數學百子櫃系列(四)

談天說地話數學

作者 梁子傑

教育局
課程發展處數學教育組

目錄

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始蒐集和編撰一系列的文章，當中包括大學學者及資深老師的著作和講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《談天說地話數學》是這個系列的其中一冊，當中輯錄了梁子傑老師的十篇文章，有談及生活中的數學，也有講述數學發展的故事，文章內容豐富多彩。文章除可供教師參考外，亦可作為學生的讀物。本文集內各文章的內容只是作者的個人意見，與教育局無關。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
(傳真：3426 9265　電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

鳴謝

荷蒙香港科技大學數學系及香港道教聯合會青松中學惠允教育局數學教育組轉載其刊物上的文章，特此申謝。

作者簡介

梁子傑老師，1985 年畢業於香港大學數學系，並獲得一級榮譽學位。翌年於香港大學教育學院取得教育證書。2008 年於香港中文大學取得數學教育理學碩士學位。

自大學畢業後，梁老師一直從事中學數學教育工作，亦曾於 2004 至 2006 年間，借調教育統籌局數學教育組，協助編寫新高中數學課程。在過去的 10 多年間，梁老師經常在境內不同的刊物中，發表與數學教育有關的文章，亦到不同的學校演講，與學生和老師分享他研究和學習數學的心得。在過去，梁老師曾出版兩本著作，分別爲《圖龜幾何》及《幾何原本導讀》。

第一章　為甚麼要學習數學？

數學，既是一門科學，亦是一門藝術，自古以來曾經有無數的學者歌頌她的偉大，亦願意將畢生的精力供獻在這門學科的研究之上。可是，當數學變成一個中學的課程時，情況便不再相同了！對於在數學科中表現平平，又或者強差人意的學生來說，他們往往會對這科目產生抗拒或不滿的情緒,「爲甚麼要學習數學？」便成爲他們經常掛在口邊的疑問了。

要回答「爲甚麼要學習數學？」這個問題，我們便要明白學習數學的目的。在綜合很多數學家和數學教育工作者的意見之後，我們不難總結出三個學習數學的原因：一、以數學作爲工具，解決生活中所面對的問題，以及解釋大自然中的種種現象；二、以數學作爲思考訓練的平台，培養學生邏輯思考及推理分析的能力；三、透過研習數學的發展歷史，讓學生認識和欣賞人類文化的發展歷程。

有效工具

相信大家不會質疑數學的應用價值，簡單如計算長方形面積的公式，即 $A = b \times \ell$ ，以至愛因斯坦相對論中的能量公式，$E = mc^2$，都用了數學符號來表達。至於這些公式背後的意義和證明，就更要數學來解釋了。

可能大家會覺得，我們並不是大科學家，在日常生活中，除了簡單的四則運算之外，便沒有使用課堂中所學到的東西了，那麼我們又如何談得上應用數學呢？

其實，數學的應用不一定是將一些數學公式應用於生活之中。有些時候，運用一些數學的思想和分析方法，也可算是其中一種應用，只是大家沒有留意罷了。現在讓我們看一個關於數學應用的例子。

2003 年的春天，在香港出現了一件不幸事件，那就是非典型肺炎的爆發。在病毒散播的初期，由於人們並不認識這種新型的病毒，因此誤以爲那疾病的殺傷力很弱。當時，當局估計患此病的死亡率爲 3 至 4 %。但隨著疫情的發展，我們發現死亡率最後竟然高達 17 %，是原先估計的 4 至 5 倍！

那時候，有人認爲可能由於政府故意隱瞞疫情的嚴重性，因此將死亡率說得小一點。但後來有專家指出，出現上述差別的原因是我們當初對死亡率的估算方法不正確所致。

首先，我們要明白，甚麼是「死亡率」呢？事實上，在學界中，學者對死亡率的定義也不是統一的，但爲了方便以後的討論（亦相信讀者都會同意以下的那種簡單說法），我們將感染某種疾病的死亡率定義爲：「因該種疾病而引至死亡的總人數與感染該種疾病的總人數之比。」

假如我們以 r 表示死亡率，T 表示在某天感染了非典型肺炎的累積人數，D 表示在該天因患此病而死亡的累積人數，那麼一個直接的想法就是用比率 $\dfrac{D}{T}$ 來估計死亡率 r。由表 1.1 的資料可以知道，在非典型肺炎爆發的初期，例如：4 月 12 日，累積染病人數 $T = 1180$，累積死亡人數 $D = 35$，因此死亡率 r 估計爲 $\dfrac{35}{1108} \times 100\ \% \approx 3.16\ \%$。但到疫情結束後，有 $T = 1755$，$D = 299$，而 r 估計爲 $\dfrac{299}{1755} \times 100\ \% \approx$

17.04 %。這兩個比率明顯有很大的差別。爲甚麼？

日期	累積染病人數（T）	累積死亡人數（D）	累積痊癒人數（R）	$\frac{D}{T}\times100\%$	$\frac{D}{D+R}\times100\%$
2003.4.12	1108	35	215	3.16 %	14.00 %
2003.4.13	1150	40	223	3.48 %	15.21 %
2003.4.14	1190	47	229	3.95 %	17.03 %
…	…	…	…	…	…
2003.4.28	1557	138	710	8.86 %	16.27 %
2003.4.29	1572	150	759	9.54 %	16.50 %
2003.4.30	1589	157	791	9.89 %	16.56 %
…	…	…	…	…	…
2003.5.18	1713	247	1203	14.42 %	17.03 %
2003.5.19	1714	251	1213	14.64 %	17.14 %
2003.5.20	1718	253	1229	14.73 %	17.07 %
…	…	…	…	…	…
2003.6.20	1755	296	1403	16.87 %	17.42 %
2003.6.21	1755	296	1408	16.87 %	17.37 %
2003.6.22	1755	296	1410	16.87 %	17.35 %
…	…	…	…	…	…
疫情結束	1755	299	1456	17.04 %	17.04 %

表 1.1

其實只要大家細心想想便會明白，當疫情結束後，以比率 $\frac{299}{1755}$ 來計算死亡率，與我們當初對死亡率的定義是沒有分別的。但在疫情期間，單以一天內的累積染病人數與累積

死亡人數之比來估計死亡率便有問題了。例如：在 4 月 12 日那一天，我們知道總共有 1108 人染病，死了 35 人，但餘下的 $1108-35=1073$ 人之中，並非每一個人都會幸運地痊癒，當中亦會有一部分人過了幾天後會去世。因此單以 $\frac{35}{1108}$ 來估計死亡率，必定會有偏差。

或者我們從另一個角度看看這個問題。前面說過，D 表示在某天內患非典型肺炎而死亡的累積人數，而按照定義，rT 便是由累積染病人數而推算出來的死亡人數。亦正如前面所說，除非疫情結束了，否則這兩個數是不會相等的，而且 rT 應大於 D。不難理解，$rT-D$ 應該表示撇除已經死亡的病人之外，那些仍在生病而將會在未來數天不幸病死的人數。

現在再引入多一項資料 R，它表示在某天內的累積痊癒人數，那麼 $T-D-R$ 便應該等於感染了疾病但仍未痊癒或死亡的人數。按照死亡率的意義，在這些病人當中，亦將會有 $r(T-D-R)$ 人過身，而這個數字亦理應等於前面的結果，即 $rT-D=r(T-D-R)$。刪去 rT，移項後得 $r=\frac{D}{D+R}$。

從表 1.1 的最右欄看到，由上述比率所估計的死亡率一直都超過 14 %。到了 5 月的時候，更徘徊於 17 至 17.4 % 之間。由此可見這比率的可靠性，亦知道以 $\frac{D}{T}$ 來估計死亡率是不理想的。

事實上，這個例子更使我們明白到，如果能夠適當地應用數學來進行分析，那麼我們的確可以更有效地掌握資料，認清目前的形勢來做好準備。

思考訓練

自古以來，人們重視數學教育的原因之一，就是數學是一個思考訓練的理想場地。在數學世界裏，我們會面對不同的數學問題，通過認識和解決那些題目，不單可以令自己的思想變得更有系統和更具邏輯性，更可以加強我們表達和溝通的能力。

大家不妨想想以下的問題：「植樹九株，使成十行，每行有樹三株，當用何法？」

對於這道題，一個很自然的想法就是如圖 1.2 般，將 9 株樹排成一個 3×3 的方陣。但數一數當中的行數後，我們卻發現方陣中只有 8 行樹，離題目的要求還差 2 行！所以這不是正確的解答。

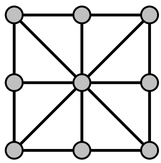


圖 1.2

如果我們就此將這個解答捨棄，那麼便非常可惜了。其實，只要我們細心分析上面解答失敗的原因，或許我們可以從中找到解決問題的方法。事實上，目前我們只欠 2 行便可符合題目的要求。爲了達到目的，我們應該仔細分析一下目前所處的狀況。

細心看看圖 1.2，圖中有 1 株樹是很特別的，那就是位於正中央的那株樹。那樹有 4 條直線經過它，因此負起構造 4 行樹的責任。在正方形 4 個角上的樹，每一株都有 3 條直線

經過它們。至於其餘在 4 邊上的 4 株樹，它們的「供獻」最小，每株樹只有 2 條直線經過它們。

到這裏我們要想想：爲甚麼位於中央的那株樹會有 4 行樹經過它，而 4 邊上的樹卻只得 2 行呢？原來位於中央那樹的八個方向都有別的樹包圍著，而 4 邊上的樹只得 3 個方向上有樹，因此經過它的直線數量自然比中央那株樹小了。爲了增加樹的行數，最自然的想法就是移動 4 個角上的樹，使在邊上的樹會有更多別的樹包圍著它們。

按照上述的想法，將正方形 4 個角分別向左方和右方移動，使它成爲圖 1.3 的形狀，雖然這樣做會破壞了原本的 2 條垂直線，但卻增加了 4 條斜線，如此減 2 加 4，便得到 10 行樹的分佈，我們由此獲得一個圓滿的解答！

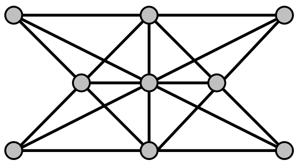


圖 1.3

另一道和大家分享的習題是這樣的：「有桶三個，容量分別為 8 升、5 升和 3 升。8 升的桶裏裝滿了牛奶，其餘兩桶是空的。只用這三個桶，怎樣把牛奶平均分成兩份？」

這道題不難解，大家胡亂地嘗試幾次，或者都可以找到答案。但如果想有一個較爲系統化的結果，那麼便要分析一下題目所提供的數字了。假如我們要將 8 升的牛奶平均地分成兩份，則每一份爲 4 升。現在我們有一個較小的桶，它的容量是 3 升，所以只要我們能夠量出 1 升的牛奶，那麼便會

有 3 + 1 = 4 升的牛奶，問題便解決了。但如何量得 1 升的牛奶呢？

由於我們有一個 5 升的桶，因此只要利用那 3 升的桶量度牛奶 2 次，得 6 升，同時利用那個 5 升的桶來量出當中 5 升的牛奶，便可以分出 1 升的牛奶了！具體的量度方法，可以用以下的符號來表示：

$$(8,0,0)\to(5,0,3)\to(5,3,0)\to(2,3,3)\to(2,5,1)$$
$$\to(7,0,1)\to(7,1,0)\to(4,1,3)\to(4,4,0)$$

相信不用多解釋，大家都可以明白上述符號的意思了。

這裏，我們同時可以感受到數學的威力，那就是以極簡單的符號來表達複雜的意思。試想想，如果我們將上述的量度過程化成文字，那麼將會變得長篇大論，而且亦不容易看懂。由此可見，雖然很多人當看到大量的數學符號時，會感到十分害怕，但是數學家卻是爲了精簡文字，因而設計了這些有用的符號。

文化繼承

人類研究數學，至少也超過了 5000 年。在這段期間，有無數的學者爲這學問作出了供獻，豐富了我們的知識，並將我們的社會建設成今天的面貌，我們理應好好地保存這個重要的文化遺產。

在這裏，我想爲大家介紹一部中國古代的數學巨著《九章算術》。

《九章算術》是從西漢（公元前 2 世紀）流傳下來的一部古籍，是我國流傳至今最古老的數學文獻之一。它經過多

個朝代的數學家研究、整理和補充，然後才變成今天的模樣。但此書的作者是誰，現已無從稽考了。此書一共分成九章，當中收集了很多不同性質的數學問題和它們的解答。由於它的內容豐富，並且論述大體正確無誤，因此一直獲得中外人士給予極高的評價。書中第七章叫「盈不足」，主要是討論一些合資買賣時所遇到的問題。當中的一道題是這樣的：「今有共買雞，人出九，盈十一；人出六，不足十六。問人數、雞價各幾何？」

題目的意思是說：現在有一些人合資買雞，如果每人出 9 元，那麼買雞後便剩下 11 元；如果每人出 6 元，那麼還欠 16 元才能付清雞價。問共有多少人買雞，而雞價又是多少？

在今天，當遇到這類題目時，我們通常會設立聯立方程來求解：

解　設人數為 n，雞價為 t 元。

則
$$9n = t + 11 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$6n = t - 16 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) − (2) :
$$3n = 11 - (-16) = 27$$
$$n = 9$$

6 × (1) :
$$54n = 6t + 66 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

9 × (2) :
$$54n = 9t - 144 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) − (3) :
$$0 = 3t - 210$$
$$t = \frac{210}{3} = 70$$

∴ 人數為 9，雞價為 70 元。

在《九章算術》中，作者提出了以下一個很特別的解題方法：「盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法。……盈不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實。實為物價，法為人數。」

上文的方法是先將題目中有關的數字列成下列方陣：

所出率	9	6
盈不足	11	16

然後以「維乘」，即我們今天所說的「交叉相乘」，計算出一個數，叫做「實」，即 實$= 9 \times 16 + 6 \times 11 = 210$。又以將「盈」、「不足」兩數之和設定爲「法」，即 法$= 11 + 16 = 27$。再稱所出錢之差爲「餘」，即 餘$= 9 - 6 = 3$。

這時候，　雞價 ＝ 實 ÷ 餘 $= 210 \div 3 = 70$，

人數 ＝ 法 ÷ 餘 $= 27 \div 3 = 9$。

如果大家仔細比較《九章算術》的方法和前面解聯立方程的方法，不難發現這兩個方法是一致的。而透過術文中的一些簡單「口訣」，我們更可以直接地解每一道與盈不足有關的問題，毋須每次都設聯立方程了！

大家是否同意，我們祖先的智慧是非常值得我們學習和保留的呢？

怎樣可以學好數學？

其實，當學習某一個學科出現困難時，便立刻質疑學習這個學科的目的和原因，態度上是過於消極了。所以當我們學習數學出現困難時，與其問：「爲甚麼要學習數學？」倒不

如積極地想一想:「怎樣可以學好數學？」不是更積極、更有建設性和更有意義嗎？

要學好一個學科，必定要培養對這個科目的興趣。數學科的趣味，正正由於它十分困難！試想想，古人從看似雜亂無章的大自然中，慢慢地找出事物的規律，因而發展出今天的數學內容，不是很有趣和有意義嗎？當我們面對一道數學題，幾經探索和思量，然後找到了正確的答案，不是很有滿足感和令人興奮嗎？

其實，數學本身就充滿著無窮的妙趣。中國近代數學家華羅庚教授曾經說:「認為數學枯燥無味，沒有藝術性，這看法是不正確的。 就像站在花園外面，說花園裏枯燥乏味一樣。」(*)

當然，我們亦不得不承認，這個「數學花園」的入口有一條很高、很長的梯級，要觀賞到花園內美麗的花朵，便非要下一番苦功、努力地走一段崎嶇的路不可。每當遇到一些較為困難的問題時，我們應該抱著不輕言放棄的態度，多動腦筋，克服困難，找出自己的不足和經常犯的錯誤，避免下次再重蹈覆轍，那麼成績才會有進步。

讓我再為大家舉一個例子。相信大家都有學過一些簡單的指數規律，例如： $a^m \times a^n = a^{m+n}$、$a^m \times b^m = (ab)^m$。即當計算 $3^2 \times 3^5$ 時，我們可以使用第一式得 $3^2 \times 3^5 = 3^7$；當我們計算 $2^4 \times 5^4$ 時，我們可以使用第二式得 $2^4 \times 5^4 = 10^4$。不過，當計算 2×4^3 時，很多人都會錯誤地以為可以使用第二式得 $2 \times 4^3 = (2 \times 4)^3 = 8^3$，但這是不正確的。

(*) 見「和同學談談學習數學」,原載於 1955 年 1 月「中學生」,後來轉載於(1984)《華羅庚科普著作選集》,上海：上海教育出版社。

大家有沒有留意到，無論在上面的第一式或者第二式中，雖然我們好像都在簡化形如 $a^m \times b^n$ 的算式，但是仔細地看看便會發現，其實在上述兩式的左方都要求最少有一個變數是相等的，即第一式要求兩底（a）相等，而第二式則要求兩指數（m）相等。而在 2×4^3 中，前面「2」的指數是 1，後面「4」的指數是 3，它們互不相等，因此根本不能使用任何一式來簡化！

事實上，我們應先將 4^3 改寫成 $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$，再使用第一式，才能得到一個合情合理的答案，即 $2 \times 4^3 = 2 \times 2^6 = 2^7$。

由此可見，我們學習數學，除了可以訓練我們的分析和思考能力，以及認識自然界的規律之外，更重要的，是令我們明白，只有依循那些規律進行運算和推理，才能夠得到正確的答案。假如我們不用心地學習，盲目地亂試亂碰，根本不可能得到任何成果。

其實，人生在世，我們待人處事的態度，何嘗不是這樣呢？就讓我們一同學好數學，從而領悟當中的美麗和做人的道理吧！

思考題

1. 植樹 16 株，使成 15 行，每行有樹 4 株，當用何法？

2. 本文提到平分 8 升牛奶的方法其實並非「最佳解答」。即是說，文中的解答所需的步驟比較多，大家能否想出一個步驟更少的解答呢？

3. 若將文中平分牛奶問題的條件改爲：「有桶三個，容量分別爲 10 升、6 升和 4 升。10 升的桶裏裝滿了牛奶，其餘兩桶是空的。」問只用這三個桶，能否把牛奶平均分成兩份？爲甚麼？

4. 試以《九章算術》的方法解以下同樣出自「盈不足」章的問題：
   今有共買牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。問家數、牛價各幾何？

5. 在一次測驗中，小明用了以下的方法錯誤地簡化下面左方的算式。試幫助小明找出錯誤的地方，及向他解釋其錯誤的原因及改正的方法。

$$
\begin{aligned}
\frac{3\cdot 4^{n+2}-8\cdot 4^{n}}{2\cdot 4^{n}} &= \frac{12^{n+2}-32^{n}}{8^{n}} \\
&= \frac{4^{n}(3^{2}-8)}{4^{n}(2)} \\
&= \frac{9-8}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

第二章　國慶日與中秋節

眾所周知，國慶日是西曆的 10 月 1 日，而中秋節則是農曆的 8 月 15 日。這兩個節日都是每年秋季的重要日子。不講不知，雖然這兩個節日是從兩個不同的曆法所得出來的，但它們也有「相遇」的一天。例如：2001 年的 10 月 1 日，亦是農曆的 8 月 15 日，國慶日和中秋節剛好在同一天。究竟這只是一個巧合的現象，還是在背後有一個規律呢？

翻查《萬年曆》(*)，我們不難發現，1982 年和 2020 年的國慶日，剛好亦是中秋節！算一算亦會發現，1982、2001 和 2020 之間剛好相隔了 19 年。換句話說，西曆中的國慶日和農曆中的中秋節，每隔 19 年便會相遇一次！可能大家會懷疑，爲甚麼一定要等 19 年，那兩個節日才會相遇呢？爲了明白 19 年循環的奧秘，我們先要明瞭究竟「西曆」和「農曆」是怎樣制定出來的。

