將紙牌排成兩行。第一排要排七張，而第二排要排十一張。排好後在每排紙牌中任意選一張牌互換位置，結果必定是長排中的黑色牌都會比短排的紅色牌多出兩張，而且長排

15 取材自 Wong, N. Y. (1993). *A. Level Pure Mathematics Volume 1* (Chapter 4: ystem of linear equations: pp. 99－122). Hong Kong: Macmillan.

的紅色牌也會比短排的黑色牌多出兩張。

相關網站：

1. 教材套

http://www.math.tku.edu.tw/~chinmei/Ulinear/index.htm

2. 簡介

(a) http://www.math.tku.edu.tw/~chinmei/Ulinear/PDF/1-1.pdf

(b) http://saturn.stu.edu.tw/~ckhung/b/la/gje.php

(c) http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BB%A3%E6%95%B0

3. 線性方程組的深入討論

(a) http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/episte/episte.phtml?m_id=19405

(b) http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/episte/episte.phtml?m_id=19208

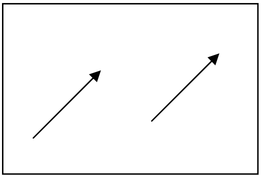
4. 有趣問題

(a) http://www.chiculture.net/0803/html/c61/0803c61.html

(b) http://www.chiculture.net/0803/html/c62/0803c62.html

(c) http://www.chiculture.net/0803/html/c63/0803c63.html

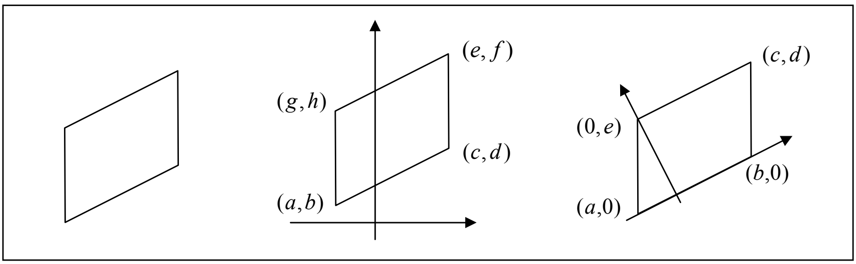
15. 向量的簡介



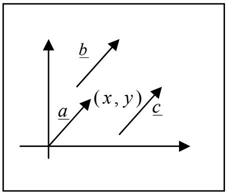
利用物理的概念如力、位移（displacement）自然是最佳引入向量之方法，向量的性質（$\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a}$等）也容易得到解釋（其實是反過來，由物理概念「數學化」、設基化而形成向量的體系—建模—再運用到其他概念來）。

學生一個常混淆的觀念是自由向量與位置向量的分別。這其實與平面幾何及坐標幾何的關係息息相關。首先學生要明白在平面幾何（及自由向量）中，位置不重要，兩個全等三角形位置雖然不同，幾何上以之為「相等」，故此圖中之兩個向量完全相等。

其次，坐標只為「後加」的對照框架，舉一個例，假設要用坐標幾何證明平行四邊形對邊長度相等。我們有權設定自己認為方便的坐標系統去求證。所以，除非及早說明由於某種原因坐標系統經已設定（例如題目規定），否則坐標系統「只是」一種方便我們的「命名（labeling）系統」，就好像西元 2007 年是「民國九十六年」、「佛曆 2051 年」或「藏曆 2134 年」等等。



在有坐標的情況下，$\underset{\sim}{a}$，$\underset{\sim}{b}$，$\underset{\sim}{c}$ 三枝向量相等的事實沒有改變，但由於我們統一以（0,0）作起點，$\underset{\sim}{a}$ 便成為 $\underset{\sim}{b}$，$\underset{\sim}{c}$ 等的「總代表」，名為 $x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}$。

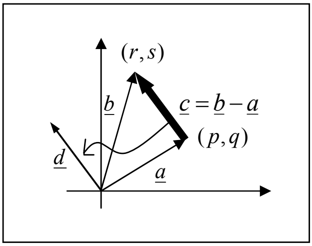


以向量之減法而言，圖中若

$$\underset{\sim}{a}=p\underset{\sim}{i}+q\underset{\sim}{j}$$

$$\underset{\sim}{b}=r\underset{\sim}{i}+s\underset{\sim}{j}$$

以圖顯示，$\underset{\sim}{b}-\underset{\sim}{a}$確是圖中粗線的向量$\underset{\sim}{c}$，但由於要以（0,0）作出發點的向量作「總代表」，故此 $\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{d}=(r-p)\underset{\sim}{i}+(s-q)\underset{\sim}{j}$。