我們現時所採用的西曆，顧名思義，就是一套從西方傳入的曆法系統。遠在古羅馬時期，西方就已經有「年」這個概念。及後亦將地球環繞太陽公轉一周所需的時間定爲「1 年」。通常我們會說 1 年有 365 日，即是說地球自轉了 365 次（日），它便環繞太陽公轉了 1 次（年）。如果地球自轉時間和公轉時間之比，剛好是一個整數，那麼一切便好辦了。但很可惜，經過仔細的天文觀測後發現，地球環繞太陽公轉較精確的時間應爲 365 日 5 小時 48 分 46 秒，即約 365.2422 日。

(*) 《萬年曆》是一本西曆和農曆的對照表，載有相應的年份、日期、星期、節氣等資料。

故此，1 年有 365 日的說法，和地球公轉所需的實際時間，約有 0.2422 日的偏差。

相信大家都知道，我們每 4 年便會在第 4 年中增加一天（即該年的 2 月 29 日），目的就是爲了彌補上述的差別。注意，$0.2422 \times 4 = 0.9688$，而 $1 - 0.9688 = 0.0312$ 日，約等於 44 分 56 秒。換句話說，使用了「四年一閏」的曆法，我們每隔 4 年便可以將上述的差別減少至 4 年才相差 44 分 56 秒。相信這是一個較佳的處理辦法了。

由於西曆是按照太陽和地球的關係而制定出來的，因此亦有人將西曆稱爲「陽曆」。而爲了方便後面的討論，我們稱地球公轉所需的時間（即 365.2422 日）爲 1 個「太陽年」。

農曆的曆法比西曆稍爲繁複。有人稱農曆爲「陰曆」，這是因爲農曆主要是根據月球環繞地球公轉所需的時間來制定的。根據觀測，月球環繞地球公轉一周所需的時間亦不是一個整數，而是 29 日 12 小時 44 分 2.8 秒，即約 29.5306 日。故此，在農曆裏，1 個月有時候是 29 日，亦有時候是 30 日。一個月究竟有多少日是由月缺和月圓的時間來決定的。通常，我們會將月圓的那一天定爲每月的第 15 日。同樣，爲了方便後面的討論，我們稱月球環繞地球公轉所需的時間（即 29.5306 日）爲 1 個「太陰月」。

將 1 個太陽年和 1 個太陰月的日數相除，得 $365.2422 \div 29.5306 = 12.368262$。由此可知 1 個太陽年比 12 個太陰月多出 0.368262 個太陰月，約 10 日 21 小時。如果我們將 1 個農曆年定爲 12 個月，那麼每過 1 年，我們便要提早差不多 11 天過新年了！這樣的曆法會引致很多混亂和困擾的情況。例如：某農夫發覺今年農曆 3 月 1 日天氣回暖，春天到了，適

合播種，那麼到了第二年便要改於 3 月 12 日播種，第三年便要改於 3 月 23 日。十年後便要在 7 月才開始耕種，二十年後便要到 11 月了！

爲了解決上述的困難，農曆的曆法亦好像西曆「四年一閏」的制度一樣，會在適當的年份之中多加一個月（即閏月）來調節上述的差距。要推算出這個合適的年份亦十分簡單，就是直接將每年多出來的時間（即 0.368262 個太陰月）累積地加起來，如果剛好超過或十分接近 1 個太陰月，那麼就可以在該年加插一個閏月了。

例如：第 1 年多了 0.368262 個太陰月，第 2 年便會多出 0.736524 個太陰月，第 3 年將會多出 1.104786 個太陰月。這時剛好多於 1 個太陰月，所以我們就在第 3 年中加添一個閏月，因而得到農曆「三年一閏月」的規律。

但「三年一閏月」這個方法並不完美，原因是即使增加 1 個閏月，3 年後仍然和實際的太陽年相差了 0.104786 個太陰月，約 3 日 2 小時。這個差距依然很大。爲了建造一個更好的曆法，我們可以繼續算下去，從而得到表 2.1。

從表 2.1 可以看到，當過了 8 年後，雖然差額只有 2.946096 個太陰月，不足 3 個太陰月，但這個數字卻和 3 十分接近，故此，在農曆的曆法中，亦有「八年三閏月」的規定，即除了在第 3 和第 6 年分別插入 1 個閏月外，亦在第 8 年再加插 1 個閏月。這樣，雖然只是相隔了一年，我們又再有 1 個閏年了。類似地，到了第 16 年，就應該有 6 個閏月。

注意，按「八年三閏月」的規定推算，8 年後太陽年和農曆年應該相差了 $3 - 2.946096 = 0.053904$ 個太陰月，即約 1 日 14 小時。亦即是說 8 年後的農曆年和太陽年其實只有一至

年數	累積差額（太陰月）	與最接近整數之差
1	0.368262	0.368262 – 0 = 0.368262
2	0.736524	1 – 0.736524 = 0.263476
3	**1.104786**	**1.104786 – 1 = 0.104786**
4	1.473048	1.473048 – 1 = 0.473048
5	1.841310	2 – 1.841310 = 0.158690
6	**2.209572**	**2.209572 – 2 = 0.209572**
7	2.577834	3 – 2.577834 = 0.422166
8	**2.946096**	**3 – 2.946096 = 0.053904**
9	3.314358	3.314358 – 3 = 0.314358
10	3.682620	4 – 3.682620 = 0.317380
11	**4.050882**	**4.050882 – 4 = 0.050882**
12	4.419144	4.419144 – 4 = 0.419144
13	4.787406	5 – 4.787406 = 0.212594
14	**5.155668**	**5.155668 – 5 = 0.155668**
15	5.523930	6 – 5.523930 = 0.476070
16	**5.892192**	**6 – 5.892192 = 0.107808**
17	6.260454	6.260454 – 6 = 0.260454
18	6.628716	7 – 6.628716 = 0.371284
19	**6.996978**	**7 – 6.996978 = 0.003022**
20	7.365240	7.365240 – 7 = 0.365240

表 2.1（加插閏月的年份以粗體表示）

兩天的差距。例如：1990、2009 和 2028 年的中秋節，都在西曆的 10 月 3 日，和國慶日只相差了 2 天。

但一個更少的差距出現在第 19 年。如果我們定「19 年 7 閏月」，那麼太陽年和農曆年就只相差 7 – 6.996978 = 0.003022 個太陰月，即約 2 小時！試想想：若果在 19 年的漫

長歲月中，當設定了 7 個閏月之後，兩種曆法其實只相差 2 小時，這是一個多麼精確的結果！這亦是 19 年循環的原因。

不過，大家亦要明白，即使使用了「19 年 7 閏月」的設定，亦不表示一年中的每一天都會在 19 年後重複一次。以國慶日和中秋節爲例，雖然 1982、2001 和 2020 這 3 年中，這兩個節日都是在同一天發生，但 2039 的中秋節則在西曆的 10 月 2 日，卻與國慶日相差了 1 天！爲甚麼會這樣呢？

其實，理由也很簡單，因爲「太陽年」和「太陰月」的日數都不是整數，而我們實際使用的西曆和農曆，每一年和每一個月的日數都必須是整數。西曆每逢第 4 年便會多加一日，而由於 4 和 19 之間並沒有大於 1 的公因數，因此兩個曆法每 76 年才能重合一次。另外，農曆的月份亦有長有短，有時候是 29 日，有時候是 30 日，所以會引致部分預期中的日子和它的實際日期有一天的差距。

思考題

1. 各位讀者，你滿 19 歲了嗎？試從《萬年曆》中找找，當你 19、38 或 57 歲時，你的西曆生日日期是否和農曆生日日期相同呢？又，當你 8、27 或 46 歲時，你的西曆生日日期是否和農曆生日日期只相差一至兩天呢？

2. 假如你出生於 2000 年的 3 月 1 日，那麼到了 2019 年，你的西曆生日和農曆生日又是否在同一天呢？爲甚麼？試從《萬年曆》中找出答案。

第三章　雙春兼閏月

每逢春節（即農曆年的正月初一），總會有一些堪輿學家，在報章或電視上預測新一年的「流年運程」。每隔數年，便會聽到他們說新的一年是「雙春兼閏月」，適宜嫁娶云云。其實大家知不知道，甚麼是「雙春兼閏月」呢？

先談「閏月」。農曆主要是根據月球環繞地球公轉所需的時間來制定的。月球環繞地球公轉一周約需 29.5306 日。故此，在農曆裏，1 個月有時候是 29 日，亦有時候是 30 日，而這是依據月缺和月圓的時間來決定的。通常，我們會將月圓的那一天定爲每月的第 15 日。

同時，地球環繞太陽公轉一周約需 365.2422 日（稱之爲「太陽年」)。如果將 1 個農曆年定爲 12 個月，即 $29.5306 \times 12 = 354.3672$ 日，那麼 1 個農曆年便會比 1 個太陽年少 10.875 日了。很明顯，3 個農曆年便會比 3 個太陽年少超過 1 個月！因此，相對於太陽年而言，我們便會越來越早過春節了。

爲了彌補這個差距，農曆的曆法便引入一個「閏月」的制度。在一個適當的年份中，增加 1 個月，從而將春節「推遲」，使農曆年可以和太陽年的時間大致上配合。換句話說，在這個農曆的「閏年」之中，1 年便會有 13 個月了。

如果沒有閏月的制度，那麼我們便會不斷地提早過春節了。但如果要引入閏月的制度，那麼我們又應該在哪一年加插閏月呢？

要回答這個問題，我們先要了解農曆曆法中的「節氣」。

雖然農曆是以月球公轉的周期爲基礎，但它並沒有忽略地球和太陽的關係。根據曆法，我們將地球環繞太陽公轉的軌道平均地定出 24 個位置，並稱相應的日期爲「節氣」。每一個節氣有一個獨特的名稱，它們分別是：立春、雨水、驚蟄、春分、清明、穀雨、立夏、小滿、芒種、夏至、小暑、大暑、立秋、處暑、白露、秋分、寒露、霜降、立冬、小雪、大雪、冬至、小寒和大寒。顧名思義，這些節氣的定立，是爲了幫助農民掌握四季變化的規律。由於 1 個太陽年約有 365.2422 日，因此 2 個節氣之間便大約相隔 365.2422 ÷ 24 = 15.218425 日了。

另一方面，由於西曆的曆法也是以地球繞環太陽的時間爲基礎，因此每年 24 節氣的西曆日期便大致相同。例如：立春通常會在西曆的 2 月 4 日，雨水在 2 月 19 日，清明在 4 月 5 日，冬至在 12 月 22 日，大寒則在 1 月 20 日等。

前面說過，2 個節氣相隔了 15.218425 日，那麼 3 個節氣便一共相隔了 30.43685 日，剛好比 1 個農曆月（29.5306 日）多了少許。所以在一般的情況下，1 個農曆月內可以有 1 個或 2 個節氣，但絕少在同一個月內有 3 個節氣。

關於應在何年加插閏月的問題，答案原來很簡單，只要在曆法上規定每年正月的第一個節氣，必定是立春或雨水，那麼我們就可以判斷哪一年要加插閏月了。

例如：2003 年的 2 月 1 日是農曆的正月初一，因爲這天比立春（2 月 4 日）早，但比大寒（1 月 20 日）遲，正月的第一個節氣爲立春，所以沒有問題。12 個月後，因爲農曆年比太陽年短，正月初一提早至 2004 年的 1 月 22 日，這一天亦介乎於大寒和立春之間，所以亦沒有問題。但再過 12 個

月，問題來了。12 個月後的初一應該是 2005 年的 1 月 10 日，這一天比大寒早，所以不可能成為正月初一；否則該年的第一個節氣，便會變成大寒了。因此我們就將之前一年的農曆年定為閏年（即將 2004 年所對應的農曆年定為閏年，有 13 個月），而 2005 年的農曆正月初一，則順延至 2 月 9 日。由於 2 月 9 日比雨水早，因此該年的第一個節氣為雨水，並沒有違反上述的規定。

大家細心地數數亦不難發現：2004 年的農曆年由 1 月 22 日開始，至翌年的 2 月 8 日結束，這段段時間一共跨過了兩次立春（即 2004 年和 2005 年的 2 月 4 日），所以便有人稱這一年為「雙春」了。

由於 1 個月內最多只能有 2 個節氣，由立春到下一次立春，前後一共經過 25 個節氣，因此如果 1 年只得 12 個月，那麼是不可能有「雙春」的。但如果那一年有 13 個月（亦即是一個閏年），那麼「雙春」便有機會出現了。正因此，我們可以說，每逢「雙春」的年份，就必定要有「閏月」。

那麼有「閏月」的年份，是否必定是「雙春」呢？

由立春到下一次立春，剛好是一個太陽年，共 365.2422 日。前面提過，我們規定了每年正月的第一個節氣，必定是立春或雨水。因此如果某閏年的第一個節氣是立春，即使立春的日期比較遲，也不會比正月初一遲超過 15.218425 日；否則該年的第一節氣便是大寒，那是不可能的。而 $365.2422 + 15.218425 = 380.460625$ 日，比 $29.5306 \times 13 = 383.8978$ 日為少，所以即使該年的立春遲了開始，下一次的立春亦必定包括在這個閏年之內。

另一方面，按照同樣的推理，如果一個閏年開始的第一

個節氣是雨水，那麼下一次的雨水亦同時包括在這閏年之內，但這是不可能的；否則下一年的第一個氣節，將會是雨水之後的節氣，違反了每年由立春或雨水開始的規定。因此，在閏年之中，該年的第一個節氣必定不會是雨水，而是立春，亦將會於下一個立春之後結束。換句話說，每逢有「閏月」的年份，該年就必定是「雙春」了。

「雙春兼閏月」的那一年是否真的適宜嫁娶，實在是見仁見智。但因爲「雙春」必須「閏月」，而「閏月」則必定「雙春」，所以在名稱上用了一個「兼」字（彷彿暗示了「雙春」和「閏月」並不容易同時發生），似乎有點誤導了！

最後還有一個問題可以討論：在一個閏年之中，我們應該將哪一個月定爲「閏月」呢？原來答案亦很簡單。在一個閏年中，一共有 13 個月和 25 個節氣，當中應該有 12 個月包括 2 個節氣，而剩下的 1 個月只有 1 個節氣。因此，我們便將只得 1 個節氣的那個月定爲閏月。例如：2004 年中的農曆閏二月（由 3 月 21 日至 4 月 18 日），它只得 1 個節氣清明，所以就將它設定爲閏二月，而不是該年的「三月」了。

一點補充

本文內的一切推算都以一個非常重要的假設爲基礎，就是一個農曆月份之內不會出現 3 個節氣。雖然這是一個極之罕見的情況，但在 1984 年 12 月 22 日至 1985 年 1 月 20 日期間（即農曆的十一月），一共有 3 個節氣：冬至、小寒和大寒，所以當年的閏月設定等規則，和本文所提及的有所出入。不過既然這是一個很罕有的情況，有關的規則便不作討論了。

探究題

1. 試找出 24 個節氣在西曆中的對應日期及它們名稱的意義。

2. 本文提出了一個設定每年正月的規則，即「每年正月的第一個節氣，必定是立春或雨水」，但有另一種學說規定：「每年正月初一爲去年冬至之後的第二次新月（即農曆月份的第一天）」。試探究由以上兩個不同規定所得到的曆法是否相同。

參考書目

1. 鄭瑩、余宗寬著，蔡章獻審定（1995）。《時間與曆法》。台北：銀禾文化事業有限公司。

第四章　復活節

大家有沒有發覺，每一年復活節的日期都是不同的呢？有時候我們早在 3 月底便過復活節，但有時候要等到 4 月下旬才是復活節（見表 4.1）。為甚麼這個節日會如此飄忽不定呢？每年復活節的日期是根據甚麼準則來確定的呢？

年份	復活節日期
2001	4 月 15 日
2002	3 月 31 日
2003	4 月 20 日
2004	4 月 11 日
2005	3 月 27 日
2006	4 月 16 日
2007	4 月 8 日
2008	3 月 23 日
2009	4 月 12 日
2010	4 月 4 日
2011	4 月 24 日
2012	4 月 8 日

表 4.1

不講不知，如果你翻查一本比較舊版的英文字典（例如：由牛津大學出版社於 1963 年出版的《現代高級英漢雙解辭典》），便會發現字典中已經清楚寫出 “Easter”（即復活節）日期的規定。它是這樣寫的：「復活節，……，是在 3 月 21 日或該日後之月圓以後的第一個星期日。」（英文原句為：“Easter, … , observed on the first Sunday after a full moon on or after 21 March.”）[*] 原來，復活節的日期，是經由三個曆法所確定的，怪不得它會如此飄忽不定了！

那麼，究竟是哪三個曆法呢？現在就讓我爲大家逐一介紹：

西曆

首先要介紹的，就是我們現時俗稱的「西曆」。顧名思義，西曆是沿自歐洲，是「西方人」所使用的曆法。這曆法主要是根據地球環繞太陽公轉一周所需的時間來制定的。一般來說，一年共有 365 日。但由於這個數字和地球公轉一周所需的實際時間少了約四分之一日，因此每隔 4 年，便會在第 4 年多加 1 天，該年會有 366 日，並稱該年爲「閏年」。

爲了方便記錄每一天的日期，我們亦將一年分爲 12 個月。而 3 月 21 日當然是每年第 3 個月的第 21 天了。大家可能會問：「這個日子有甚麼特別呢？復活節的日期爲甚麼要從這一天開始計算呢？」

我們要知道，地球的自轉軸和公轉軸並不是互相平行的，而是有一定程度的傾斜（見圖 4.2）。正因如此，當地球繞著太陽公轉時，地球面向太陽的角度便會不斷改變，從而令到不同日子中白天的長度和黑夜的長度出現差別。如果我們在北半球生活，那麼我們會發覺大約在每年 4 月至 9 月期間，白天的時間往往比黑夜的時間長，即是所謂的「日長夜短」現象；而大約由 10 月至翌年的 3 月，則變成「日短夜長」。在這一個變化過程中，自然會有一天的日照時間最長，又會

[*] 在近期出版的大多數英文字典中，都將“Easter”一條解釋為：「三月或四月的某個星期日，基督徒用來紀念基督的復活。」(“the Sunday in March or April when Christians celebrate Christ’s return to life.”）

有一天的日照時間最短。天文學家稱日照時間最長的那一天爲「夏至」，這一天通常是每年的 6 月 21 日；而日照時間最短的那一天爲「冬至」，大約在每年的 12 月 22 日。

與此同時，在這兩個日子的轉換之間，亦應該有兩天的白晝長度會剛好和黑夜的長度相等。介乎於「夏至」和「冬至」之間，日夜兩段時間剛好相同的一日，天文學家稱之爲「秋分」，大約在 9 月 23 日。相反，由「冬至」至翌年「夏至」，日夜長度剛好相同的一日，天文學家便稱爲「春分」，大約在 3 月 21 日（在某些年份中，春分日會提前至 3 月 20 日，見表 4.3），亦即是前面提到，開始計算復活節日期的那一天了！

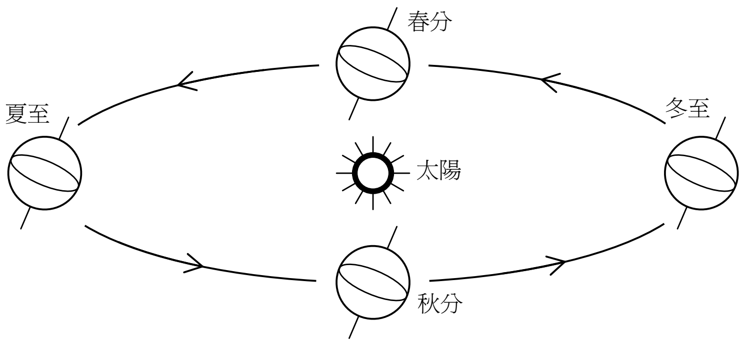


圖 4.2

從天文學家的角度來看，一年的開始不應是每年的 1 月 1 日，而是 3 月 21 日，即春分日。因爲從這天開始（對北半球的人來說），白天比黑夜的時間會一天比一天多，象徵著冬天正式的結束和夏天的來臨，所以是一個快樂和喜悅的日子。

陰曆

與西方人不同，我們中國人的曆法主要以月球環繞地球

所需的時間為基礎（可能我們對月亮有較濃厚的感情吧！），所以稱為「陰曆」。又因為我國「以農立國」，所以我們使用的陰曆，亦稱為「農曆」。

我們知道，月球環繞地球一周約需 29.5306 日，故此農曆中的一個月，有時候有 29 日，亦有時候有 30 日。不過，我們的曆法有一個特色，就是我們會將月圓的日子定為每月的第 15 天。所以，如果我們想知道在一個月中，哪一晚會有月圓，我們只要在日曆中找出農曆月份的 15 日便可以了，十分簡單。

回到我們有關確定復活節日期的問題，如果我們想知道春分之後的哪一天會有月圓，那麼我們便要找一本《萬年曆》來幫忙了。《萬年曆》是一本西曆和農曆的對照表，可以讓我們容易地找出兩個曆法中相應的日期。表 4.3 列出了春分日和其後之月圓日的關係。

從表 4.3 可見，如果春分那天之後不久便月圓（例如 2008 年），那麼我們便會很早過復活節了。如果月圓之後才是春分日（例如 2011 年），那麼我們便要等一段較長的時間才會過復活節。

據瞭解，基督的信仰起源自猶太民族，而猶太人的曆法和中國人的曆法同樣以月亮的運行規律來制定，因此復活節便和陰曆連繫起來。

星期

第三個曆法是一個大家都習以為常，不易察覺，但又對我們影響得最深的曆法，這就是一星期 7 日的制度。大家不妨想想，我們生活的規律在不知不覺間，已深受這制度所影

年份	春分日	春分後的月圓日
2001	3 月 21 日 （農曆 2 月 27 日）	4 月 8 日 （農曆 3 月 15 日）
2002	3 月 21 日 （農曆 2 月 8 日）	3 月 28 日 （農曆 2 月 15 日）
2003	3 月 21 日 （農曆 2 月 19 日）	4 月 16 日 （農曆 3 月 15 日）
2004	3 月 21 日 （農曆閏 2 月 1 日）	4 月 4 日 （農曆閏 2 月 15 日）
2005	3 月 21 日 （農曆 2 月 12 日）	3 月 24 日 （農曆 2 月 15 日）
2006	3 月 21 日 （農曆 2 月 22 日）	4 月 12 日 （農曆 3 月 15 日）
2007	3 月 21 日 （農曆 2 月 3 日）	4 月 2 日 （農曆 2 月 15 日）
2008	3 月 20 日 （農曆 2 月 13 日）	3 月 22 日 （農曆 2 月 15 日）
2009	3 月 20 日 （農曆 2 月 24 日）	4 月 10 日 （農曆 3 月 15 日）
2010	3 月 21 日 （農曆 2 月 6 日）	3 月 30 日 （農曆 2 月 15 日）
2011	3 月 21 日 （農曆 2 月 17 日）	4 月 17 日 （農曆 3 月 15 日）
2012	3 月 20 日 （農曆 2 月 28 日）	4 月 5 日 （農曆 3 月 15 日）

表 4.3

響了。例如：星期一上補習班、星期二看電視片集、星期三參加課外活動、星期日休息等等。

復活節必定在星期日舉行。可能有人會奇怪，每年復活節我們皆享有 4 天的假期，通常由星期五開始，直至星期一

結束，爲甚麼復活節會定於星期日那一天呢？

原來，根據《聖經》上面的記載，耶穌基督被門徒出賣，繼而被帶上法庭，並在星期五被人釘死於十字架上。由於猶太人的法律，星期六是安息日，一切活動都要停止，因此，基督的追隨者只好在星期五日落前將基督的遺體草草安葬在一個墓穴內，便匆匆離開。到了星期日早上，當人們再次到基督的墓穴時，便發現不見了耶穌的屍首，同時知道耶穌基督已經復活了。自此，基督徒便將紀念基督復活的星期日稱爲「復活節」，這就是復活節的起源。而同時，復活節之前的星期五，便定爲「受難節」。

至於公眾假期爲何會伸延至星期一，這是因爲在香港，每個星期日本身已是法定假期，所以政府便將星期一定爲假期來補償。

另一方面，我們知道春分月圓之後的第一個星期日是復活節，但我們如何得知月圓那天是星期幾呢？最簡單的辦法是翻查《萬年曆》。一般的《萬年曆》會同時紀錄某天的日期和星期的資料。不過，我們亦可以利用一些數學方法，計算出一年中的某天應該是一星期中的哪一天。

方法很簡單，我們先找出一個方便記憶並且同時是星期一的日子。例如：我們知道 2001 年 1 月 1 日是星期一（這個日子的確非常容易記憶！）。然後數一數我們想要計算的日子離上述日期一共有多少天（包括首尾兩天）。將這個結果除以 7，若整除，即餘數等於 0，則表示那天是星期日；若餘數是 1，則表示那天是星期一；若餘數是 2，則那天便是星期二了；餘此類推。

事實上，因爲星期是每 7 天一個循環，所以如果將星期

一當作第 1 天，那麼以後的第 8 天、第 15 天等，都必定會是星期一。留意：將 8 或 15 等除以 7，所得的餘數是 1。因此凡餘數爲 1 時，那天就應該是星期一了。類似地，星期二、星期三等，都可按照相同的道理推算出來。爲方便後面的討論，我們亦稱這個用來計算星期幾的數字爲「星期數」。

讓我舉兩個實際的例子來說明。例如：2001 年的 4 月 8 日（該年春分後的第一個月圓日），它離 1 月 1 日共 31 + 28 + 31 + 8 = 98 日，將 98 除以 7，剛好整除，沒有餘數，那麼我們便可以知道 4 月 8 日是星期日了。由於 4 月 8 日是星期日，因此復活節便應該定在下一個星期日，即 7 日之後，亦即是 4 月 15 日（大家可從表 4.1 中驗證這個結果）。

又例如：2002 年的 3 月 28 日（也是春分後的第一個月圓日），因爲 365 + 31 + 28 + 28 = 452，452 除以 7 得餘數 4，所以那一天是星期四。該年的復活節應該在 3 日後，即 3 月 31 日。

上述的方法不單可以用來推算春分後月圓日子的星期數，亦可以用來推算 2001 年 1 月 1 日以後任何一天的星期數。但是，如果要推算的日期離 2001 年較遠，例如：2022 年的 2 月 22 日，那麼所涉及的數字豈不是很大，計算豈不是很繁複嗎？其實我們只要利用算術上一個很巧妙的方法，便可以完成這項任務。方法就是利用加法和求餘數可以互調的性質。

先看看 2004 年 1 月 1 日的星期數。2004 年的 1 月 1 日離 2001 年 1 月 1 日共 3 年又 1 日，即 365 + 365 + 365 + 1 = 1096 日。將這個數除以 7，得餘數 4。留意如果我們先將 365 除以 7，那麼我們會得到餘數是 1，再將剛才式子中各項的餘數相

加，即 1 + 1 + 1 + 1，亦等於 4。換句話說，將加法和求餘數的次序對調後，所得的結果仍是一樣的。不過，對調後的計算量會比之前少得多了。同時，我們亦發現，因為 365 除以 7 的餘數是 1，所以每年 1 月 1 日的星期數，都會比前一年多加 1。當然，如果某一年是閏年，全年會再多一天，那麼到了下一年的 1 月 1 日，星期數便要加 2 了。

回看上面推算 2022 年 2 月 22 日星期數的問題，由 2001 至 2022 年，一共經過了 21 年，當中有 5 個閏年，所以星期數會增加 21 + 5 = 26，接著將 26 + 31 + 22 = 79 除以 7，得餘數 2，因此得知 2022 年的 2 月 22 日將會是星期二。

再仔細看看上面的計算，我們會發現，按照加法和求餘數可以互調的原理，我們其實不必將 26 + 31 + 22 真的加起來，我們可以先求餘數，然後才加，即得 5 + 3 + 1 = 9，再除以 7，亦可知餘數為 2。

應用以上原理，我們可以有一個更有效計算星期數的方法，就是預先計算每月最後的 1 天比 1 月 1 日增加了的星期數（見表 4.4）。

例如：想知道 2022 年 12 月 17 日是星期幾，那麼由年份可知星期數增加了 26， 亦即 5（26 除以 7 的餘數是 5）。從表 4.4 得知到 11 月尾又再增加 5，所以最後得 5 + 5 + 17 = 27，除以 7 得餘數 6，所以那天是星期六。

以上的計算其實是使用了一個數學家稱之為「同餘」的方法來進行的。為了避免使用太多數學符號，所以不打算在這裏引入那些正式的同餘記號了。其實同餘的概念很簡單，有興趣的讀者可以找一些關於數論的書籍看看。

另外，以上的討論只提到 2001 年 1 月 1 日以後星期數的

日期	離 1 月 1 日的天數	除以 7 後的餘數
1 月 31 日	31	3
2 月 28 (29)日	31 + 28(29) = 59(60)	3(4)
3 月 31 日	59(60) + 31 = 90(91)	6(0)
4 月 30 日	90(91) + 30 = 120(121)	1(2)
5 月 31 日	120(121) + 31 = 151(152)	4(5)
6 月 30 日	151(152) + 30 = 181(182)	6(0)
7 月 31 日	181(182) + 31 = 212(213)	2(3)
8 月 31 日	212(213) + 31 = 243(244)	5(6)
9 月 30 日	243(244) + 30 = 273(274)	0(1)
10 月 31 日	273(274) + 31 = 304(305)	3(4)
11 月 30 日	304(305) + 30 = 334(335)	5(6)

表 4.4（當閏年時，則使用括號中的數字）

計算方法，如果我們想知道 2001 年 1 月 1 日之前的星期數，方法也差不多，但不打算在這裏爲大家介紹了，留給大家自行研究吧。

總結

回到我們對復活節日期的討論。由以上的計算可知，如果某年的 3 月 21 日剛好月圓，而且又是星期六，那麼復活節便定於 3 月 22 日。但如果某年春分之前一天（即 3 月 20 日）月圓，那麼春分之後的月圓，便要等 30 天，即 4 月 19 日才出現。又如果那天剛好是星期日，那麼該年的復活節便要定於 4 月 26 日，比之前提到的 3 月 22 日，相差了超過一個月的時間呢！

習題

1. 試推算以下日期是一星期的哪一天：

   2008 年 8 月 8 日、2025 年 10 月 6 日、2047 年 6 月 30 日。

2. 試推算復活節日期的循環周期，即每隔多少年，復活節的日期會出現循環的現象。

第五章　漫談質數

我們從小學開始便已經認識甚麼是質數。一個大於 1 的整數，如果只能被 1 或自己整除，我們便稱該數為「質數」。另外，我們稱 1 為「單位」，並稱其他質數以外的正整數為「合成數」。例如：2、3、5、7 …… 等等，都是質數，而 4、6、8、9 …… 等等都是合成數。但是除了這些基本的定義之外，一般教科書中，都很少提到質數的其他性質。本文的目的，就是向大家介紹一些與質數有關的人和事。

《幾何原本》內的證明

人們相信，人類在古時，便已經發現了質數。而最先用文字記錄質數性質的人，要算是古希臘時代的偉大數學家歐幾里得了。

歐幾里得，約生於公元前 330 年，是古代亞歷山大里亞學派的奠基者。他的著作《幾何原本》，集合了平面幾何、比例論、數論、不可公度量和立體幾何之大成，一致公認為數學史上的一本巨著[*]。

《幾何原本》全書共分 13 卷，一共包含 465 個命題。當中的第七、八、九卷，主要討論整數的性質。第九卷的命題 20 和質數有關，它是這樣寫的：「**預先任意給定幾個質數，則有比它們更多的質數。**」

歐幾里得原文的證明並不易看懂，現改用現代的數學符

[*] 關於歐幾里得和《幾何原本》，在本書第九章中還有更深入的介紹。

號，寫出他的證明：

首先，假設有一些質數，分別是 a_1、a_2、……、a_k。我們用這些質數構作一個新的數 $a_1 \times a_2 \times \cdots\cdots \times a_k + 1$。

如果它是質數，那麼便加添了一個新的質數。

如果它不是質數，那麼這個數便有一個質因子 p，即 p 能夠整除 $a_1 \times a_2 \times \cdots\cdots \times a_k + 1$。如果 p 是 a_1、a_2、……、a_k 的其中之一，那麼它必定能夠整除 $a_1 \times a_2 \times \cdots\cdots \times a_k$。但由 p 的定義得知它能夠整除 $a_1 \times a_2 \times \cdots\cdots \times a_k + 1$，因此它亦能夠整除 1。但因爲 1 不能被任何質數整除，所以這是不可能的！由此得知上述的 p 只能是一個新的質數。

綜合以上兩個情況，我們獲得了一個新的質數。命題得證。

命題 20 提供了一個製造質數的方法，而且可以無窮無盡地製造下去。由此可知，命題 20 實際上證明了質數有無窮多個。

梅森質數

到了 17 世紀初，法國數學家梅森（1588 – 1648）提出了一條計算質數的有趣公式。

梅森發現算式 $x^n - 1$ 有以下的分解：

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots\cdots + x + 1),$$

其中 x 和 n 爲正整數，$n \geq 2$。所以如果 $x^n - 1$ 是質數，那麼 $x - 1$ 必定要等於 1，即 $x = 2$。算式變爲 $2^n - 1$。

另外，假如 $n = ab$，其中 a 和 b 爲正整數，並且 $a \leq b$，

則 $2^n - 1 = (2^a)^b - 1$。爲了簡化算式，令 $y = 2^a$　。於是 $2^n - 1 = y^b - 1 = (y - 1)(y^{b-1} + y^{b-2} + \cdots\cdots + y + 1)$。如果 $2^n - 1$ 是質數，那麼 $y - 1$ 也必定等於 1。由此得 $y = 2$，即 $2^a = 2$，$a = 1$。換句話說，n 不可能分解成兩個不等於 1 的整數之積，它必定是質數。

綜合上述結果，梅森猜想：如果 p 是一個質數，那麼算式 $2^p - 1$ 便可以計算出一個質數。例如：當 $p = 2$ 時，$2^2 - 1 = 3$，這是一個質數。又例如：當 $p = 3$ 時，$2^3 - 1 = 7$，這也是一個質數。事實上，當 $p = 2$、3、5 或 7 時，公式 $2^p - 1$ 的確能夠計算出質數！

但很可惜，當我們繼續算下去時，我們發現以後的數字中，並非每一個按照梅森公式計算出來的數都是質數。例如：當 $p = 11$ 時，$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$，這就不是質數了！

出現這個現象的原因是梅森先假設了公式 $x^n - 1$ 是一個質數，然後得出 x 必定是 2 和 n 必定是質數的結論。但反過來說，他並沒有保證當 $x = 2$ 和 n 是質數時，從公式 $x^n - 1$ 必定會得到一個質數！用數學的術語來說，梅森的公式只是提出了能算出質數的「必要條件」(即若 $x^n - 1$ 是一個質數，則 x 必須是 2 和 n 必須是質數)，但它們並不是「充分條件」(即「$x = 2$」和「n 是質數」不足夠保證 $x^n - 1$ 是一個質數)。

雖然梅森的方法會有失效的時候，但數學家亦發現，由公式計算出質數的機會很高。事實上，當 $p = 2$、3、5、7、13、17、19、31、61、89、107 或 127 時，$2^p - 1$ 都是質數。我們稱這些由 $2^p - 1$ 計算出來的質數爲「梅森質數」。

時至今日，因爲電腦主要利用二進數來進行運算，而這又正好和形如 $2^p - 1$ 的數字形式吻合，所以當人類找尋更大

的質數時，往往仍會用上梅森的公式。根據互聯網上的資料（網址爲：http://www.mersenne.org/），目前一共發現了 46 個梅森質數，其中最大的是 $2^{43,112,609}-1$，它有 12,978,189 個位，發現日期爲 2008 年 8 月 23 日。

費馬質數

梅森的好朋友費馬（1601 – 1665）亦提出過一條類似的質數公式。和梅森相反，他研究 $2^n + 1$ 的情況。

設 $n = ab$，且 b 是一個奇數，$b \geq 3$。令 $x = 2^a$，則 $2^n + 1 = (2^a)^b + 1 = x^b + 1 = (x + 1)(x^{b-1} - x^{b-2} + \cdots\cdots - x + 1)$（注意：只有當 b 爲奇數時，上式才成立）。很明顯，由於 $x + 1 \neq 1$，$2^n + 1$ 並非一個質數，因此如果 $2^n + 1$ 是質數，那麼 n 必定不能包含 1 以外的奇因子，即 n 必定是 2 的乘冪。換句話說，費馬的質數公式爲 $2^{2^n} + 1$。

不難驗證，$2^{2^0} + 1 = 3$，$2^{2^1} + 1 = 5$，$2^{2^2} +1 = 17$，$2^{2^3} + 1 = 257$，$2^{2^4} + 1 = 65537$，它們全都是質數（稱爲「費馬質數」）。問題是：以後的數字又是否質數呢？由於以後的數值增長得非常快（例如：$2^5 = 32$，2^{32} 已經是一個 10 位數了），因此即使是費馬本人也解答不到這個問題了。

最先回答上述問題的人，是 18 世紀瑞士偉大數學家歐拉（1707 – 1783）。歐拉出生於一個宗教家庭，17 歲已獲得碩士學位，一生都從事數學研究，縱使晚年雙目失明，仍不斷工作，可算是世上最多產的數學家。歐拉指出，$2^{2^5} + 1$ 並非質數。他的證明如下：

記 $a = 2^7$ 和 $b = 5$。

那麼 $\quad a - b^3 = 128 - 125 = 3$，

$$
\begin{aligned}
\text{而}\quad 1 + ab - b^4 &= 1 + (a - b^3)b = 1 + 3b = 2^4\text{。}\\
\text{所以}\quad 2^{32} + 1 &= (2a)^4 + 1\\
&= 2^4a^4 + 1\\
&= (1 + ab - b^4)a^4 + 1\\
&= (1 + ab)a^4 + (1 - a^4b^4)\\
&= (1 + ab)a^4 + (1 - a^2b^2)(1 + a^2b^2)\\
&= (1 + ab)[a^4 + (1 - ab)(1 + a^2b^2)]\text{，}
\end{aligned}
$$

即 $1 + ab = 641$ 可整除 $2^{32} + 1$。

所以 $2^{32} + 1$ 不是質數！命題得證。

到了今天，只要利用一部電子計算機便可以知道：$2^{32} + 1 = 4{,}294{,}967{,}297 = 641 \times 6{,}700{,}417$。同時，根據電腦的計算結果，當 n 大於 4 之後，由費馬公式計算出來的數，再沒有發現另一個質數了！不過，我們同時亦沒有一個數學方法來證明，費馬質數就只有上述的五個數。

自從歐拉證實 $2^{2^5} + 1$ 並非質數後，人們對費馬公式的興趣亦隨之大減。不過到了 1796 年，當年青的數學家高斯發表了他的研究結果後，費馬質數又再次引起人們的關注。