這就解釋了自由向量與位置向量之關係。

當然另一個問題是關於向量與矩陣間之關係。不少書籍將$a\underset{\sim}{i}+b\underset{\sim}{j}$寫成$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。甚至在處理一些幾何問題(如線性變換時)也將兩者交替使用(因為若將$a\underset{\sim}{i}+b\underset{\sim}{j}$進行旋轉，理論上不能將$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$乘以$(a\underset{\sim}{i}+b\underset{\sim}{j})$，而是$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$)。這正正要學生漸感受到不少數學對象（mathematical object）均設有所謂實質意義（反正整個向量系統、解幾系統與矩陣系統都是人工拓建的—克羅內克（L. Kronecker, 1823－1891）的名言：「上帝創造自然數，其他一切都是人為」！），它們都是一種建模，一種表示法。這是一個很重要的數學思維。

縱使我們不介紹上面的想法，也當然不必提出線性空間

這個名稱，但其實可以讓學生看到 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}$、$n \times n$ 矩陣及向量的共通性。一來都適合同一組性質（線性空間性質），而在某意義上，可以交替應用。這不只避免學生看似學了很多零散的代數系統，而事實上，在單元二學習單位 17 中，學生正正要在幾何對象和向量對象中交替工作。

相關網站：

1. 定義

   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%90%91%E9%87%8F%E7%A9%BA%E97%B4

2. 範例

   http://hk.geocities.com/certmath/vector/c72.pdf

3. IT 工具

   http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=BKF1AE9517.1&lang=&cmd=reply&module=tool%2Flinear%2Fvector.cn&show=yes&v1=2=&calc=lindep&combi=v1%2Bv2&pros1=1&pros2=2&prov1=prov2=2&objs=2

16. 純量積與向量積

一些人會誤以為既然向量是「人工物」，積就可以「隨便」的定義（參看必修部分「指數及對數函數」一節中關於定義 a^0 的討論）。但翻查向量的歷史[16]便知道純量積與向量積大致上是對照物理學上力、速度、電、磁等觀念發展起來，故此有兩個積一點也不怪，因為它們完全有物理學上的，亦有其他（如幾何上）的詮釋。

首先純量積的做法與矩陣積一致。此外，它有著幾何上的原因，在 $\mathbb{R}^n$ 中若只考慮線性空間的性質暫時「只有代數、沒有幾何」（即未能有角的觀念），一個線性空間若添加了純量積的運算，則可以將角定義起來（就是 $\cos\theta = \dfrac{|\underline{a} \cdot \underline{b}|}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ [17]）。

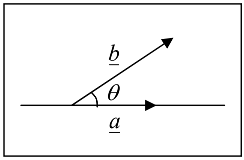
純量積是很「怪」的，學生並不常見這積的運算，因為它不封閉，亦即 $\underline{a} \cdot \underline{b}$ 並非向量，純量積是由 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的函數，如以下為 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 的函數：

$$[a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = ad + be + cf$$

16 Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system.* New York : Dover Publisher.
Gibbs, J. W. and Wilson, E. D. (1901). *Vector analysis*. New Haven: Yale University Press.

17 Leung, K. T. (1981). *Linear algebra and geometry*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

純量積有一個物理的解釋，就是計算分量沿一特定方向的分量（resolve in a direction），若 $|\underline{a}|=1$，力 $\underline{b}$ 在 $\underline{a}$ 方向的分量（component）的模是 $|\underline{a}\cdot\underline{b}|$。



當然 $|\underline{a}||\underline{b}|\geq|\underline{a}\cdot\underline{b}|$ 是解釋了何以 $\dfrac{|\underline{a}\cdot\underline{b}|}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$ 定義 $\cos\theta$（若 $\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}>1$，就找不到相關的 θ 了！），$|\underline{a}-\underline{b}|^2=|\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2-2(\underline{a}\cdot\underline{b})$ 是餘弦法則，其中也可引入三角不等式。

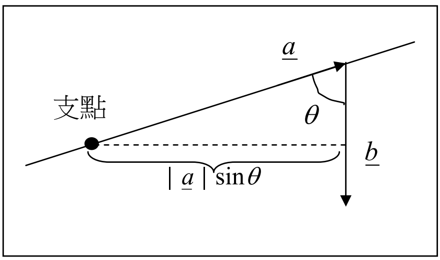
除此以外，純量積還可決定向量之間的垂直性（orthogonality），兩非零的向量 $\underline{A}$ 與 $\underline{B}$ 相互垂直（orthogonal）$\Leftrightarrow\ \underline{A}\cdot\underline{B}=0$。在二維空間中，可通過垂直性來刻劃直線：當直線通過一定點 (x_0,y_0)，且與一固定的非零向量 $\underline{N}=(a,b)$ 垂直時，則這直線的方程便可完全決定。