高斯（1777 － 1855），德國人，是一名數學天才。他 3 歲的時候已能指出父親帳簿中的錯誤。22 歲以前，已經成功地證明了多個重要而困難的數學定理。由於他的天分，因此後世人都稱他為「數學王子」。

高斯在 19 歲的時候發現，一個邊數為質數的正多邊形可以用尺規作圖法繪畫的充分和必要條件是：該質數是一個費馬質數！ 換句話說，除非我們再發現另一個費馬質數，否則

只有正 3 邊形（即等邊三角形）、正 5 邊形、正 17 邊形、正 257 邊形和正 63357 邊形可以用尺規構作出來，而其他的正質數多邊形便不可以只用尺規來繪畫了。高斯同時提出了一個繪畫正 17 邊形的方法，打破了自古希臘以來，能夠構作的正質數多邊形，最多只是正五邊形的紀錄。

哥德巴赫猜想

提到和質數有關的故事，便不可不提「哥德巴赫猜想」了。

哥德巴赫（1690 – 1764）是歐拉的朋友。1742 年，哥德巴赫向歐拉表示他發現每一個不小於 6 的偶數，都可以表示為兩個質數之和，例如：8 = 3 + 5、20 = 7 + 13、100 = 17 + 83 …… 等。哥德巴赫問歐拉這是否一個具一般性的現象。

歐拉表示他相信這是一個事實，但他無法作出證明。自此，人們便稱這現象為「哥德巴赫猜想」。

自從哥德巴赫提出他的猜想後，經過了整個 19 世紀，人們對這方面研究的進展非常緩慢。直到 1920 年，挪威數學家布朗證實每個偶數皆可以寫成兩個整數之和，其中每一個整數最多只有 9 個質因數。這可以算是一個重大的突破。

1948 年，匈牙利的瑞尼（1921 – 1970）證明了一個偶數必定可以寫成一個質數加上一個最多由 6 個質因子所組成的合成數。1962 年，中國的潘承洞證明了一個偶數必定可以寫成一個質數加上一個最多由 5 個質因子所組成的合成數，這結果簡稱為 (1 + 5)。

1963 年，中國的王元和潘承洞分別證明了 (1 + 4)。1965 年，蘇聯的維諾格拉道夫（1891 – 1983）證實了 (1 + 3)。1966

年，中國的陳景潤證明了 (1 + 2)。這亦是世上現時最接近哥德巴赫猜想證明的結果。

陳景潤(1933 – 1996)，福建省福州人。由於戰爭的關係，他自幼便在非常惡劣的環境下學習。1957 年獲得華羅庚的提拔，進入北京科學院當研究員。在「文化大革命」的十年中，陳景潤受到了批判和不公正的待遇，使他的工作和健康都大受傷害。1980 年，他當選爲中國科學院學部委員。1984 年證實患上了帕金遜症，直至 1996 年 3 月 19 日，終於不治去世。

除了對哥德巴赫猜想的供獻之外，陳景潤的另一個成就，就是對「孿生質數猜想」的研究。在質數世界中，我們不難發現兩個質數，它們是連續的奇數，例如：3 和 5、5 和 7、11 和 13、 …… 、10,016,957 和 10,016,959 …… 等等。所謂「孿生質數猜想」，就是認爲這些質數會有無窮多對。而在 1973 年，陳景潤證得：「*存在無窮多個質數 p，使得 $p + 2$ 為不超過兩個質數之積。*」

其實，在質數的世界之中，還有很多更精彩更有趣的現象，但由於篇幅的關係，未能一一盡錄。參考書目中的書籍，內容豐富，值得對本文內容有興趣的人士參考。

習題

1. 證明 $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots\cdots + x + 1)$，其中 n 爲正整數。

2. 對於正整數 n，當 n 爲奇數時，證明

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots\cdots - x + 1)。$$

   當 n 爲偶數時，討論爲何上式不能成立。

3. 試從互聯網上找出目前所發現的所有梅森質數。

4. 試找出以直尺和圓規繪畫等邊三角形、正五邊形和正十七邊形的方法。

參考書目

1. 王元（1997）。《素數》。台北：九章出版社（本書原本由廣東科出版社於 1996 年再版）。

2. 李學數（1978）。《數學和數學家的故事（1）》。香港：廣角鏡出版社。

3. 陳景潤、邵品琮（1993）。《世界數學名題欣賞　哥德巴赫猜想》。台北：九章出版社（本書原本由瀋陽：遼寧教育出版社於 1987 年出版，1995 年再版）。

4. Dunham, William 著，林傑斌譯（1995）。《天才之旅：偉大數學定理的創立》。台北：牛頓出版社。

第六章　身分證號碼：秘密中的秘密

在香港，每一個居民都獲發一張身分證，證上的號碼一共分爲 3 個部分：第一部分是由 1 個或 2 個英文字母組成，第二部分是 6 個數字，第三部分是括號內的 1 個數字或英文字母 “A”。例如：“H856249(2)”。

約在 20 多年前，身分證號碼原本是沒有那個括號部分的，只是在某一年，政府替市民更換了一張「電腦化」的身分證之後，才加上這部分。當年很多人對這部分甚感興趣，猜測那個括號中的數字究竟有甚麼意義，亦流傳了不同的說法。不過，自從有人在一些介紹趣味數學的刊物、電腦雜誌，或是教科書中解釋了這個數字是怎樣計算出來之後，這些猜測及傳聞便漸漸消失了。

原來，這個數字是用以下方法計算出來的：

身分證號碼的秘密

首先，我們將身分證號碼中第一部分的英文字母，按字母的次序轉換成一個數字。例如：將 “A” 轉換成 1，“B” 轉成 2，餘此類推。然後將身分證號碼中的每一個數字（包括由字母轉換成的數字），由左至右，分別乘以 8、7、6、5、4、3、2 等數值，並將結果加起來。如果第一部分有 2 個英文字母，那麼第一個字母應乘以 9，其他數字的處理則同上。

例如：在前面提及過的身分證號碼，如果不考慮括號內的數字，應該是 “H856249”。先將 “H” 轉換成 8，然後由左

至右乘以上述的數值並求和，得 218。

H	8	5	6	2	4	9	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
8×8	$+\ 8\times 7$	$+\ 5\times 6$	$+\ 6\times 5$	$+\ 2\times 4$	$+\ 4\times 3$	$+\ 9\times 2$	$=218$

跟著便可以按以下的步驟計算出括號中的數字：先將上述的總和除以 11，如果整除，那麼括號內的數字便等於 0；如果有餘數，那麼便將 11 減該餘數，所得的差就是括號內的數字了。若差等於 10，則將括號內的數字定爲 “A”。

例如：在前面的例子中，我們將 218 除以 11，得餘數 9，所以括號中的數字便等於 11 − 9 = 2，整個身分證號碼便變成 “H856249(2)” 了。

又如果身分證號碼是 “H856049”，那麼總和將會是 210，餘數是 1，差是 10，所以括號中的數字便是 “A” 了。

多此一舉？

原來身分證中的括號數字，就是這樣計算出來的！不過，大家有沒有想過，爲甚麼我們要在原有的身分證號碼後面，多加一個數字呢？將身分證號碼內的數字兜兜轉轉地計算一番，究竟有甚麼意義呢？

我曾經讀過一些文章，解釋使用括號數字的原因是爲了防止非法入境者僞造身分證！文章作者表示，因爲僞造身分證的歹徒並不知道身分證號碼的秘密，所以當警察在街上截查身分證時，可以通過以上的計算，分辨出身分證的真僞！

不消說，相信大家都會覺得以上的解釋荒謬之極！第一、既然我們可以知道身分證號碼的計算方法，僞造身分證

的人又怎會不知呢？第二、相信大多數人在計算上述身分證號碼的總和以及餘數時，都會利用計算機來輔助計算，我很懷疑在街上巡邏的執法人員，他們是否每一位都有如此強的心算能力，能夠即時進行上述的運算？故此，身分證號碼中的括號數字是用來防僞的解釋，似乎並不合理。

那麼，這個數字又有甚麼用處呢？

秘密中的秘密

大家知道，不同的人會有不同的身分證號碼，所以身分證號碼是一個用來識別市民的最簡單方法。在日常生活之中，我們有無數的場合需要這個號碼。正因爲它簡單，亦正因爲它重要，所以我們不應該在記錄或抄寫的過程之中，將身分證號碼搞錯，否則可能會帶來非常嚴重的後果。

但從前我們印發身分證的時候，所有號碼都是緊貼在一起的，例如："H856249" 這號碼之前的 "H856248" 和之後的 "H856250" 都屬於另一個人。萬一我們誤將 "H856249" 錯寫爲 "H856248"，那麼便會有麻煩了！但是，這只是一個數字之差，有時候亦不容易察覺得到。

爲了解決以上的問題，我們引入了括號內的數字。術語上，我們稱之爲「校驗位」(check digit)。引入這個校驗位的基本目的，是將原本緊貼在一起的號碼分開。因爲我們會從 0 至 9 或 A 中選擇其中一個數作爲校驗位，所以每個身分證號碼之間，彷彿多了一點的「距離」。

另外，當我們將身分證號碼輸入電腦時，我們同時可以指示電腦檢查那身分證的號碼是否正確，從而防止輸入資料時的人爲錯誤。事實上，檢查身分證號碼是否正確的方法，

比計算校驗位的方法直接得多，方法如下：

首先，我們依舊將身分證號碼中第一部分的英文字母轉換成數字。然後將身分證號碼中的每一個數字（包括校驗位），由左至右，分別乘以每個位的「位值倍數」，即 8、7、6、5、4、3、2 和 1（亦即是將校驗位乘以 1），並將結果加起來，成爲「核對值」。最後，將這個核對值除以 11。留意當初校驗位的選取，就是要令得這個「核對值」能夠被 11 整除。因此，如果我們發覺核對值不能被 11 整除，那麼輸入的身分證號碼便一定有錯了（注意：電腦的運算速度非常之高，將身分證號碼輸入電腦後，一按鍵，它便可以完成有關的驗算，相信連操作電腦的人，亦不會察覺到電腦其實已經做了多次的運算呢！）。

例如："H856249(2)" 是一個正確的號碼，按上述方法計算出的核對值等於 220。

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\mathrm{H} & & 8 & & 5 & & 6 & & 2 & & 4 & & 9 & & 2 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
8\times 8 & + & 8\times 7 & + & 5\times 6 & + & 6\times 5 & + & 2\times 4 & + & 4\times 3 & + & 9\times 2 & + & 2\times 1 & = & 220
\end{array}$$

明顯，220 這個數能夠被 11 整除。假如在輸入資料時，將其中 1 個位的數字或字母弄錯，例如：變成 "K856249(2)"、"H856049(2)" 或 "H856249(A)"，那麼計算出來的核對值便會分別地變成 244、212 和 228。由於這些數值都不能被 11 整除，因此我們便知道這些號碼有錯了。

事實上，如果一個身分證號碼的正確核對值爲 D，由右邊數起第 k 位的數字原本是 a，但在輸入資料時，錯誤地輸入成 b（$a \neq b$），那麼該核對值便會變成

$$D - a \times k + b \times k = D + (b - a) \times k$$ 。

留意在這裏，除非錯誤發生在第一個位的英文字母上，否則 $(b - a)$ 的絕對值和 k 都只會是 1 至 10 之間的數，不會大於 11，故此 $(b - a) \times k$ 這部分，不可能被 11 整除。但因爲 D 本身可以被 11 整除，所以整個核對值 $D + (b - a) \times k$ 便不能被 11 整除了。由此可以知道輸入的資料有錯。

當然，應用核對值的方法有一個「死穴」，就是在輸入頭一個字母時，如果錯誤地輸入了一個和原本字母相隔 11 個位的字母，例如：將 “H856249(2)” 錯誤地輸入成 “S856249(2)”（其核對值爲 308，可以被 11 整除），那麼電腦亦無法知道輸入的資料有錯了。

還有，如果輸入資料時出現 2 處或以上的錯誤，例如：將 “H856249(2)” 錯誤地輸入成 “H856049(A)”，那麼我們亦無法將錯誤檢查出來（當然，如果太容易出現 2 處的輸入錯誤，那麼我認爲最佳的解決辦法，就是更換那位輸入員，改用另一位更可靠的人選了！）。

另一個秘密

留意在前面的討論中，那個與位值對應的倍數 k 其實沒有多大的作用。事實上，如果我們不乘上任何的倍數，而直接將所有數字加起來，並將這個和當作是一個核對值，我們依然可以檢查出有 1 處輸入錯誤的資料。那麼，我們爲甚麼仍要加入這些與位值對應的倍數呢？

原來這是用來防止一個一般人容易犯上的錯誤，就是誤將其中兩個數字的位置對調。例如：將 “H856249(2)” 錯誤地變成 “H856294(2)”，即將從右方數起的第 2 和第 3 個數字

對調了。

我們再假設正確身分證號碼的核對值爲 D，第 k 位的數字爲 a，第 $k+n$ 位的數字爲 b（$a \neq b$；$1 \leq n$），如果我們錯誤地將 a、b 兩個數字對調了，那麼該核對值便會變成

$$D - a\times k - b\times(k+n) + a\times(k+n) + b\times k = D + (a-b)\times n$$ 。

同理，$(a-b)$ 的絕對值和 n 都只會是 1 至 9 之間的數，故此 $(a-b)\times n$ 這個部分，以及整個核對值，都不能被 11 整除，由此可知輸入的資料有錯了。如果沒有這個位值倍數，那麼我們便無法偵測出對調位置的錯誤。

總括而言，身分證號碼中的校驗位，是一個簡單但非常聰明的設計，它可以讓我們很容易地偵測出輸入資料時兩種常犯的錯誤，從而減少輸入不可靠資料的機會。在整個過程中，亦請大家留心欣賞 11 這個數字的功用。由於 11 是一個質數（而且剛好大於 10），任何兩個小於它的整數相乘，都不能被它整除，因此才能夠在上述運算中發揮作用。如果換了一個合成數，那麼情況便不同了。例如：12，我們知道 4 和 6 都小於 12，但 $4\times 6 = 24$ 卻能被 12 整除，因此 12 不可以用來做核對過程中的除數。

習題

1. 試計算以下身分證號碼的校驗位：

   A123456(　)、H970701(　)、G470630(　)

2. 試解釋爲甚麼當包括校驗位後，身分證號碼的核對值便必定能夠被 11 整除。

3. 如果在設計身分證號碼的校驗位時，並沒有加入位值倍數，而是將各數字直接加起來，試解釋爲甚麼這個校驗位仍可檢查出輸入的數字中有 1 處錯誤。又解釋爲何這方法未必能夠檢查出輸入中將其中兩個數字位置對調的錯誤。

4. 詳細分析爲何我們使用質數 11 作爲計算身分證號碼校驗位的除數，而不選擇其他的合成數或質數的原因。

第七章　三次方程風雲記 — 複數誕生的故事

先從二次方程談起

一般學生在初中或以前，便已經學過如何解一次方程(即形如 $ax + b = 0$ 的方程)。到了高中，亦學會解二次方程的方法。所謂二次方程，就即是形如 $ax^2 + bx + c = 0$ 的方程，其中 $a \neq 0$。

解二次方程主要有兩個方法：一、因式分解法；二、應用二次方程求根公式。因式分解法並不能用來解每一個二次方程，但求根公式便可以了。既然它是那麼的重要，現在就先和大家複習一次：

先將二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 移項並改寫成 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$。接著在兩邊加入一個適當的數值，使左邊成爲一個完全平方，

即由 $$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$$

得 $$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}。$$

兩邊取開方，得 $$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

最後得到 $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

這就是「二次方程求根公式」了。利用這個公式便可以解決

有關二次方程的問題，見以下兩例：

例一　　解 $5x^2 - 9x - 18 = 0$。

解　　與二次方程的一般式比較，我們有 $a = 5$，$b = -9$，$c = -18$ 。

$$\therefore \quad x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(5)(-18)}}{2(5)}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{441}}{10} = 3 \text{ 或 } -\frac{6}{5}\text{。}$$

例二　　解 $x^2 + 4x + 10 = 0$。

解　　這次有 $a = 1$，$b = 4$，$c = 10$ 。

$$\therefore \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2}\text{。}$$

由於負數是不能開方的，因此方程無解。

又，如果 α 和 β 是二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，那麼我們不難得知二次方程的兩根之和 $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$，兩根之積 $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$。

據說，二次方程求解的方法早在 4000 年前已經為巴比倫人所認識。當然，那時他們並沒有使用到現代的數學符號。而中國的古代算經《九章算術》中，亦有提及一些解二次方程的方法。由此可見，對於人類來說，解二次方程並不算是一項難題。

我們重視二次方程，是因爲它可以解決一些與面積有關的應用題。但我們卻是生活在一個三維的立體空間之中，很自然，我們亦應認識解三次方程的方法。

所謂三次方程，就即是指形如 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的方程，其中 $a \neq 0$。說也奇怪，人類在很早的時間已經認識二次方程的求根公式了，但經過一段非常長的時間，人類都無法找到一個合理和具有一般性的解三次方程方法。究竟數學家後來是如何解決這問題的呢？

風起雲湧時

經過了近一千年的黑暗時代之後，到了 14 世紀，歐洲進入了文藝復興時期。在這段期間，歐洲人一方面開始重新認識古希臘和古羅馬時代遺留下來的文化遺產，另一方面亦在和東方的阿拉伯世界經商的同時，汲取阿拉伯人的科學知識。

從地理上來看，最接近阿拉伯世界的歐洲國家要算是意大利，意大利亦是文藝復興時代中最繁榮的國家。相傳，在 1500 年至 1515 年間，意大利波倫亞大學數學教授費羅（1465 – 1526）從阿拉伯人那裏學會了解三次方程的方法，但他一直都守口如瓶，並沒有向外公開發表有關的內容。

在今天，當科學家發現了一個新的研究結果時，他們往往會立刻將結果公開發表，以防自己的成果被別人搶先發表出來。但爲甚麼費羅要將自己解三次方程的方法保密呢？原來這和當時學術研究的風氣有關。在那時候，科學家的收入都比較少，他們往往通過一些公開比賽或辯論，互相挑戰，靠戰勝對方而贏取獎金。如果將自己的結果公開，那麼他們便無法在比賽中獲勝了。

話說費羅一直保守著這個秘密，直到臨終時，才將方法傳授給他的女婿兼繼承人那發（1500 – 1558）和他的一名學生菲俄（1465 – 1526）。

據說，那發爲人非常低調，認識他的人並不多。相反，菲俄便不同了。他恃著他對三次方程的知識，四出向人挑戰，並自稱是世上唯一掌握解三次方程方法的人。

在意大利北部有一個邊境城市叫布里西亞，在 1512 年，意大利和法國的軍隊曾經在那裏發生了一場戰爭。當時只有 13 歲的豐坦那（1499 – 1557）差點兒死在法國軍人的刀下。雖然豐坦那能夠逃過大難，但臉上的傷卻令他成爲一個口吃者。自此，他便稱爲「塔塔利亞」，亦即是「口吃者」的意思。

塔塔利亞自小已經流露出數學的天分。他苦學成才，長大後移居威尼斯，成爲當地一名受人愛戴的數學教授。大約在 1530 年前後，爲了要解決某些數學問題，塔塔利亞發現了解一些特殊三次方程的方法。消息傳開後，卻引起菲俄的「不滿」，並於 1535 年，向塔塔利亞提出挑戰，比試解三次方程的能力。

事實上，塔塔利亞明白自己的方法只能解一些特殊的方程，對於一般情況，亦不甚掌握。所以，接受了挑戰後，他開始對解三次方程進行深入研究。據說，他終於在那年的 2 月 13 日，即比賽前的十天，想出了解一般三次方程的方法。

1535 年 2 月 22 日，萬眾期待的挑戰終於來臨。在威尼斯的一個廣場上，塔塔利亞和菲俄互相向對方提出了 30 個和三次方程有關的問題，看看誰人能夠最快解出所有答案。兩小時後，塔塔利亞順利地解出菲俄的所有問題，但菲俄卻對塔塔利亞的問題顯得一籌莫展，連一個也答不出來！

比賽的結果非常明顯，塔塔利亞大獲全勝！當然，這次的勝利爲塔塔利亞帶來很大的鼓舞，亦令他個人的聲譽一再提高。不過，與此同時，一些心懷不軌的人，卻希望可以從塔塔利亞處窺探出解三次方程的秘訣。

覬覦、失信與辯論

出生於米蘭的卡丹諾（1501 – 1576），有人認爲他是一個多才多藝的學者，亦有人認爲他是一個放蕩不羈的無賴。他精通數學、醫學、語言學、天文學，亦是一位占卜學家。他的行爲怪異，一生充滿傳奇，人們稱他爲「怪傑」。

在 1539 年 1 月，卡丹諾託人向塔塔利亞討教三次方程的解法，但遭到塔塔利亞的拒絕。據說，塔塔利亞原本打算寫一部有關代數的著作，並期望在該書之中公開發表有關解三次方程的方法。在成書之前，他當然不想將有關的方法轉告別人。

不過，在同一年的 3 月，塔塔利亞獲得一位身分神秘的人邀請前往米蘭，在途中，他並沒有和邀請者取得聯絡，相反，他在途中遇到了卡丹諾！卡丹諾不斷地游說塔塔利亞，並許下諾言，發誓絕不會泄露解三次方程的秘密。於是塔塔利亞便答應了卡丹諾的要求，把他的方法寫成了一首晦澀難懂的詩，告訴了卡丹諾。據說，這首詩是這樣寫的：

一個立方與倍數，合成某個不變量，

找出兩個新數目，相差剛好如定值；

緊記法則積應如，三分倍數之立方，

開立方後兩相減，循此道往功告成。

這首詩的確不易懂，但卡丹諾也真利害，就憑著這幾句詩，真的找出了解三次方程的方法！他還搶先一步，將這個方法詳細地發表在 1545 年出版的書《大術》之中！

在《大術》一書中，他坦白地承認這方法是從塔塔利亞那裏得來的，但他亦爲他違背承諾的行爲，給出了兩個解釋：

第一、在 1543 年，他在佛羅倫斯遇到費羅的女婿那發。從那發那裏，卡丹諾得知費羅早已懂得三次方程的解法，而且方法和塔塔利亞的大致相同。所以在某程度上說，他當時公開的方法，其實是費羅的方法（當然，這個解釋有一個很明顯的疑點：如果費羅的方法等同於塔塔利亞的方法，那麼爲甚麼在威尼斯的比賽中，菲俄會無法算出塔塔利亞的問題？）。

第二、卡丹諾的徒弟費拉里（1522 – 1565）借助三次方程，發現了四次方程的根式解。因此他必須在書中公開三次方程的解法，從而令到《大術》的內容變得完整。

當塔塔利亞知道卡丹諾公開了他的方法後，他多次向卡丹諾提出抗議和交涉，雙方繼而展開了一場書信罵戰。最後，這一場罵戰變成了一個公開辯論。

1548 年 8 月 10 日，塔塔利亞到了米蘭的一間教堂，準備和卡丹諾進行辯論。但結果出來面對塔塔利亞的，卻不是卡丹諾本人，而是他的徒弟費拉里。

費拉里當時只有 25 歲，正當盛年，而且又是四次方程解法的發現者，才思敏捷，口才了得。相比之下，塔塔利亞身處異鄉，說話口吃，自然處處受制於人。因爲塔塔利亞在辯論中未能回答費拉里所提出的一個問題，又因爲他不滿觀眾

和裁判的不公，所以那天晚上便匆匆地離開了米蘭，一場辯論便在不了了之的情況下結束。

自此之後，塔塔利亞再沒有發表有關三次方程解法的著作。他曾經計劃過要編寫的代數書，亦沒有出版。而解三次方程的方法，從此人們就稱之爲「卡丹諾公式」了。

卡丹諾公式：疑雲陣陣

一般的三次方程原本要寫成 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的形式，但卡丹諾卻應用了一個巧妙的方法，將原方程中的二次項消去，並轉化成 $x^3 = mx + n$ 的形式（詳細的轉化步驟，請參閱本文後面思考題中的第 3 題）。只要解得這方程的根，原三次方程的根亦可求得了。

至於方程 $x^3 = mx + n$ 是這樣解的：先將未知數 x 分拆成兩個未知數，即設 $x = z_1 + z_2$，然後代入上式得：

$$(z_1 + z_2)^3 = m(z_1 + z_2) + n,$$

展開得 $$z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) = m(z_1 + z_2) + n。$$

在這裏，大家要明白一個解方程的基本原理：求一個未知數，我們可以設一個方程來解。如果我們有兩個未知數，那麼我們便需要兩個方程了。但目前只得上面的一個方程，當中卻有兩個未知數 z_1 和 z_2，那怎麼辦呢？留意 z_1 和 z_2 是從 x 分拆出來的，分拆的時候，並未加上任何限制條件。故此，我們可以選擇一個適合我們計算的條件來分拆 x，從而使這條件成爲我們的第二個方程。

比較上面方程的左右兩方，一個最合理的選擇，自然是設 $3z_1z_2 = m$ 了。由此，上面的方程便會簡化成 $z_1^3 + z_2^3 = n$。

另外，自設的 $3z_1z_2 = m$ 亦可改寫成 $z_1^3z_2^3 = \left(\frac{m}{3}\right)^3$。

總括而言，我們有 $z_1^3 + z_2^3 = n$ 和 $z_1^3z_2^3 = \left(\frac{m}{3}\right)^3$。這裏，如果我們將 $z_1^3 + z_2^3$ 理解爲某二次方程的兩根之和，將 $z_1^3z_2^3$ 理解爲該方程的兩根之積，那麼我們可以將 z_1^3 和 z_2^3 理解爲二次方程 $y^2 - ny + \left(\frac{m}{3}\right)^3 = 0$ 的解。利用二次方程求根公式，

我們有 $y = \dfrac{n \pm \sqrt{n^2 - 4(\frac{m}{3})^3}}{2} = \dfrac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}$，

即可設 $z_1 = \sqrt[3]{\dfrac{n}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}}$ 和 $z_2 = \sqrt[3]{\dfrac{n}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}}$。

最後得 $x = z_1 + z_2 = \sqrt[3]{\dfrac{n}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\dfrac{n}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}}$。

這就是著名的「卡丹諾公式」，或者是「三次方程求根公式」了。大家可以通過以下的例題，看看這公式是否行得通：

例三　　解 $x^3 + 6x = 20$。

解　　與 $x^3 = mx + n$ 比較，我們有 $m = -6$，$n = 20$。

$\therefore \quad x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$。

當然，上式是不易簡化的。但利用一部電子計算機亦不難知道，x 應該等於 2。注意：$2^3 + 6 \times 2 = 20$。所以經驗算後，我們亦知道這答案是合理的。

再看一例：

例四　解 $x^3 = 15x + 4$。

解　在這裏，我們有 $m = 15$，$n = 4$。

$$\therefore \quad x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \text{。}$$

上面的算式中，根號下的數值是 -121，這是一個負數。根據我們解二次方程的經驗（例如前面的例二），這應該表示這個方程是沒有解的。

但細心想想：究竟是卡丹諾公式找不到解，還是方程真的沒有解呢？不難發現，由於 $4 \times 4 = 16$，因此 $4^3 = 16 \times 4 = 15 \times 4 + 4$，即 $x = 4$ 是方程的一個解！換句話說，雖然我們用卡丹諾的方法找不到解，但實際上這個方程是有解的！只不過是我們無法將它計算出來罷了！

爲甚麼會是這樣的呢？

到這裏，我們發現，雖然卡丹諾公式在某些情況下是正確的，但它同時卻爲我們帶來了一些疑問，例如：

1. 如何有效地簡化類似 $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$ 的算式呢？
2. 爲何在某些情況下，方程是有解的，但卡丹諾公式卻找不到呢？
3. 已知一次方程會有一個解，二次方程會有兩個解，那麼三次方程應該有三個解才對，但爲何卡丹諾公式卻只得一個解呢？

自從卡丹諾公式提出以後，以上問題便成爲當時數學家研究的主要課題，並希望能夠找到一個圓滿的解答。

大膽嘗試

在 1558 年，即《大術》一書出版之後 15 年，數學家邦別利（1526 – 1572）出版了一本名為《代數》的書。在書中，他不單改進了三次方程和四次方程的解法，亦提供了簡化答案的方法。我們可以通過以下例子來解釋：

假設 $a+\sqrt{-b}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$，$a-\sqrt{-b}=\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$，其中 a、b 為正整數。將兩式相乘，得

$$a^2+b=\sqrt[3]{2^2+121}=5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

將前面的第一式立方得 $a^3+3a^2\sqrt{-b}-3ab-b\sqrt{-b}=2+\sqrt{-121}$。比較沒有根號的部分，得

$$a^3-3ab=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

由於我們預設了 a、b 為正整數，因此從 (1) 式，我們只有兩組可能答案：$a=1$，$b=4$ 和 $a=2$，$b=1$。但因為只有後者才滿足 (2) 式，所以邦別利認為 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$，而 $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$。由此，例四便得到 $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$ 的答案了。

當然，邦別利在計算過程之中引入了很多大膽的假設，而且這方法對一般的根式亦不一定可行。但無論如何，邦別利已經將負數開方引入代數運算之中。雖然他亦表示，他對負數開方仍感到疑惑，但他可以算是歷史上第一個運用複數來解決問題的數學家了。

另闢蹊徑

在 1591 年，法國業餘數學家韋達（1540 – 1603）提出另一個解三次方程的方法，非常值得注意。

同樣是解方程 $x^3 = 15x + 4$。韋達先令 $x = nz$，則方程變成

$$(nz)^3 = 15\,nz + 4\text{，}$$

即

$$z^3 = \frac{15}{n^2}z + \frac{4}{n^3} \quad \text{......................}(3)$$

在三角恆等式 $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ 中，若令 $Z = \cos A$，則恆等式變成

$$Z^3 = \frac{3}{4}Z + \frac{1}{4}\cos 3A \quad \text{..................}(4)$$

比較 (3) 和 (4) 式，得 $\frac{15}{n^2} = \frac{3}{4}$，$\frac{4}{n^3} = \frac{1}{4}\cos 3A$。

解第一部分得 $n = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$。將結果代入第二部分，得 $\cos\ 3A = \frac{16}{(2\sqrt{5})^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$，即 $A = 26°34'$ (*)。故此，$x = nz = 2\sqrt{5}\ \cos 26°34' = 4$。

後來，有數學家指出，韋達的方法可以用來求出三次方程的另外兩個解！留意 $\cos 3A = \cos(3A + 360°) = \cos(3A + 720°)$，所以除了 $A = 26°34'$ 外，$26°34' + 120° = 146°34'$ 和 $26°34' + 240° = 266°34'$ 亦應該可以求出方程的解。故此，除了 $x = 4$ 之外，$x = 2\sqrt{5}\cos 146°34' = -3.732$ 和 $x = 2\sqrt{5}\cos 266°34' = -0.268$，亦是方程的兩個解。

韋達的方法成功地解決了如何求得三次方程所有解的問題，亦爲解三次方程的問題開闢了一條新的蹊徑，從而避開使用負數開方的困境。

(*) 當時數學家當計算角度時，仍使用 60 進制，即 $1° = 60'$。而 $34' = (\frac{34}{60})°$。

1637 年，另一位法國哲學家，坐標幾何的創始人笛卡兒（1596 – 1650）在他的著作中，批評了使用負數開方的計算方法，他稱一個負數開方爲「虛數」，並表示不能接受虛數爲數字的一種。但荷蘭數學家吉拉德（1595 – 1632）則認爲，因爲虛數能夠肯定一般運算的法則，它亦能表示方程的解，所以人們應該承認虛數。況且，除此之外，再沒有其他可能的解了。儘管如此，17 世紀的數學家對虛數以至是複數（即由實數和虛數所組成的數字）的使用，都是有所保留的。

風雲漸退，曙光初露

到了 17 世紀和 18 世紀的交接期間，法國一位數學家提出了一個重要的理論，開始解開卡丹諾公式之謎。他就是棣美弗（1667 – 1754），而他所提出的理論，就是日後每個學習複數的人必讀的「棣美弗定理」。

借助現代的數學符號，棣美弗定理是這樣表示的：

定理　$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$；其中 n 爲正整數，$i = \sqrt{-1}$。

定理的證明並不難，首先考慮

$$
\begin{aligned}
& (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\
= \;& \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) \\
= \;& \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi),
\end{aligned}
$$

由此結果再加上數學歸納法，便可以推得定理對一切正整數 n 成立。

利用棣美弗定理我們發現：

$$1^3 = 1、$$

$$(\cos 120° + i \sin 120°)^3 = \cos 360° + i \sin 360° = 1 \text{ 及}$$

$$(\cos 240° + i \sin 240°)^3 = \cos 720° + i \sin 720° = 1。$$

故此，以複數來說，方程 $z^3 = 1$ 應該有三個解，分別爲 1、$\cos 120° + i \sin 120°$ 和 $\cos 240° + i \sin 240°$。或者我們設 $\omega = \cos 120° + i \sin 120°$，那麼 $z^3 = 1$ 的三個解便是 1、ω 和 ω^2 了。

回看我們推算卡丹諾公式的過程，當我們知道 $z^3 = \frac{n}{2} \pm \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{m}{3})^3}$ 時，我們只將 z_1 和 z_2 分別地設定爲 $\sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{m}{3})^3}}$ 和 $\sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{m}{3})^3}}$，而忽略了另外兩個複數解的可能性，這當然是不正確的。事實上，z_1 應該有三個答案，分別爲

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{m}{3})^3}} \text{ 、}$$

$$\omega \times \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{m}{3})^3}} \text{ 和}$$

$$\omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 - (\frac{m}{3})^3}} \text{ 。}$$

而 z_2 亦應有類似結果。

大家可能會問，如果 $x = z_1 + z_2$，而 z_1 和 z_2 又各自有 3 個答案，那麼 x 的答案豈不是有 $3 \times 3 = 9$ 個嗎？

大家請放心，這是不會發生的。不要忘記，我們對 z_1 和 z_2 有一個限制條件，就是 $z_1 z_2 = \frac{m}{3}$，換句話說，z_1 和 z_2 的乘積必定是一個實數。在 9 個組合之中，剛巧只有 3 個組合能夠滿足這個條件，故此，卡丹諾公式應該修正爲：

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}}\text{、}$$

$$\omega \times \sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}} \text{ 或}$$

$$\omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}}\text{。}$$

棣美弗的理論不單解釋了卡丹諾公式所帶來的種種疑問，而且更可以將韋達以三角恆等式來解三次方程的方法統一起來。可見這理論的重要性。

撥開雲霧，新國度的來臨

在棣美弗的理論中，他引入了一個很奇特的數字組合：$\cos x + i \sin x$。其實，這個數有甚麼特點和甚麼意義呢？

第一個爲這個數作出解釋的，應該是瑞士偉大數學家歐拉（1707 – 1783）。1748 年，歐拉發現了複數指數函數和三角函數關係，並寫出了以下的公式：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad ,$$

初步爲複數的算術理論奠定基礎。

事實上，「複數」一詞亦是由歐拉提出的。1777 年，在他的著作《微分公式》中，歐拉首次使用「i」這個符號來代表 $\sqrt{-1}$ 。到了今天，我們仍然跟隨他使用這個記號。他亦創立了複變函數論，並把它們應用到水力學、地圖製圖學上。在 1770 年，他率先應用複數去證明費馬最後定理當 $n = 3$ 時成立(*)。雖然他的證明並不完整，但他已經將複數的應用帶

(*) 在本書的第八章中亦有簡介歐拉的證明。

領至一個新的境界。

1797 年，挪威數學家維塞爾（1745 – 1818）爲複數提出了一個幾何解釋。一直以來，人們都認爲數字可以和直線上的點建立一個一一對應的關係，即是說，所有的數字都可以放在一條直線上排列出來。維塞爾則指出，以上的解釋只可以用來解釋實數的位置，如果連同虛數部分計算在內，那麼一個複數便應該理解成平面上的坐標，坐標中的 x 坐標和 y 坐標，便等同於複數中實數和虛數兩個部分。同時，一個複數亦可以用「極坐標」的形式來表達，即 $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（諷刺的是，坐標幾何的始創人笛卡兒卻不承認虛數的存在！）。

1806 年，法國數學家阿根（1768 – 1822）亦提出類似的解釋。自此，人們亦稱複數平面爲「阿根圖」。

在維塞爾提出複數幾何解釋的同一年，當時只有 20 歲的德國數學家高斯（1777 – 1855）成功地證明了「代數基本定理」，並因而取得他的博士學位。代數基本定理最先是由吉拉德於 1629 年提出的，這定理說：「**任意次數不少於一的複係數多項式方程，至少有一個複數解。**」

大家都知道，當我們解一次或二次方程時，我們會產生一些新類型的數字。例如：解一次方程時會產生負數和有理數，解二次方程會出現無理數甚至乎是複數，那麼解更高次的方程時，會否出現另一種的數字類型呢？代數基本定理說明，在解更高次方程的過程中，不會再產生新類型的數字了。高斯對此定理非常重視，因此在他的一生之中，爲此定理提供了 4 個不同的證明。

到了 19 世紀，複變函數的理論已經十分成熟，並深刻地

滲入各個數學分支和物理學之中。20 世紀以來，複變函數更廣泛地應用到各個領域之中，一些看似與複數無關的實數或整數問題，都可以利用複數理論來解決。法國數學家阿達瑪（1865 – 1963）曾經利用複數理論證明了著名的「質數定理」。在總結他的成果時，他說：「**在實數域中，兩個真理之間的最短路程將會經過複數域。**」很多人都同意，這句說話最能反映現今數學研究的情況。

思考題

1. 試利用二次方程求根公式，求方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的複數解。

   我們將從上面求得的兩個解分別稱爲 ω_1 和 ω_2。證明

   (a) $\omega_1 + \omega_2 = -1$；$\omega_1\omega_2 = 1$，

   (b) $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 1$，

   (c) $\omega_1^2 = \omega_2$；$\omega_2^2 = \omega_1$，

   (d) $(\omega_1)^{-1} = \omega_2$；$(\omega_2)^{-1} = \omega_1$。

   注意：

   一、將哪一個解叫做「ω_1」或「ω_2」對證明都沒有影響。

   二、我們可以利用 ω_1 和 ω_2 的數值直接計算出以上的結果，同時亦可以透過二次方程根的性質作出證明。大家應盡量找出不同的證明方法，越多越好。

   三、從 (b) 可知，ω_1 和 ω_2 其實是三次方程 $z^3 = 1$ 的兩個非實數解。亦請想想，$z^3 = 1$ 的實數解是甚麼？

2. 解三次方程 $x^3 - 15x - 126 = 0$。

提示：1. 令 $x = z_1 + z_2$。

2. 再令 $3z_1z_2 = 15$（為甚麼？）。

然後證明 $z_1^3 + z_2^3 = 126$ 和 $z_1z_2 = 5$ .... (*)

3. 證明 z_1^3 和 z_2^3 滿足二次方程

$y^2 - 126y + 125 = 0$ .... (#)