事實上，考慮平面上一動點 (x,y)，以及它與點 (x_0,y_0) 所成的向量 $\underline{X}=(x-x_0,y-y_0)$，由於 $\underline{X}$ 與 $\underline{N}$ 互相垂直，即：

$$\underline{X}\cdot\underline{N}=0\Leftrightarrow(x-x_0,y-y_0)\cdot(a,b)=0\Leftrightarrow ax+by+c=0$$

其中 $c=-(ax_0+by_0)$。讓學生思考這方法與各種直線表達式的關係，將是一個十分有意義的課題！

向量積的定義則為 $\underline{a}\times\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta\,\hat{c}$，其中 θ 為 $\underline{a}$ 與 $\underline{b}$ 的夾角，向量 $\underline{c}$ 為同時垂直於 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的單位向量，其方向由右手法則決定。它也有一個物理解釋，就是力距（moment），圖中質量 $\underline{b}$ 對 $\underline{a}$ 的力距便是 $\underline{a}\times\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta\,\hat{c}$。

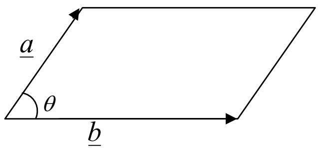


給出兩個向量 $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$和 $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$，可以證明向量積的公式是

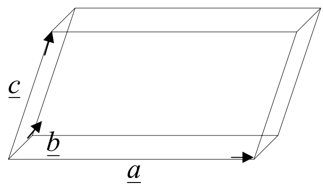
$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)，$$

其中 $\underline{i}=(1, 0, 0)$，$\underline{j}=(0, 1, 0)$，$\underline{k}=(0, 0, 1)$。

$|\underline{a}\times\underline{b}|$亦可看待成 $\underline{a}$ 與 $\underline{b}$ 所形成平行四邊形的面積。



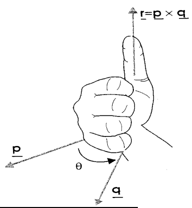
平行四邊形

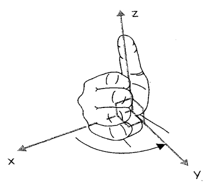


平行六面體

$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$ 三重積（triple product）亦為 $\underline{a}$、$\underline{b}$、$\underline{c}$ 所形成平行六面體（parallelepiped）的體積[18]。亦可利用電、磁、力可給出一些非數學的解釋定義的合理性。

右手法則其實與 x、y、z 三軸之確定有關，詳可參閱蕭文強和與黃必宏的文章[19]。





18 詳見 Armit, A. P. (1968). *Advanced level vectors*. London: Heinemann Educational Book.

19 Siu, M. K., & Wong, P. W. W.(1983). Is the right hand rule a mathematical rule? *Mathematics Bulletin*, 6, 30－34.

相關網站：

1.向量積簡介

(a) http://elearning.stut.edu.tw/mechanical/Statics/newpage23.htm

(b) http://elearning.stut.edu.tw/mechanical/Statics/newpage71.htm

(c) http://www.cyut.edu.tw/~cpyu/oldphweb/chapter3/page3.htm

2.計算機程式

http://waiyuen.mikekong.net/program/vector2.htm

3.練習題

http://www.cksh.tp.edu.tw/~cksite05/HCHAP.2.PDF

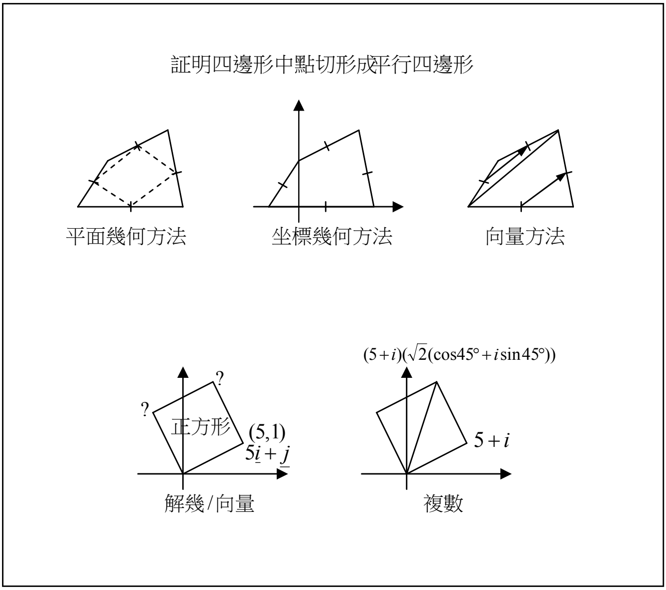
17. 向量的應用

利用向量解幾何問題不一定是方便的，但是可體現一題多解[20]，亦可進一步看到這些體系（$\mathbb{C}$、$\mathbb{R}^2$、……）「只不過」是一些「虛」的框架（數學工具）。

相關網站：

利用向量的例子

http://video.ks.edu.tw/soft/04ani/swift3d/index.htm



20 Wong, N. Y. (1994). Enhancing students' mathematics problem solving ability in day-to-day teaching. *Curriculum Forum, 3*(3), 24－33.