4. 解 (#)。

5. 由此寫出三個複數對 (z_1, z_2)，使其滿足(*)。

6. 最後寫出原三次方程的所有解。

3. 解三次方程 $x^3 + 6x^2 + 3x + 18 = 0$。

提示： 先令 $x = y - 2$（為甚麼這樣做？這樣做會有甚麼好處？）。然後依照第 2 題的步驟解這方程。

4. 設 $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = a+\sqrt{b}$ ， $\sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = a-\sqrt{b}$ ，其中 a、b 爲正整數。

證明 (a) $a^2 - b = -2$ ，

(b) $a^3 + 3ab = 10$ 。

由此將 $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$ 簡化成 $a+\sqrt{b}$ 的形式，

並證明 $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2$。

5. 求三次方程 $x^3 = 15x + 4$ 的根式解。

提示：大家可利用餘式定理等方法，先求這方程的解。然後用第 2 題的方法和第 4 題的簡化方法再做一次。試比較這兩種方法和結果。

6. 試解釋以下一首詩的意義：

一個立方與倍數　合成某個不變量
找出兩個新數目　相差剛好如定值
緊記法則積應如　三分倍數之立方
開立方後兩相減　循此道往功告成

提示：詩的第一、二句指求解方程 $x^3 + cx = d$，其中「倍數」是方程中的係數 c，「不變量」是常數項 d，亦即是下文的「定值」。

附錄：四次方程的解法

解方程 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$，其中 p、q 及 r 爲實數。

解　先移項得　$x^4 + px^2 = -qx - r$。

將方邊配方得　$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$，

所以　$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2$。

我們在等式的兩邊再多加一個未知數 y，目的是令左方可以進一步配方：

$$(x^2 + p)^2 + \mathbf{2y(x^2 + p) + y^2} = px^2 - qx - r + p^2 + \mathbf{2y(x^2 + p) + y^2}，$$

$$\therefore (x^2 + p + y)^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2) \ldots\ldots (*)$$

若上式右方是一個完全平方，則其判別式 Δ 必須等於 0，

即　$\Delta = (-q)^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$，

$$(q^2 - 4p^3 + 4pr) + (-16p^2 + 8r)\,y - 20py^2 - 8y^3 = 0。$$

由此三次方程先求出 y，然後代入 (*)。這時候，(*) 兩邊均爲完全平方。將兩邊開方可得兩個關於 x 的二次方程，從而解得 x 的四個根。

注意：若給定四次方程 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$，其中 a、b、c、d 及 e 爲實數，$a \neq 0$，則可先將全式除以 a，然後應用思考題中第 3 題的方法將方程中的三次項消去，從而轉化爲前面 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 的形式來求解。詳細計算步驟則留給讀者自行探究，不再贅述。

參考書目

1. 王幼軍、金之明編著（1998）。《著名數學家和他的一個重大發現》。山東科學技術出版社。

2. 吳文俊主編（1995）。《世界著名數學家傳記（上、下集）》。北京：科學出版社。

3. 克萊因（1979）。《古今數學思想（第一至第四冊）》。上海科學技術出版社。

4. 傅鍾鵬（1987）。《三次方程風雲記》。天津：新蕾出版社。

5. 解延年、尹斌庸編著（1987）。《數學家傳》。湖南教育出版社。

6. 鍾玉泉編（1984）。《複變函數》。河北：高等教育出版社。

7. Daintith, John & Nelson, R.D. 著、余文卿、謝暉光譯（1997）。《牛頓數學辭典》。台北：牛頓出版股份有限公司。

8. Katz, Victor J. (1993) “A History of Mathematics, An Introduction.” New York: Harper Collins College Publishers.

9. Stewart, Ian (1987) “From Here to Infinity.” New York: Oxford University Press.

第八章　費馬最後定理

出謎者與他的謎題

費馬（1601 – 1665），法國人，正職爲律師，1631 年出任圖盧茲的議院顧問，即當地的法官。由於他的工作要他保持一個公正和獨立的形象，因此他平時絕少與其他人接觸，在空餘時間只會留在自己的書房內研習數學。當他研習數學時，亦非常專注，甚至會廢寢忘餐。據說，在他死後，當他的兒子爲他收拾書房時，竟然可以在層層的紙張之下，發現多份未曾吃過的食物！

費馬爲人謙虛謹慎，淡薄名利，作風低調，只會在和朋友的書信和自己的筆記中，記錄他的數學思想。又因爲他只是業餘性質地去研習數學，所以並沒有完整的研究記錄，亦沒有非常深入地探究每一項細節。甚至有些項目，只是得到一些大概的想法，便會轉去研究另一個課題。但大家不要因爲他是一個業餘數學家而看不起他，相反，他在數學方面的才華和洞察力，比很多專門的數學家還高。他是現代幾何學、坐標幾何、概率論、微積分、數論等學問的先驅。在他一生中，他曾經提出過無數的數學命題、定理和猜想，雖然並非每一個問題費馬都能夠給出圓滿而正確的解答，但是大多數由費馬提出的命題，後來都能夠獲得證實。不過當中有一個命題，卻難倒了以後 300 多年的一流數學家！

大約在 1637 年，費馬收到了一份禮物，那是古希臘數學家丟番圖（約 200 – 約 240）的名著《算術》的拉丁文譯本。當閱讀到第二卷的第八命題時，他就在書邊的空白地方寫下

了以下的一段說話：「將一個立方數分成兩個立方數，一個四次冪分成兩個四次冪，或者一般地將一個高於二次冪的數分成兩個相同次冪，這是不可能的。我對這個命題有一個美妙的證明，這裏空白太小，寫不下。」在這裏，費馬所指的「數」就是我們經常說的「正整數」。因此，轉換成現代的數學術語，費馬的意思就是說：「當整數 $n > 2$ 時，方程 $x^n + y^n = z^n$ 沒有整數解。」

費馬相信自己已經發現了一個方法來證明這個命題，只是那本書的空白地方太少，未能寫下他的證明。但有趣的是，當費馬死後，他的兒子爲他收拾書房時，並沒有發現他那個「美妙的證明」。究竟，費馬是否證明了這個命題呢？費馬這個命題又是否正確的呢？

相信當大家看到費馬命題中那個「$x^n + y^n = z^n$」的方程時，一定會聯想到一個著名而重要的幾何定理，那就是勾股定理：「在 ΔABC 中，若 $\angle C$ 為直角，則 $a^2 + b^2 = c^2$，其中 a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊。」這不單是一個重要的幾何定理，有趣的是，我們可以發現不少正整數的組合，能夠滿足以上的算式，例如：$3^2 + 4^2 = 5^2$、$5^2 + 12^2 = 13^2$、$8^2 + 15^2 = 17^2$、$7^2 + 24^2 = 25^2$ …… 。習慣上，我們稱數字組合 $(3, 4, 5)$、$(5, 12, 13)$、$(8, 15, 17)$ …… 爲方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的「整數解」。

前面提到《算術》的第二卷第八命題是這樣的：「將一個平方數分為兩個平方數。」即找出方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的所有整數解。據說，費馬利用了他發明的「無窮遞降法」（無窮遞降法的解釋，將會在後面給出）來解此題，並得到以下的結果：「如果正整數 x、y 和 z 滿足 $x^2 + y^2 = z^2$，並且 x 和 y 互質（即

沒有大於 1 的公因數)，y 為偶數，那麼 x、y、z 可以寫成 $x = u^2 - v^2$，$y = 2uv$，$z = u^2 + v^2$，其中 u、v 是互質的正整數，$u > v$，並且它們的奇偶性相反。」

相信當費馬解出此題的答案時，應該是滿心歡喜的，並且希望將這問題推廣至更高次冪之上，即當 $n > 2$ 時，方程 $x^n + y^n = z^n$ 有沒有整數解呢？經過一輪思考後，費馬認爲那方程是沒有解的，因而在書中寫下上述的一段筆記。

費馬的命題「當整數 $n > 2$ 時，方程 $x^n + y^n = z^n$ 沒有整數解。」並不難理解，如果大家利用計算機輸入一些數字來研究一下(注意：費馬的時代並未發明任何電子計算工具)，那麼亦會「相信」費馬這個命題是正確的。不過，一些簡單的測試並不能代替嚴謹的數學證明。問題是，我們能否證明費馬這個命題是正確的呢？

由於費馬在生時提出的其他數學命題，都已經由後來的數學家所證實或否定，就只剩下這一個看似正確的命題，經過了 300 多年的時間，仍然未能獲得證實或否定，因此近代的數學家都稱這命題爲「費馬最後定理」或「費馬大定理」。

當 $n = 4$ 時的證明

雖然我們未能發現費馬對這最後定理的證明，但是對證明這定理行出第一步的人，卻又是費馬本人！費馬曾在寫給朋友的書信中，提及方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 無整數解，但沒有寫出詳細的證明步驟。1674 年，數學家貝西在小量的提示下，給出這個情形的證明。證明步驟主要使用了費馬所發明的無窮遞降法。

費馬首先假設方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 是有整數解的(注意：z

的次冪是 2，不是 4)，即是存在三個正整數 x、y 和 z，並且 $x^4 + y^4$ 剛好等於 z^2。我們亦不妨假設 x 和 y 互質；否則我們可以先將等式左右兩方的公因子消去。

同時，我們知道 x、y 兩數的奇偶性必定相反。事實上，若 x、y 同時是偶數，那麼它們便有公因子 2，即 x 和 y 並非互質，和先前的設定矛盾！若 x、y 同時是奇數，那麼可以設 $x = 2p + 1$ 和 $y = 2q + 1$。展開 x^4 得 $(2p)^4 + 4(2p)^3 + 6(2p)^2 + 4(2p) + 1$，留意展式前 4 項都可以被 4 整除，所以我們可以將 x^4 的展式改寫成 $4P + 1$ 的形式，其中 P 爲某一整數。類似地，我們亦有 $y^4 = 4Q + 1$，Q 爲另一整數。由此得 $z^2 = x^4 + y^4 = (4P + 1) + (4Q + 1) = 4(P + Q) + 2$，即 z^2 除以 4 後餘數是 2。但這是不可能的：若果 z 是偶數，則 $z = 2r$，$z^2 = 4r^2$，它是 4 的倍數；又若果 z 是奇數，則 $z = 2r + 1$，$z^2 = 4r^2 + 4r + 1$，它除以 4 後的餘數必定是 1，不是 2。因此 x、y 不可能同時是奇數。

由於 x、y 不可能同時是奇數或同時是偶數，因此它們的奇偶性必定相反。在此，我們亦不妨設 y 爲偶數。

費馬將方程改寫成 $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$。因爲 x 和 y 互質，y 爲偶數，所以 x^2 和 y^2 也互質，y^2 亦爲偶數。由此他便可以應用他在《算術》第二卷第八命題的結果，將上面三個數分拆成 $x^2 = a^2 - b^2$，$y^2 = 2ab$，$z = a^2 + b^2$，其中 a、b 互質，$a > b$，並且是奇偶性相反的正整數。注意：因爲 x 爲奇數，所以 x^2 必定爲 $4n + 1$ 的形式。又假如 a 爲偶數（$a = 2h$），b 爲奇數（$b = 2k + 1$），則 $4n + 1 = x^2 = a^2 - b^2 = (2h)^2 - (2k + 1)^2 = 4(h^2 - k^2 - k) - 1$，但在此等式中，左方是 $4n + 1$ 的形式，而右方卻是 $4N - 1$ 的形式，彼此矛盾！所以，亦可以肯定 a 是

奇數，b 是偶數。

若將等式 $x^2 = a^2 - b^2$ 改寫成 $x^2 + b^2 = a^2$，則不難證明 x、b 亦互質（怎樣證明？）。又由於 b 是偶數，因此可以再利用前面的結果得 $x = c^2 - d^2$，$b = 2cd$，$a = c^2 + d^2$，其中 c、d 互質，$c > d$，並且是奇偶性相反的正整數。再由 $y^2 = 2ab = 4cd(c^2 + d^2)$ 可知，由於等式的左方為一平方數，而右方的三個數 c、d 和 $(c^2 + d^2)$ 彼此互質，因此 c、d 和 $(c^2 + d^2)$ 都是平方數。於是可以設 $c = e^2$，$d = f^2$，$c^2 + d^2 = g^2$。換句話說，我們得 $e^4 + f^4 = g^2$。

到這裏，我們得到方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 的另一組整數解 (e , f , g)。同時亦知道 $z = a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2 + 4c^2d^2 > g^4 > g$。即是說，如果從一組正整數解 (x , y , z) 開始，那麼必定可以找到另一組正整數解 (e , f , g)，其中的 g 比 z 小。依此類推，可以找到另一組包含比 g 更小的正整數解。亦可按類似的想法，不斷地找到一個比前一個數更小的正整數，成為方程的解。但是，這是不可能的！因為無論 z 有多麼大，它始終都是一個有限的正整數，所以不可能像前面所說般，不斷地將方程的解無窮地遞降下去（試想想：若將方程的解 z 遞降 z 次之後，那個解會是多少呢？）！由此可知我們最初的假設不正確，即方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 不可能有整數解。

最後，方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 亦不可能有整數解；否則若 (a , b , c) 為方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 的整數解（即 $a^4 + b^4 = c^4$），那麼 (a , b , c^2) 便是方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 的整數解（即 $a^4 + b^4 = (c^2)^2$）！由此，費馬證明了，當 $n = 4$ 時，費馬最後定理成立。

看過這個證明，相信大家都會明白，為甚麼整個費馬最後定理的證明會是那麼困難的了。不過，參考過費馬的方法

後，我們亦可以斷言：對於任何正整數 k，方程 $x^{4k}+y^{4k}=z^{4k}$ 亦沒有整數解；否則若 (a, b, c) 爲 $x^{4k}+y^{4k}=z^{4k}$ 的解，那麼 (a^k, b^k, c^k) 便變成 $x^4+y^4=z^4$ 的解，但這是不可能的。同樣道理，只要我們能夠證明，對於任何一個奇質數 p，方程 $x^p+y^p=z^p$ 沒有整數解，那麼對於一切的合成數 n，方程 $x^n+y^n=z^n$ 亦沒有解，費馬最後定理便會成立。

當 $n=3$、5、7 時的證明

爲費馬最後定理的證明踏出另一步的人，是瑞士的偉大數學家歐拉（1707 – 1783）。在 1770 年（即在命題提出之後 133 年），他利用了複數 $a+b\sqrt{-3}$ 的性質，嘗試證實方程 $x^3+y^3=z^3$ 沒有整數解。但由於歐拉在他的證明中，在沒有足夠論據的支持下，認爲複數 $a+b\sqrt{-3}$ 的立方根必定可以再次寫成 $a+b\sqrt{-3}$ 的形式，因此他的證明未算完美。又過了近半個世紀，歐拉證明中的缺憾才由德國數學家高斯（1777 – 1855）成功地填補。爲了清楚地解釋他的想法，高斯更爲此引進了「複整數」的概念（即形如 $a+b\sqrt{-k}$ 的複數，其中 k 爲正整數，a 和 b 爲整數）。

在高斯的同一時代，在法國有一位女性，她對費馬最後定理的證明亦有重要的供獻，她名叫熱爾曼（1776 – 1831）。

熱爾曼自小就熱愛研究數學，但可惜由於她是女性，因而未能得到當時學界中其他男性的認同。亦因此，熱爾曼曾經化名成「勒布朗先生」，與當時的數學家通信，其中包括高斯。在寫給高斯的信中，熱爾曼提出了一個研究費馬最後定理的新方向：對於方程 $x^n+y^n=z^n$，其中 n 爲奇質數，她將問題分作兩個情況處理，其一是 n 不能整除 xyz；其二是 n 能夠整除 xyz。由此，熱爾曼證明了一個後世稱之爲「熱爾曼定

理」的結果：「**如果 p 是一個奇質數，並且 $2p+1$ 亦是質數，那麼對於 $n=p$，費馬最後定理的第一情況成立。**」

在 100 以內，能夠滿足熱爾曼定理要求的質數有：3、5、11、23、29、41、53、83 和 89。因此當 n 等於以上數字時，熱爾曼證明了費馬最後定理的第一情況成立。雖然熱爾曼並未能作出對第二情況的證明，她的證明不算圓滿，但是她卻提出了一個新方法，不是對個別的奇質數作證明，而是對一些有特定性質的質數作證明，這可以算是證明費馬最後定理的一大突破。

1823 年，71 歲高齡的法國數學家勒讓德（1752 – 1833）提出了費馬最後定理當 $n=5$ 時的證明。1828 年，年青的德國數學家狄利克雷（1805 – 1859）亦獨立地證得同樣的結果，可算是後生可畏。據說，其後狄利克雷打算找出當 $n=7$ 時的證明，可惜未能成功。到了 1832 年，他修訂了自己的方法，卻得到當 $n=14$ 時費馬最後定理的證明。

1839 年，另一位法國人拉梅（1795 – 1870）得到當 $n=7$ 時的證明。1847 年的 3 月，拉梅更宣稱他已經完成了費馬最後定理的整個證明！

拉梅將 x^n+y^n 分解成 $(x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\ldots(x+\zeta^{n-1}y)$，其中 $\zeta=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，即 ζ 爲方程 $r^n=1$ 的一個複數根。既然 $x^n+y^n=z^n$，z^n 是一個 n 次冪，那麼拉梅認爲將 x^n+y^n 分解後的每一個 $(x+\zeta^k y)$ 亦應該是一個 n 次冪乘以一個複數單位，從而可導出矛盾，並能證明費馬最後定理成立。不過，拉梅的好友劉維爾（1809 – 1882）指出，拉梅的證明存在著一個很大的漏洞，這是因爲拉梅所構作的複

數根，並不能夠滿足「唯一分解定理」，所以上述推理不一定成立！

甚麼是「唯一分解定理」？在正整數的世界裏，每一個合成數都只可能分解成唯一的質因數連乘積。但在某些複整數世界中，情況就不同了。例如：在形如 $a + b\sqrt{-5}$ 的複整數世界裏，$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5}) \times (1 - \sqrt{-5})$，而，2、3、$(1 + \sqrt{-5})$ 和 $(1 - \sqrt{-5})$ 都是互不相同的「質數」，所以 6 可以分解爲兩種不同的「質因數」連乘積。換句話說，形如 $a + b\sqrt{-5}$ 的複整數世界，並不符合唯一分解定理。

如果能夠滿足唯一分解定理，那麼當 $z^n = hk$，並且 h 和 k 互質時，我們便確信可以找到兩個互質的正整數 u 和 v，使 $h = u^n$ 和 $k = v^n$。請注意：在 $n = 4$ 的證明中，費馬亦曾經由 $y^2 = 4cd(c^2 + d^2)$ 推出 c、d 和 $(c^2 + d^2)$ 都是平方數的結論。換句話說，費馬已使用了正整數世界裏的唯一分解定理了。

但如果未能滿足唯一分解定理，那麼以上的推論便不一定成立了。例如：在形如 $a + b\sqrt{-5}$ 的複整數世界中，$6^2 = 2 \times 3 \times (1 + \sqrt{-5}) \times (1 - \sqrt{-5})$，而右方的四個數都不是平方數。故此，當 $6^2 = hk$ 時，即使 h 和 k 互質，我們亦不能肯定 h 和 k 是不是平方數，例如：我們可以有 $h = 2 \times (1 + \sqrt{-5})$，而 $k = 3 \times (1 - \sqrt{-5})$。這一點，正好是拉梅證明的一大缺口。

爲了解決未能滿足唯一分解定理所帶來的問題，德國數學家庫默爾（1810 – 1893）於是提出了「理想數」的想法。

已知 n 爲一個質數，$\zeta = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 爲方程 $r^n = 1$ 的複數根，則稱形如 $a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$ 的數爲「分圓整數」，其中 a_i 爲整數。並非每一個分圓整數集合

都滿足唯一分解定理。但庫默爾發現，當 n 為一些特殊的質數時（他稱之為「正規質數」），只要加入一個額外的「數」（他稱之為「理想數」），便能夠令該分圓整數集合滿足唯一分解定理，由此便可以利用理想數來證明費馬最後定理在那些情況下成立。

庫默爾發現，在 100 以內的質數中，只有 37、59 和 67 不是正規質數。由此，他證明了當 $n < 100$ 時，費馬最後定理成立。

為了表揚庫默爾對費馬最後定理研究的供獻，在 1857 年，巴黎科學院決定將原本打算頒發給能夠完全解決費馬最後定理的人的獎金 3000 法郎，改為頒發給庫麥爾。

無數英雄盡折腰

德國商人沃爾夫斯凱爾（1856 – 1908）在他的遺囑上訂明，若有人能夠在他死後 100 年內證實費馬最後定理，則可以獲得 10 萬馬克的獎金。自此，費馬最後定理便吸引到世上不同人士的注意，不論是數學家或是業餘學者，都紛紛作出他們的「證明」。在 1909 至 1934 年間，沃爾夫斯凱爾獎金的評審委員會便收到了成千上萬個「證明」，可惜當中並沒有一個能夠成立。經過了兩次世界大戰之後，該筆獎金亦大幅貶值，費馬最後定理的吸引力和熱潮，亦慢慢地降溫了。

雖然如此，不少數學家對這定理的熱情並沒有冷卻。1941 年，雷麥推廣了熱爾曼的結果，證明了當 $n < 253{,}747{,}887$ 時，費馬最後定理的第一情況成立。1977 年，瓦格斯塔夫證明當 $n < 125{,}000$ 時，費馬最後定理成立。1983 年，德國數學家伐爾廷斯證明了「莫德爾猜想」，從而推出方程 $x^n + y^n = z^n$ 最

多只有有限個整數解。1988 年，日本數學家宮岡洋一宣布以微分幾何的方法，證明了費馬最後定理。不過，該證明後來被發現有重大而無法彌補的缺陷，因此並不成立。

其實，研究費馬最後定理有甚麼好處呢？首先，就是可以滿足人類的求知慾。費馬最後定理是一道簡單易明的命題，但是它的證明（縱使並不完整）卻並非一般人所能理解，充滿挑戰性，這已經是一個非常之有趣的事情了。其次，在證明該定理的過程之中，我們發現了不少新的數學現象，產生了不少新的數學工具，同時亦豐富了我們對數學，特別是「數論」的知識。有數學家更認爲，費馬最後定理就好像一隻會生金蛋的母雞，由它衍生出來的數學理論，例如：複整數、唯一分解定理、分圓整數、理想數等等，都是人類思想中最珍貴的產物。

橢圓曲線與模型式

提起數論，有一門不可不提的分枝，那就是「橢圓曲線」。橢圓曲線並非橢圓形，它是計算橢圓周長時的一件副產品，並擁有一些非常有趣的數學性質。

簡單來說，橢圓曲線就是滿足方程 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的點所組成的曲線，其中 a、b 和 c 爲有理數並使方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個不同的根。不難證明，當直線通過兩個位於橢圓曲線上的有理點（即 x 坐標和 y 坐標都是有理數的點）後，該直線必定與曲線再相交於第三個有理點。數學家發現，這些有理點之間有一些非常良好的性質，它們之間的運算，可以組成一個完整的數學體系，數學家稱之爲「加法交換群」。由於以上性質可以用來解答很多相關的數學問題，因此橢圓曲線便成爲數學研究的一個焦點。現時，橢圓曲線的理

論，主要應用在現代密碼學之上。

提到橢圓曲線，又不可不提「谷山志村猜想」了。

1954 年，志村五郎在東京大學結識了比他小一歲的谷山豐（1927 – 1958），之後，便開始了二人對模形式的研究。模形式起源於法國數學家龐加萊（1854 – 1912）對自守函數的研究。所謂「自守函數」，可以說是週期函數的推廣，而模形式則可以理解爲在複平面上的週期函數。

1955 年，谷山豐開始提出他對橢圓曲線和模形式關係的驚人猜想。1958 年，谷山豐突然自殺身亡。其後，志村五郎繼續谷山豐的研究，總結出以下的一個想法：「**每條橢圓曲線，都可以對應一個模形式。**」之後，人們便稱這猜想爲「谷山志村猜想」。

起初，大多數數學家都不相信這個猜想是正確的，但經過十多年的反覆驗算後，又找不到反例可以將它推翻。其後有數學家發現，一些在橢圓曲線內的難題，只要轉換成對應的模型式，問題便可以順利地獲得解決。相反，一些在模型式中的難題，亦可以通過橢圓曲線來解決。因此，到了 70 年代，相信谷山志村猜想的人越來越多，甚至在假定谷山志村猜想成立的前提下進行他們的論證。

1984 年秋，德國數學家弗賴，在一次數學會議上，提出了以下的觀點：

首先，他假設費馬最後定理不成立，即能夠發現正整數 A、B、C 和 N，使 $A^N + B^N = C^N$。於是利用這些數字構作橢圓曲線：$y^2 = x(x - A^N)(x + B^N)$。弗賴發現這條曲線有很多非常特別的性質，甚至不可能對應於任何一個模形式！換句話

說，弗賴認爲：如果費馬最後定理不成立，那麼谷山志村猜想也是錯的！但倒轉來說，如果谷山志村猜想成立，那麼費馬最後定理就必定成立了！因此，弗賴其實是指出了一條證明費馬最後定理的新路徑，這就是先去證明谷山志村猜想！

可惜的是，弗賴在 1984 年的證明犯錯，並未能成功地證實他的觀點。後來美國數學家里貝特，經過多次失敗後，終於在 1986 年證實了以下的一個結果：「**如果谷山志村猜想對每一個半穩定橢圓曲線都成立，那麼費馬最後定理成立。**」

似乎，要證明費馬最後定理，只要證明谷山志村猜想便可以了。不過，自從提出該猜想後的 30 年間，和費馬最後定理一樣，數學家對這猜想的證明亦沒有多大的進展。不過，在這時候，英國數學家懷爾斯就秘密地開始他偉大而艱巨的工作。

解謎者與他的秘密研究

懷爾斯，出生於 1953 年。10 歲時已立志要證明費馬最後定理。1975 年，在懷爾斯大學畢業時，他的導師向他表示，經過了那麼多年的努力，人們對費馬最後定理的研究進展得非常緩慢，故此並不建議懷爾斯以費馬最後定理作爲研究對象。相反，他的導師建議他研究一項新興的項目，那就是橢圓曲線和岩澤理論。在取得博士學位之後，懷爾斯轉到美國的普林斯頓大學繼續工作。1986 年，當他知道里貝特證實了弗賴的猜想，發現自己研究的專項，竟然可以用來證明費馬最後定理後，他感到非常興奮，於是他決定放棄當時手上所有的研究工作，專心於谷山志村猜想的證明，嘗試實現他的「童年夢想」。由於他不想被別人騷擾他的研究，因此他決定要秘密地進行此項研究工作。

不難想像，懷爾斯的工作是十分艱巨的，他要解決很多如何表達和對應各種橢圓曲線和模型式的問題。經過三年的努力，他開始引入「伽羅瓦表示論」來處理將橢圓曲線的分類問題。到了 1991 年，懷爾斯發覺無法以水平岩澤理論完成類數公式的計算。但很幸運，在一個數學會議中，他無意地知道了兩位數學家科利瓦金和弗萊契的研究方法，從而改進了自己的計算。到了 1993 年 5 月，懷爾斯又遇上另一難題，就是仍然有少數曲線未能包括入「科利瓦金弗萊契方法」之內。一日，當他閱讀數學家梅哲的論文時，發現文中提到一個轉換橢圓曲線的方法，將原數式中質數 3 的問題轉換成 5。這方法即時令懷爾斯解決了「最後的難關」，繼而完成了谷山志村猜想的證明！

1993 年 6 月 21 至 23 日，一連三天，在劍橋大學的牛頓研究所中，懷爾斯以「模形式、橢圓曲線、伽羅瓦表示論」爲題，發表了他對谷山志村猜想（即費馬最後定理）的證明。那次演講非常成功，費馬最後定理已經獲得證實的消息，很快便傳遍整個世界。

不過，當懷爾斯將他長達 200 頁的證明送給一些數論專家審閱時，卻發現證明中出現漏洞。起初，專家只發現稿件中有些微的打印錯誤。但是在同年 9 月，有人發現證明出現了問題，尤其是科利瓦金弗萊契方法並未能對所有的情況生效！懷爾斯本來以爲很容易便可以修補這個漏洞，但事與願違，所有的補救辦法都失敗！懷爾斯已經失敗的傳聞，不脛而走。12 月 4 日，懷爾斯終於發出了一封電子郵件，在郵件中，他說：「對於我在谷山志村猜想和費馬最後定理方面的種種推測，我要作一個簡短的說明。在審查過程中，我們發現了許多問題，其中大部分已經解決，只剩一個問題仍然存在。

我相信不久之後，我便能用在劍橋演講中說明的概念解決它。基於尚有許多工作未能完成，所以目前不適宜發送預印本。我將對這工作給出一個詳細的說明。」

雖然懷爾斯在電郵中並未承認他已失敗，但從字裏行間可見，他亦未能預計要用多少時間才可以克服所面對的困難。到了 1994 年 1 月，懷爾斯決定重返他的研究室，再次展開對谷山志村猜想證明的研究。不過，今次懷爾斯已經不可以再次秘密地進行他的工作了。一如所料，在懷爾斯繼續他研究的同時，不斷收到很多同行的查詢，要求他公開有關的計算。亦有人發表一些奇怪的言論，打擊懷爾斯的信心，例如：他們認為既然經過了 300 多年人們都無法證實費馬最後定理，那麼谷山志村猜想亦是不可能證明的。

到了 1994 年 9 月 19 日，據懷爾斯後來憶述說，他終於決定放棄谷山志村猜想的證明了，並在那天的早上，將所有的稿件收拾再閱讀一次。但就在那一刻，他突然發現只要適當地配合使用之前放棄了的岩澤理論，便可以解決科利瓦金弗萊契方法未能解決的問題！就在那一天，懷爾斯終於掃除了證明中的最後障礙，成功地完成了一項人類數學史上的創舉，證實了谷山志村猜想和費馬最後定理！

1995 年 5 月，懷爾斯那長達 100 頁的證明發表在雜誌《數學年鑑》之中。到了 1997 年 6 月 27 日，懷爾斯更獲得價值 5 萬美元的沃爾夫斯凱爾獎金，正式結束了長達 358 年的數學證明故事。

2005 年 9 月 2 日，懷爾斯亦因證明了費馬最後定理而獲得 100 萬美元的「邵逸夫數學科學獎」。

參考書目

1. 艾克塞爾著，林瑞雲譯（1998）。《費馬最後定理》。台北：時報出版。

2. 姚玉強（1993）。《費馬猜想》。台北：九章出版社（本書原本由瀋陽：遼寧教育出版社於 1995 年出版）。

3. 馮克勤（2003）。《數學大師講數學　費馬猜想》。香港：智能教育出版社（本書原本由北京：科學出版社於 2002 年出版）。

4. 賽門辛著，薛密譯（1998）。《費瑪最後定理》。台北：臺灣商務印書館。

5. 邵逸夫獎網頁（http://www.shawprize.org/b5/）。

第九章　《幾何原本》淺釋

希臘數學的「黃金時代」

從公元前 338 年希臘諸邦被馬其頓控制，至公元前 30 年羅馬消滅最後一個希臘化國家托勒密王國之間的三百餘年，歷史學家稱之爲希臘數學的「黃金時代」。這個時期，希臘數學的中心從雅典轉移到亞歷山大城。亞歷山大城是馬其頓帝國君主亞歷山大大帝征服埃及後在地中海之濱建立的城市。亞歷山大去世後，他的帝國一分爲三。托勒密統治下的希臘埃及，定都於亞歷山大城，並於公元前 300 年左右，開始興建規模宏大的藝術宮（或稱爲博物館）和圖書館，提倡學術，羅致人才，使亞歷山大城成爲希臘文化的首府。那裏學者雲集，先後出現了歐幾里得（公元前 330－ 公元前 275）、阿基米德（公元前 287 － 公元前 212）和阿波羅尼奧斯（公元前 262－ 公元前 190）三大數學家，他們的成就標誌著古典希臘數學的巔峰。

歐幾里得及《幾何原本》

歐幾里得是希臘論證幾何學的集大成者。關於他的生平我們所知甚少。根據有限的記載推斷，歐幾里得早年求學於雅典，公元前 300 年左右應托勒密一世的邀請，到了亞歷山大城教學，成爲亞歷山大學派的奠基者。歐幾里得寫過不少有關數學、天文、光學和音樂方面的著作，在這些著作中，最重要的莫過於《幾何原本》了。

《幾何原本》是一本劃時代的巨著，在書中，歐幾里得

利用了公理化的方法，將幾何學建立成一個演繹推理的體系，由簡單的假設出發，證明以後較為複雜的命題和結果，為日後同類的書籍和數學學習，奠定了一個重要的基礎。如果要真正認識《幾何原本》的歷史意義，那麼便要回顧一下古希臘數學發展的歷史背景了。

相傳，發展古希臘數學的始祖是泰勒斯（公元前 625 – 公元前 547）。他年輕時曾經周遊列國，四處學習，借助簡單的測量技術和計算方法，便能夠推算出埃及金字塔的高度。同時，他亦是第一個提出以演繹推理的方法來證明數學命題的人。

古希臘數學成就的第一個高峰，應該要歸功於畢達哥拉斯（公元前 580 – 公元前 500）和他一手創立的學派了。畢達哥拉斯學派是一個既神秘又迷信的組織，該學派的成就之一，當然就是提出畢氏定理（即「勾股定理」）的證明。

公元前 380 年，哲學家柏拉圖（公元前 427 – 公元前 347）在希臘首都雅典，建立了一個名為「柏拉圖學園」的學術機構。該學術機構大概就好像今天的大學學府，用來訓練人才。嚴格地說，柏拉圖不算是一名數學家，不過他卻認為數學，尤其是幾何學，是訓練人們思考能力的一個重要工具，故此，他亦非常重視幾何學的教學。相傳，柏拉圖在他的學園門口，掛了一塊門牌，上面寫著：「不通曉幾何者，不得進入此門！」由此可見他對古希臘時代幾何學研究的影響。

在公元前 300 年，歐幾里得出現了。在歐幾里得之前，數學家所積累下來的數學知識、各種的命題，大多數都是零碎和片斷的，而歐幾里得就借助邏輯方法，把這些知識組織起來，加以分類和比較，並整理成一個嚴謹的系統，最後寫

成《幾何原本》一書。

《幾何原本》全書共分 13 卷，包括有 5 條公設、5 條公理、119 個定義和 465 個命題。各卷的內容分類見表 9.1。

由表 9.1 可知，《幾何原本》的譯名雖然稱爲「幾何」，但事實上它是一本集合了平面幾何、比例論、數論、無理量論和立體幾何大成之書。故此，近代學者已漸漸將此書改稱爲《原本》，刪去「幾何」二字。

當拿起一本現代漢語的《幾何原本》譯本時，你便會發覺它的「份量」不輕，單計正文的內容，亦有 587 頁。很難想像在印刷術未發明的年代，歐幾里得是如何編寫此書，而人們又是如何抄寫和保存此書的！

《幾何原本》中的重要命題

《幾何原本》的內容非常豐富，當中包括了不少重要的數學定理和難題，在現今的中學（甚至是大學）課程中，亦有教授。但是由於篇幅有限，因此不能在此爲大家逐一介紹了。現試列舉一些重要的命題，供大家參考，從而讓大家瞭解歐幾里得及古希臘數學家的成就。

命題 I.47[*]　**在直角三角形中，直角所對的邊上的正方形面積等於夾直角的兩邊上正方形面積之和。**

這就是前面提過的勾股定理。據說，在西方，這定理最先是由畢達哥拉斯證明的，但他的證明方法卻沒有流傳下來。《幾何原本》中的證明，則可以算是現存西方最早證明勾

[*] 在命題編號中，羅馬數字表示該命題所屬的卷號，例如：「命題 I.47」，表示第一卷中的命題 47。

卷　號	內容分類
第一卷	幾何基礎篇 定義 23 個、命題 48 個；另外提出了 5 條公設和 5 條公理，成爲全書的邏輯基礎。
第二卷	幾何代數 以幾何方法研究像 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的代數恆等式。
第三卷	圓形 討論圓的性質。
第四卷	正多邊形 討論以直尺和圓規繪畫圓內接和外切三角形及正多邊形以及繪畫三角形及正多邊形內切圓和外接圓的方法。
第五卷	比例論 這卷內容依據歐多克索斯（公元前 408 – 公元前 355）的理論而編寫，當中比例的定義，對後世數學發展有深遠的影響。
第六卷	相似圖形 討論相似三角形、相似圖形及其應用。
第七、八、九卷	數論 探討最大公因數、偶數、奇數、質數、完全數等的性質。
第十卷	不可公度量 共有命題 115 個，是最冗長、最富爭議性但最精密的一卷。
第十一至第十三卷	立體幾何 探討立體幾何中的定理，包括立方體和錐體的體積計算公式，並證明只有五種正多面體的現象。

表 9.1

股定理的記載。歐幾里得的證明方法簡單直接，值得我們一再欣賞：

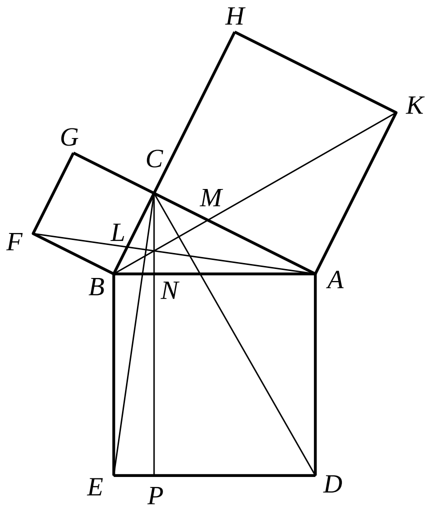


圖 9.2

圖 9.2 中，設 ΔABC 爲直角三角形，其中 $\angle C$ 爲直角。在三邊上各畫一個正方形。

由於 $\Delta FBA \cong \Delta CBE$（S.A.S.），

因此 正方形 $BCGF$ 的面積 $= 2 \times \Delta FBA$ 的面積

$= 2 \times \Delta CBE$ 的面積

$=$ 長方形 $BEPN$ 的面積。

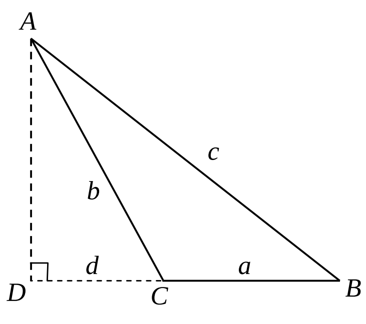
類似地， 正方形 ACHK 的面積 = 長方形 ADPN 的面積。

由此得，正方形 $BCGF$ 的面積 + 正方形 $ACHK$ 的面積 = 正方形 $ABED$ 的面積，即斜邊上的正方形面積等於夾於直角兩邊上正方形面積之和。命題得證。

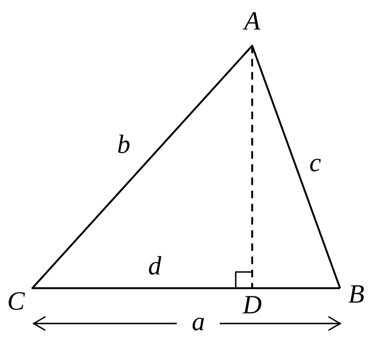
留意這個證明中，歐幾里得不單證實了勾股定理，而且他更具體地解釋了定理背後的幾何意義：若從直角頂點畫一直線垂直於斜邊，延長後，將斜邊上的正方形分割成兩個長方形，則每個長方形的面積將會等於在它那一側的直角邊上的正方形面積。這是一個極之美妙的結果，難怪有數學家將這個證明評定爲《幾何原本》最精彩的證明！