參考書目

<u>一般數學教學</u>

[1] Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words*: *Exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

[2] Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without words II*: *More exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

長久以來，Roger B. Nelsen 是數學教學雜誌、期刊上撰寫 *Proofs without words* 的健筆。以清晰明確、富啟發性的圖像，刺激讀者的幾何思維，是他的專長。見圖識意，*Proofs without words* 令數學的證明變得一目了然！以上兩書，是 Nelsen 多年投稿的精華所在，內容豐富，由三角的複角公式、無窮級數求和、積分不等式以至線性代數的結果均在討論之列。這兩書是數學教育工作者珍貴的教學參考資料。

[3] Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2006). *Math made visual: Creating images for understanding mathematics*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

若說 Nelsen 之前的兩書是出色的「工具書」，則本書可說是指示如何有系统地應用幾何思維，輔助教學的「導讀」。作者系统地介紹如何令數學變得形象化的方法，這對著重理解數學概念，而非追求絕對嚴謹證明的中學數

學教學，是非常有幫助的。

基本概念、向量、矩陣與方程參考

[4] Leung, K. T. & Cheung, P. H. (1988). *Fundamental concepts of mathematics*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

[5] Leung, K. T., Mok, I. A. C. & Suen. S. N. (1992). *Polynomials and equations*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

[6] Leung, K. T. & Suen. S. N. (1994). *Vectors, matrices and geometry*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

這一套三部，專為中六至大一同學悉心編寫的數學教材，是經驗豐富的學者與前線教師緊密合作的成果，亦是認真學習數學同學案頭必備的參考書。閱讀這套書，便會感受到在「高視點」下，高中數學的各個專題是怎樣緊密地關聯著的。作為高中數學教師，要了解課題之間的脈絡與關係，這種專業修養是十分重要的。

[7] Armit, A. P. (1968). *Advanced level vectors*. London: Heinemann Educational Books.

本書是學習高中的向量與二、三維空間幾何的經典入門參考書。它在選材，解說以至習題的編排方面，均屬上乘之選,內容更絕沒有隨成書的年代而給人陳舊的感覺。

特別專題參考

[8] 夏道行（1970）。《π 和 e》。香港：商務印書館。

這是一本出自中國著名數學家之手，內容充實，說理精煉的小書。全書短短的五十多頁，討論了從古到今各種有趣的 π 和 e 求近似值的方法，並簡介了無窮級數的概

念。本書是中學生珍貴的數學課外補充參考資料。

[9] 華羅庚（1972）。《數學歸納法》。香港：商務印書館。

華羅庚此部家喻户曉的小書，是特別為中學生精心編寫的。要看看數學大師如何圍繞這重要的課題，以各種有趣的例子，闡明數學證明的精髓所在，此書是你的不二之選。

微積分的教學

[10] Apostol, T. M. (1967). *Calculus Volume 1*: *One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*. New York: John Wiley and Son.

[11] Spivak, M. (1994). *Calculus*. New York: W. A. Benjamin.

這兩書是經典的大學用書，也是數學教師對微積分定理查證尋根的好幫手。不管是微積分基本定理的證明，又或是精確的指數及對數函數性質的討論，書中均有詳細的交代。

[12] 復旦大學（1976）。《數學分析》。香港：商務印書館。

復旦的數學分析是一部嚴謹的數學著作，雖然它採取的觀點並不能算很「現代」，但書中給出從有理數構作實數的方法，以及它對各極限定理一絲不苟的證明，便足夠使它成為高中數學教師的寶貴參考資料。

[13] Spivak, M. (1995). *The hitchhiker's guide to calculus: A calculus course companion*. Houston, Texas: Polished Pebble Press.

微積分是一大堆計算數學變量的法則嗎？當中的數學意義為何？要怎樣才可理解清楚？微分和積分是公式的同

義詞嗎？初學者往往有以上不易回答的提問。本書嘗試避開令人望而卻步的嚴謹證明，直觀地向初學者闡明微分和積分的正確數學含意，書中的第四至五章，以放大鏡的手法，解釋「微分」是什麼回事，便是一例。對微積分的教學而言，甚有啓示。本書可介紹予學生作參考輔助學習之用。

[14] Adams, C., Hass, J., & Thompson. A. (1998). *How to ace calculus: The streetwise guide*. New York: W.H. Freeman & Company.

（中譯本：亞當斯、湯普森、哈斯（師明睿譯）（2003）。《微積分之屠龍寶刀》。台北：天下遠見出版股份有限公司。）

從書的編排，以及它的名稱猜測，本書似乎是幫助莘莘學子，應付考試的「鷄精書」，事實卻不然。本書是三位熱心教學的「數學人」，就多年微積分教學所得，以學習者的觀點出發，引領他們如何有效的學習微積分、理解當中的概念，並將之應用於實際的解難中，故十分適合學生作參考、學習之用。三位作者不單能突出主題，抓緊重點，詳加闡釋。他們用以解說的「點子」之多，令人佩服，即使經驗豐富的教師，也會在這一部「另類」的作品中，得到啓示。全書三十章，前七章夾雜了一些如「怎樣選擇你的導師」之類的章節，是專為美加等地，剛進大學的同學而寫的。可不要錯過當中的內容，它所描述的，可能正是你任教微積分多年所忽略的東西。

[15] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis (3rd Edition)*. New York: Wiley & Sons.

這書是大學用書，它以嚴謹的分析方法，討論微積分的各種定理與結果，手法深入淺出，是研習高等數學的一本入門好書。教師遇上聰穎過人，對數學深感興趣的「資優生」，不妨推薦作自修之用。

微積分專題研習

[16] Woods, R. G. (1998). *Calculus mysteries and thrillers*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

本書結集了 11 個趣味豐富的微積分的專題習作（projects），可作為學生微積分延伸學習之用。作者用心選材，先鋪排情境，再細意提問，引導學習者進行深入的探究，書末更附有詳細的解答以供參考。本書是以微積分進行專題研習的佳作。

經典高中數學參考書

[17] Tranter, C. J. (1957). *Techniques of mathematical analysis*. London: Edward Arnold.

[18] Gow, M. M. (1960). *A course in pure mathematics*. London: Edward Arnold.

單看這兩書的成書年代，便知道他們的歷史悠久。事實上，在七十至九十年代中期成長的現職數學教師，很多都曾與此二書為伴。兩書的說理精簡明確，習題豐富多樣化，最宜學習者自修、練習之用。雖然書中的章節，很多已不在課程範圍之內，又或略嫌過深，但若教師能從中剪裁合適的內容與習題，作爲教與學的參考材料而善加應用，則學生將會獲益不少。

數學的概念發展

[19] Dunham, W. (1994). *The mathematical universe: An alphabetical journey through the great proofs, problems, and personalities*. New York: Wiley & Sons.

[20] Dunham, W. (1990). *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. New York: Wiley & Sons.

（中譯本：《天才引導的歷程》。北京：中國對外翻譯出版公司，1994。）

Dunham 這兩書，是靡力非凡的數學科普傑作。兩書把數學家的傳奇與逸事、數學史上的成果與突破，為你娓娓道來。要在數學課堂上加插精采、動聽但又具有內涵的數學歷史故事，翻閱這兩書，你將有意想不到的收穫。

[21] Dunham, W. (1999). *Euler: The master of us all*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Dunham 非常用心去描寫 Euler 的數學成就，要知道 *e* 的由來，對數及指數函數的發展，以及許多在中學課程中與 Euler 有關的數學成果，這部深入淺出的著作，是數學教師的絕佳參考。

[22] Maor, E. (1991). *To infinity and beyond: A cultural history of the infinite*. New Jersey: Princeton University Press.

（中譯本：《無窮之旅 — 關於無窮大的文化史》。上海：上海外語教育出版社，2000。）

[23] Maor, E. (1994). *e: The story of a number*. New Jersey: Princeton University Press.

（中譯本：《毛起來說 e》。台北：天下遠見出版股份有限公司，2000。）

[24] Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. New Jersey: Princeton University Press..

（中譯本：《毛起來說三角》。台北：天下遠見出版股份有限公司，2000。）

Maor 這三部流傳甚廣的著作，是普及數學中的精品，作者既能將數學的流變與發展，清晰地展現在讀者的眼前；亦能突顯當中數學家與數學思維的微妙關係。作者的文筆生動流暢，描寫絲絲入扣，讀之，令人有愛不釋卷的感覺。與 Duham 的著作相比，可謂各有千秋！

[25] Nahin, P. J (1998). *An imaginary tale: The story of* $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton University Press.

歷史上，$\sqrt{-1}$ 不是由求解二次方程 $x^2+1=0$ 而來的。它是從人們試解三次方程所衍生的東西，翻閱本書，便可回味這段有趣的數學歷史，了解這個「由虛而實」的進程，以及往後的種種發展。

附錄一：指數函數e^x性質的論述

就學生的學習經驗而言，如前所闡釋，學生已知e是一正實數，要回應第 14 頁的問題（I），比較自然的想法是從有理數冪的e^r（r為有理數）過渡到實數冪的e^x。這只需要考慮x是無理數的情況便已足夠。

由於無理數x可以寫成無限非循環的十進制小數，我們可依此選取兩列單調有理數列$\{x^-{}_n\}$及$\{x^+{}_n\}$使得

(i) 對所有的自然數n，$x^-{}_n < x < x^+{}_n$；

(ii) $\{x^-{}_n\}$單調上升，$\{x^+{}_n\}$單調下降；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x^-{}_n = \lim\limits_{n\to\infty} x^+{}_n = x$。

事實上，由x的無限非循環十進制小數表示，我們可用「捨尾法」及「進一法」選取序列：

$x^-{}_n$為x精確至第n位小數的不足近似值；

$x^+{}_n$為x精確至第n位小數的過剩近似值。

例如：$x=\sqrt{2}=1.414213562\ \cdots$ [21]

$\{x^-{}_n\}$為 1.4，1.41，1.414，1.4142， 1.41421，…，↑(單調遞增)

$\{x^+{}_n\}$為 1.5，1.42，1.415，1.4143， 1.41422，…。↓(單調遞減)

---

21 又當$x=-\sqrt{2}=-1.414213562\ \cdots$時

$\{x^-{}_n\}$為 -1.5， -1.42， -1.415， -1.4143， -1.41422，…，

$\{x^+{}_n\}$為 -1.4， -1.41， -1.414， -1.4142， -1.41421，…。

考慮實數數列 $\{e^{x^-{}_n}\}$ 及 $\{e^{x^+{}_n}\}$。由有理序列的單調性，及指數的有理冪性質知：對於所有自然數 n，$e^{x^-{}_1} \le e^{x^-{}_n} < e^{x^+{}_n} \le e^{x^+{}_1}$ 再由實數序列的單調收斂定理得知 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x^-{}_n}$ 及 $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x^+{}_n}$ 存在。考慮有理序列 $\{x^-{}_n\}$ 及 $\{x^+{}_n\}$ 的構作，得 $x^+{}_n - x^-{}_n = 10^{-n}$，從而有

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= \lim_{n\to\infty} e^{x^+{}_n} - \lim_{n\to\infty} e^{x^-{}_n} = \lim_{n\to\infty} e^{x^-{}_n}(e^{x^+{}_n - x^-{}_n} - 1) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{x^-{}_n}(e^{10^{-n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} e^{x^-{}_n} \cdot \lim_{n\to\infty}(e^{10^{-n}} - 1) = \alpha \cdot 0 = 0\end{aligned}$$ [22]

我們定義：

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{x^-{}_n} = \lim_{n\to\infty} e^{x^+{}_n}\ 。$$

由先前的論述，對所有自然數 n，我們有如下不等式成立：

$$e^{x^-{}_n} \le e^x \le e^{x^+{}_n}$$ [23] 。

可再進一步，由此驗證 e^x 的定義與選取的逼近序列無關，以上做法應可滿足（I）的需求。

事實上，可依上述方法，定義以實數 x 為冪的 a^x，$a > 0$，從而，我們可使 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 有確切的意義，並證明：

$$(※) \qquad e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ 。$$

這裡特別要指出，對任意實數 x，在沒有把 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的意義弄清楚以前，用以下步驟去「論證」$x \to \infty$ 的(※)是有欠穩妥的：

22　此處我們應用了熟知的結果：$\lim\limits_{m\to\infty} a^{\frac{1}{m}} = 1, a > 0$，m 為自然數。

23　這對一般以 $a > 1$ 為底的實數成立。若 $0 < a < 1$，則 $a^{x^+{}_n} \le a^x \le a^{x^-{}_n}$

設 $[x]$ 是唯一的整數使得 $[x] \le x < [x]+1$ 成立。考慮 $x \to \infty$ $\Rightarrow [x] \to \infty$，故可選 $1 \le [x]$，使得

$$1 \le [x] \le x < [x]+1 \Rightarrow \frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \Rightarrow 1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{[x]}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

（這其實有欠穩妥者：上式中央的一項未有定義，另外，不等式是否成立仍屬未知！但按照之前的方法定義一般正數的實數冪，則毋須為此擔憂。）

由夾逼定理（Squeezing Theorem），

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)} = e \text{ 及}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = e \text{ 得(※)！}$$

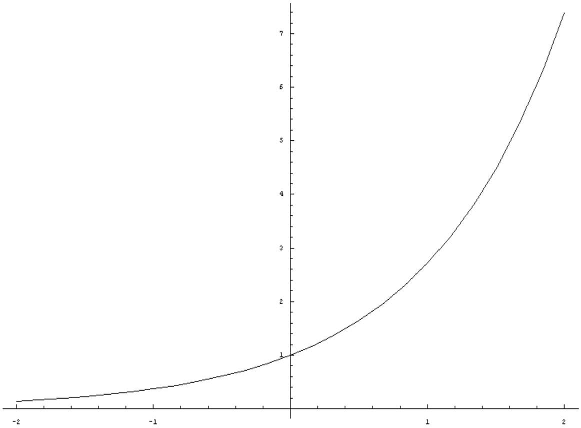
另一方面，還可以考慮 $m=-n$，計算得

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e$$ 。

同樣，還可以證明：$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$。

交代過（I）以後，最後，就第 14 頁的問題（IV）而言，應用所提供有關 e^x 的定義，有理冪 e^r 的指數定律及極限的性質，便可順利推導上述的實數指數定律（1）及（2）成立；還可證明 e^x 對 x 是單調遞增且連續的，並有 $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ 及 $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$，從而得到單調連續的 $y(x)=e^x$ 圖像，以及 $y(x)=e^x : \mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是

雙射（bijective）的。在此，我們不再贅述了。



$y(x)=e^x$ 的圖像

附錄二：引入指數與對數函數的另一方法

本附錄將以黎曼積分為基礎，首先以定積分定義自然對數，證明它所滿足的對數定律。之後，通過考慮自然對數的逆函數，便可獲得以 e 為底的指數函數。我們除了證明指數函數滿足的實數指數定律外，更討論指數與對數函數的微分性質。我們將假定讀者熟知基礎的黎曼積分理論如：連續函數在閉區間上的可積性、定積分對上下限之連續性、以及微積分基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）等標準結果。

自然對數的定義及性質

設 $\mathbb{R}^+$ 為正實數集，函數 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$， $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^+$ 是單調下降且連續的，故此，以下述定積分刻畫之函數有意義。

定義 1　以定積分定義函數 $\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$，使得對 $x\in\mathbb{R}^+$

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad 。$$

此函數稱為自然對數，或在內容清晰的情況下，簡稱為對數。在證明下列定理，細緻地確立 $\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 的基本性質後，函數為什麼要以「對數」為名，便將清楚明白了。

定理 2　以下有關函數 $\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 的命題成立：

（1） $\ln(1)=0$.

（2） 對任意 $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.

（3） 對任意 $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\ln(\dfrac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$.

（4） 對任意 $a \in \mathbb{Q}$ 及 $b \in \mathbb{R}^+, \ln(b^a) = a\ln(b)$.

（5） 函數 ln 是嚴格單調遞增及連續的.

（6） 函數 ln 是滿射（surjective or onto）.

（7） 對任意 $x \in \mathbb{R}^+, \dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$.

證明（1）是明顯的，因為 $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$. 對任意 $a,b \in \mathbb{R}^+$，則由定積分的變量代換得：

$$\begin{aligned}\ln(ab) = \int_1^{ab}\frac{1}{x}dx &= \int_1^{a}\frac{1}{x}dx + \int_a^{ab}\frac{1}{x}dx \\ &= \ln(a) + \int_a^{ab}\frac{1}{x}dx \\ &= \ln(a) + \int_1^{b}\frac{1}{t}dt \text{ ，其中 } x = at \\ &= \ln(a) + \ln(b)\end{aligned}$$

故（2）得證。

應用（2），考慮 $\ln(a) = \ln(\frac{a}{b}\cdot b) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b) \Rightarrow$（3）。

（4）可直接由（1）－（3）推得，只需注意對任意自然數 n，（2）$\Rightarrow \ln(b^n) = n\ln(b)$ 以及 $\ln(b^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(b)$。

要證（5），考慮 $a < b$，其中 $a,b \in \mathbb{R}^+$

$$\ln(b) = \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_a^b \frac{1}{t}dt > \int_1^a \frac{1}{t}dt = \ln(a)$$

故此 ln 是嚴格單調遞增函數，其連續性則是黎曼積分上下限連續性的直接推論。

要證（6），設 n 為正整數，$n>1$，考慮在 $[1,n]$ 上的函數 $y=\dfrac{1}{x}$，由函數嚴格單調遞減的性質知：

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \;\geq\; \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\;+\;1}\int_k^{k+1}dx \;=\; \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

由於 $\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 發散於正無窮，故對於任意 $M\in\mathbb{R}^+$，可找到對應的 n 使得 $\ln(n)>M>0=\ln(1)$。應用連續函數的中間值定理（Intermediate Value Theorem）於 $[1,n]$ 上，知存在 $x\in(1,n)$ 使得 $\ln(x)=M$。再由（1）及（3）知 $\ln(1)=0$ 及 $\ln(\dfrac{1}{x})=-\ln(x)$，從而函數 $\ln:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 為滿射。

最後，因 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 n 為正整數的區間 $[1,n]$ 上連續，故（7）是微積分基本定理的直接結果。定理得證。

由（5）$(\Rightarrow 1-1)$ 及（6）$(\Rightarrow \mathit{onto})$ 知 $\ln:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 為雙射（bijective）的，故其逆函數存在。

<u>定義 3</u>　　定義 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 為函數 $\ln:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 的逆函數。稱此函數為指數函數（exponential function）。

以下定理總結了函數 exp 的幾項重要的性質。

<u>定理 4</u>　　以下有關函數 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 的命題成立：

（1）　設 e 為正實數，使得 $1=\ln(e)$，則對所有自然數 n，有 $\exp(n)=e^n$

（2）　應用（1）中所定義的正實數 e，對所有自然數 n，有 $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{e}$

（3）　對任意 $a,b\in\mathbb{R}$，$\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$

（4） 對任意 $a,b\in\mathbb{R}$， $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

（5） $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$是單調遞增及連續的雙映射（bijective map）

（6） 對任意 $x\in\mathbb{R}$， $\dfrac{d}{dx}\exp(x)=\exp(x)$

（7） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

證明

函數 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$的性質（1）－（5），可由逆函數ln的對應性質直接推得。

由於 $\ln(\exp(x))=x$對所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立，故

$\dfrac{d}{dx}\ln(\exp(x))=1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{\exp(x)}\dfrac{d}{dx}\exp(x)=1$從而（6）得證。

要證（7），由 $\dfrac{d}{dx}\ln(x)=\dfrac{1}{x}$ 知 $\dfrac{d}{dx}\ln(x)\Big|_{x=1}=1$

即 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=1$，

故得：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1 \quad（由極限的性質，當中 h=\frac{1}{n}）$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1 \quad（由 ln的性質）$$

$$\Rightarrow\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=1 \quad（由 ln的連續性）$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad （由\ln的可逆性）$$

故原定理得證。

由定理 2 的（4）知：對 $a \in \mathbb{Q}$ 及 $b \in \mathbb{R}^+$ $b^a = \exp(a\ln(b))$成立。自然地，我們可沿用這樣的方式去定義以一般的，以正實數為底的指數函數：

<u>定義 5</u>　對 $a \in \mathbb{R}$ 及 $b \in \mathbb{R}^+$，定義 b^a 為

(#)
$$b^a = \exp(a\ln(b))$$

這樣，由定義 5，我們看到 $e^x = \exp(x)$對所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立。故我們可視函數 exp 確是以 e 為底的指數函數！由比，交替應用 e^x 與 $\exp(x)$ 記號亦不會導致含混了。另外，容易驗證 $\ln(b^a) = a\ln(b)$亦成立，$\ln x$與 $\log_e x$亦不用再區分了。

應用(#)，函數 exp 及 ln 的性質，我們便可確立以任意 $b \in \mathbb{R}^+$ 為底的實數指數定律：

<u>定理 6</u>

（1）　對任意 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$，$b^{a_1} \times b^{a_2} = b^{a_1+a_2}$

（2）　對任意 $a \in \mathbb{R}$，$\dfrac{1}{b^a} = b^{-a}$

（3）　對任意 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$，$(b^{a_1})^{a_2} = b^{a_1 a_2}$

最後是一般微分公式：

若 $a \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}^+$

(†)
$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}\exp(\alpha\ln(x)) = \exp(\alpha\ln(x)) \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

這跟初學微積分時經常用到的公式 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$，其中 n 為正整數及 $x \in \mathbb{R}$，完全一致！

此外，當底數 $k \in \mathbb{R}^+$ 為固定值，指數 $x \in \mathbb{R}$ 作為變量時的微分公式亦可輕易求得：

$$(\ddagger) \qquad \frac{d}{dx}k^x = \frac{d}{dx}\exp(x\ln(k)) = \exp(x\ln(k)) \times \ln(k) = \ln(k)k^x$$

數學百子櫃系列	作者
（一）漫談數學學與教－新高中數學課程必修部分	張家麟、黃毅英、韓藝詩
（二）漫談數學學與教－新高中數學課程延伸部分單元一	韓藝詩、黃毅英、張家麟
（三）漫談數學學與教－新高中數學課程延伸部分單元二	黃毅英、張家麟、韓藝詩
（四）談天說地話數學	梁子傑
（五）數學的應用：圖像處理－矩陣世紀	陳漢夫
（六）數學的應用：投資組合及市場效率	楊良河
（七）數學的應用：基因及蛋白的分析 （即將出版）	徐國榮