命題 II.12　在鈍角三角形中,鈍角對邊上的正方形比夾鈍角的二邊上的正方形之和大一個長方形的二倍,其中那個長方形是由一銳角向對邊的延長線作垂直線，垂足到鈍角之間的一段線段與另一邊所構成的。

命題 II.13　在銳角三角形中,銳角對邊上的正方形比夾銳角的二邊上的正方形之和小一個長方形的二倍,其中那個長方形是由另一銳角向對邊作垂直線，垂足到原銳角之間的一段線段與該邊所構成的。



命題 II.12



命題 II.13

圖 9.3

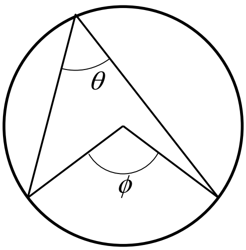
這兩個命題看似很複雜，但若以圖像表示，那麼亦不難掌握它們的意思。

如圖 9.3，假如我們採用一般的三角形記號，即設 $a = BC$，$b = AC$，$c = AB$，又設 $d = CD$，那麼命題 II.12 就是說，在 ΔABC 中，若 $\angle C$ 為鈍角，則 $c^2 - (a^2 + b^2) = 2 \times ad$，即 $c^2 = a^2 + b^2 + 2ad$。而命題 II.13 就是，在 ΔABC 中，若 $\angle C$ 為銳角，則 $(a^2 + b^2) - c^2 = 2ad$，即 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ad$。

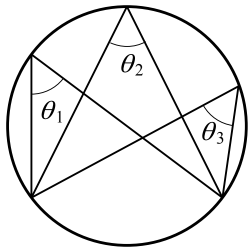
不難看出，只要我們將 d 寫成 $b \cos C$，那麼以上兩個命題便等同於今天我們所說的「餘弦定律」了。事實上，除了引用餘弦函數這個部分之外，歐幾里德證明命題 II.12 和 II.13 的方法，亦和今天一般教科書中所採用的方法並沒有分別，當中最重要的地方，當然是應用了勾股定理。相信大家都會感到驚訝，原來早在公元前 300 多年，古希臘數學家就已經懂得「餘弦定律」了！

命題 III.20　在一個圓內，同弧上的圓心角等於圓周角的二倍。

命題 III.21　在一個圓中，同一弓形上的角彼此相等。



命題 III.20：$\phi = 2\theta$



命題 III.21：$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$

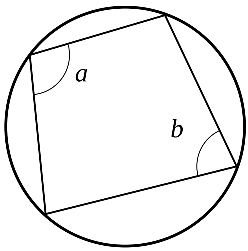
圖 9.4

命題 III.22　在圓內接四邊形中，對角之和等於二直角。

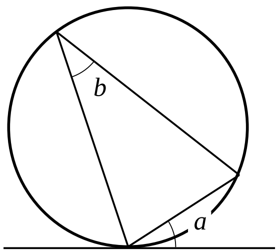
命題 III.32　如果一條直線與圓相切，並且由切點作一條過

圓內部的直線和圓相截，那麼由該直線和切線所構成的角等於另一弓形上的圓周角。

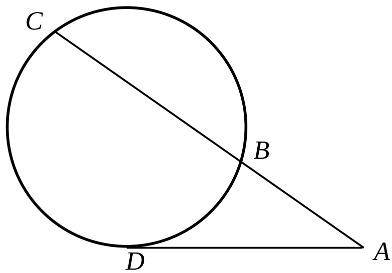
命題 III.36　如果在圓外取一點，並且由它向圓作兩條直線，其中一條與圓相截而另一條則相切，那麼由圓截得的整條線段與圓外定點和凸弧之間一段所構成的長方形，等於切線上的正方形。



命題 III.22：$a + b = 180°$



命題 III.32：$a = b$



命題 III.36：
若 AD 與圓相切，則 $AB \times AC = AD^2$。

圖 9.5

以上 5 個命題不就是大家在高中所學有關圓的性質嗎？原來它們早已在《幾何原本》中出現了！至於這些命題的證明都很簡單，在一般教科書中都可以找到，所以從略。

命題 VII.1　設有不相等的二數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直作下去，若餘數總是量不盡其前一個數，直到最後的餘數為一個單位，則該二數互質。

命題 VII.2　已知兩個不互質的數，求它們的最大公因數。

這是《幾何原本》有關「數論」的最初兩個命題，它提供了一個計算最大公因數的方法，後世數學家稱之爲「歐幾里得算法」或「輾轉相除法」。例如：求 342 和 252 之間的最大公因數。我們先將 342 除以 252，得餘數 90。將 252 除以 90，得餘數 72。將 90 除以 72，得餘數 18。如此輾轉相除下去，最後由於 18 能夠整除 72，因此我們便知道 18 是 342 和 252 的最大公因數了。

在數論的部分中，有 3 個命題是非常重要的，它們是：

命題 IX.14　如果一個數是被一些質數能量盡的最小者，那麼，除原來量盡它的質數外，任何另外的質數都量不盡這數。

命題 IX.20　預先任意給定幾個質數，則有比它們更多的質數。

命題 IX.36　設從單位起有幾個連續二倍的連比例數。如果所有數之和是質數，那麼這個和乘以最後一個數所得的積是一個完全數。

命題 IX.14 表示一個數僅能以一種方式分解爲質因數的乘積，在現代數學中，我們稱這命題爲「唯一分解定理」或「算術基本定理」(*)。

(*) 唯一分解定理的重要性及應用，可參閱本書第八章。

命題 IX.20 表示質數有無窮多個。有人認爲，這個命題的證明可以算是繼勾股定理的證明之後，《幾何原本》中第二個最精彩的證明，令人一再回味(*)。

至於命題 IX.36 中的「完全數」，就是指那些等於自己所有真因數（包括 1，但不包括該數本身）之和的數。例如：6 的真因數有 1、2 和 3，而 $1 + 2 + 3 = 6$，所以 6 是完全數。又例如：28 的真因數有 1、2、4、7 和 14，而 $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$，所以 28 亦是完全數。據說，古希臘人相信完全數是完美的象徵，並且一共發現了 4 個完全數：6、28、496 和 8128。

不過問題是，究竟哪些數才是完全數呢？命題 IX.36 便寫出一個偶數是完全數的充分條件，即如果 $p = 1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-1}$ 是質數，那麼 $p \times 2^{n-1}$ 就是完全數了。留意，由恆等式 $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots\cdots + x + 1)$ 可知，這裏的 p 其實等於 $2^n - 1$，它本身亦是一個梅森質數(#)。

歐幾里得對命題 IX.36 的證明寫得頗爲複雜，到今天，人們通常會將他的證明轉化爲以下的形式：

先列出 $p \times 2^{n-1}$ 的所有因數，其中亦包括該數本身。然後求和，得：

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + \ldots\ldots + 2^{n-1}p \\
= \quad & (1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-1}) \times (p + 1) \\
= \quad & (2^n - 1) \times 2^n \\
= \quad & 2 \times p \times 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

(*) 關於命題 IX.20 的證明，請參閱本書第五章。

(#) 梅森質數的定義和性質，亦可參閱本書第五章。

將兩邊減去 $p \times 2^{n-1}$ 便得到：

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-1} + p + 2p + \ldots\ldots + 2^{n-2}p = p \times 2^{n-1},$$

即 $p \times 2^{n-1}$ 等於它所有真因數之和。換句話說，$p \times 2^{n-1}$ 是完全數。命題得證。

雖然這同樣是一個精彩的證明，但是歐幾里得只是證明了一個充分條件，並不能保證每一個完全數都符合以上的形式。事實上，到了今天，數學家仍未能證實上述條件同時是必要的，有關完全數之謎仍未完全解開。

命題 XII.10　圓錐是與它同底等高的圓柱的三分之一。

這是初中幾何學中的一個重要命題，原來在《幾何原本》中亦有記載，而且亦有一個十分嚴謹的證明。

《幾何原本》中命題間的邏輯關係

後世大多數的數學家都認爲，《幾何原本》中的演繹體系是邏輯推理的一個典範。書中對命題關係的要求，甚至乎比現代教科書的要求還要高。以下就是一個很好的例子：

在《幾何原本》的第六卷中，有以下的兩個命題：

命題 VI.2　如果一條直線平行於三角形的一邊，那麼它截三角形的兩邊成比例線段；又，如果將三角形的兩邊截成比例線段，那麼截點的連線平行於三角形的另一邊。

命題 VI.4　在兩個三角形中，如果各角對應相等，那麼夾等角的邊成比例，其中等角所對的邊是對應邊。

命題 VI.2 的前半部其實相當於現時教科書中的等比定理，而從命題 VI.4 我們得知「對應角相等」是相似三角形的

充分條件。在現時的教科書中，我們一般都會應用相似三角形的定理來證明等比定理。但在《幾何原本》中，兩個命題出現的次序則剛好相反。事實上，在《幾何原本》中，「對應角相等」是相似三角形的充分條件是由等比定理所推導出來的！

在《幾何原本》中，相似圖形的定義是兩個圖形的角對應相等並且夾等角的邊成比例。以下證明在三角形中，若各角對應地相等，則夾等角的邊必定成比例。

如圖 9.6，設 ΔABC 和 ΔDCE 的角對應地相等，即 $\angle BAC = \angle CDE$，$\angle ABC = \angle DCE$，$\angle ACB = \angle DEC$，則可以證明夾等角的邊成比例。

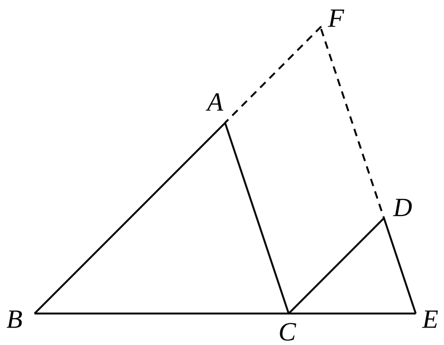


圖 9.6

移動兩個三角形使 B、C、E 成一直線。由於 $\angle ABC + \angle DEC = \angle ABC + \angle ACB < 180°$，因此延長 BA 和 ED 必定會相交於一點 F。容易得知 $ACDF$ 是一個平行四邊形，所以 $AF = CD$，$AC = FD$。

由命題 VI.2 得 $BC : CE = BA : AF = BA : CD$，即 $BA : BC = CD : CE$。換句話說，夾等角的邊成比例。命題得證。

歐幾里得這樣安排，可以避免像現時教科書般，以一種直觀的眼光去理解相似三角形性質；他將「對應角相等」是相似三角形的充分條件變成推理的結果，而不是一項幾何假設。由此可見，《幾何原本》的邏輯要求，遠在現時教科書之上！

至於命題 VI.2 的證明，歐幾里得則以比較兩三角形面積的方法而作出，但當中涉及一些較複雜的技巧，因此從略。

《幾何原本》中的公理體系

《幾何原本》所使用的演繹法，它的精神是由簡單的數學現象，去證明複雜的現象的。在這個過程中，邏輯推理自然非常重要，但更重要的，是我們必須接受一些簡單的數學現象作爲我們邏輯推理的「起步點」，由此才可以完成所有的證明。歐幾里得稱這些「起步點」爲「公設」和「公理」。以下就是《幾何原本》中所採用的 5 條公設和 5 條公理：

公　設

1. 由任意一點到任意一點可以作直線。
2. 一條有限直線可以繼續延長。
3. 以任意的點為圓心及任意的線段為距離可以畫圓。
4. 凡直角皆相等。
5. 同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在直線某一側的兩個內角之和小於二直角，則這兩條直線經無限延長後在這一側相交。

公　理

1. 等於同量的量彼此相等（即若 $a=c$ 並且 $b=c$，則 $a=b$）。
2. 等量加等量，其和仍相等（即若 $a=b$ 並且 $c=d$，則 $a+b=c+d$）。

3. 等量減等量，其差仍相等（即若 $a=b$ 並且 $c=d$，則 $a-b=c-d$）。

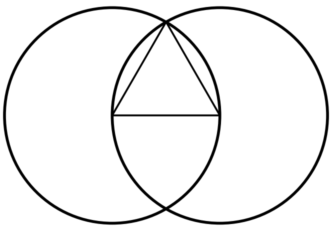
4. 彼此能夠重合的物體是全等的。

5. 整體大於部分。

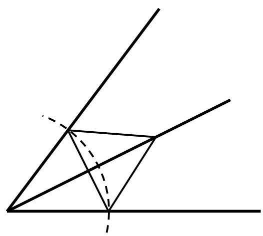
以公理方式去處理演繹幾何的手法，並不是歐幾里得所首創的，在歐幾里得之前已經有希臘數學家提出有關的問題。不過，《幾何原本》中的公設和公理，全部都由歐幾里得本人所選定。

尺規作圖

公設 1 和公設 2 表示我們可以用直尺來畫直線，公設 3 表示我們可以用圓規來畫圓。除此之外，再不可以使用其他的繪圖工具了。由於我們的繪圖工具受到限制，因此並不是每一個幾何圖形都可以輕鬆容易地畫出來。不過，正因爲這個限制，令畫圖出現了難度，所以吸引了數學家研究以「尺規作圖」的方法。在《幾何原本》中，歐幾里得記載了一些精彩的作圖題和它們的畫法。



命題 I.1



命題 I.9

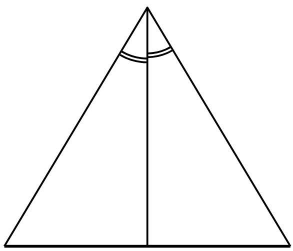
圖 9.7

命題 I.1　在一條已知有限直線上作一個等邊三角形。

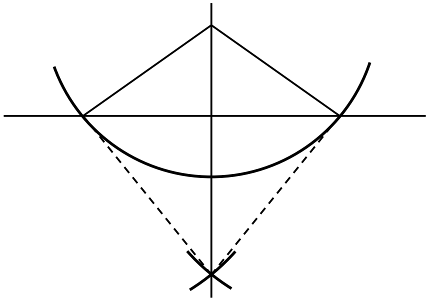
命題 I.9　二等分一個已知直線角。

命題 I.10　二等分已知有限直線。

命題 I.12　由已知無限直線外一已知點作該直線的垂直線。



命題 I.10

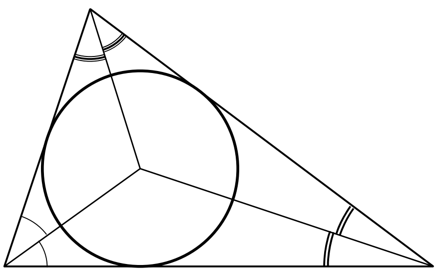


命題 I.12

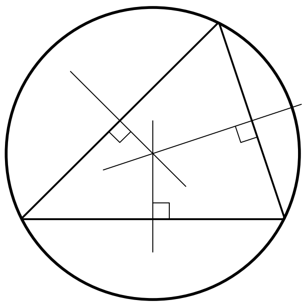
圖 9.8

命題 IV.4　作已知三角形的內切圓。

命題 IV.5　作已知三角形的外接圓。



命題 IV.4：作內切圓



命題 IV.5：作外接圓

圖 9.9

命題 IV.11　求作已知圓內接等邊且等角的五邊形。

單以尺規作一個正五邊形並不容易，可惜《幾何原本》

中的方法十分複雜，不便在這裏列出。如果大家對此題感到興趣，可以參考一般的數學教科書。

對第 5 公設的疑惑

《幾何原本》的 10 條公設和公理之中，相信最令人感到迷惑的，應該是第 5 公設了。看看這條公設，無論在文句上和字數上，都比其他的公設、公理為多，再三閱讀，更覺得這公設好像一個命題而不像一條公設。因此，自《幾何原本》寫成後，便有無數的數學家研究這條公設，並試圖找出證明這公設的方法。

可惜，一直以來，他們的嘗試都失敗！到了 19 世紀，匈牙利數學家波爾約（1802 – 1860）和俄國數學家羅巴切夫斯基（1792 – 1856）分別地發表了一套與第 5 公設相反的幾何體系，從而證明了第 5 公設確實是一條公設，不能證明或否定。與此同時，亦可反映歐幾里得在選取公設時的智慧。

圓面積及球體體積公式

《幾何原本》中並沒有圓面積或球體體積的計算公式，我們只可以從第十二卷中，找到以下的一些相關命題：

命題 XII.2　　圓與圓之比如同直徑上正方形之比。

命題 XII.18　　球的比如同它們直徑的三次比。

在西方歷史上，最先提出球體體積公式的是阿基米德。阿基米德應用了一種近乎於現代微積分的計算手法，推算出有關算式，並成功地計算出圓周率小數點後兩個位的數值。

《幾何原本》是一個不可多得的傑作，科學家愛因斯坦（1879 – 1955）亦曾經說過：「如果歐幾里得未能激起你少年

時代的熱情，那麼你就不是一個天才的科學家了。」所以如果同學希望將來為成一個偉大的科學家，那麼便應該多閱讀《幾何原本》了！

參考書目

1. 李文林（2000）。《數學史教程》。北京：高等教育出版社、海德堡：施普林格出版社。
2. 梁子傑（2005）。《幾何原本導讀》。台北：九章出版社。
3. 梁宗巨（1995）。《數學歷史典故》。台北：九章出版社（本書原本由瀋陽：遼寧教育出版社於 1992 年出版）。
4. 蕭文強（2000）。《為甚麼要學習數學？—— 數學發展史給我們的啓發》。台北：九章出版社（本書原本由香港：學生時代出版社於 1978 年出版）。
5. 藍紀正、朱恩寬譯（1992）。《歐幾里得·幾何原本》。台北：九章出版社（本書原本由陝西科學技術出版社於 1990 年出版）。
6. Dunham, William 著，林傑斌譯（1995）。《天才之旅：偉大數學定理的創立》。台北：牛頓出版社。
7. Heath, T.L. (1952) *"The Thirteen books of Euclid's Elements," second edition unabridged*. New York : Dover Publications, Inc.
8. 網上閱讀《幾何原本》http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html。

第十章　$\cos\phi = -\frac{1}{3}$

利用計算機可知道，若 $\cos\phi = -\frac{1}{3}$，其中 $0° < \phi < 180°$，則 $\phi \approx 109° \, 28' \, 16''$。這一個結果看似沒有甚麼特別，但大家知不知道，在數學上，這個數值出現在好幾個不同的地方，而當中又互有關聯呢？

A4 紙對角線的夾角

A4 是香港人最通常使用的紙張尺碼。用尺量一量便知道，一張 A4 紙長 297 mm，闊 210 mm。不要看輕這兩個數值，其實它們之間隱藏著一個十分重要的關係。

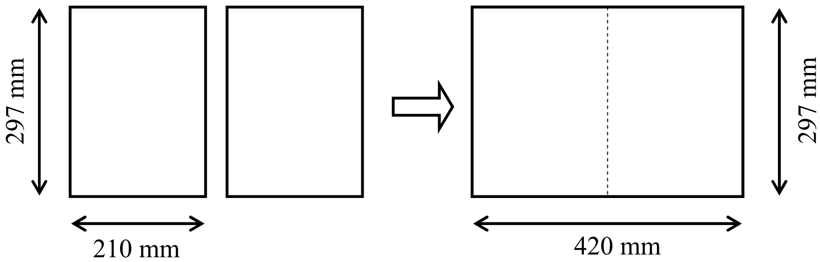


圖 10.1

將兩張 A4 紙拼在一起（如圖 10.1），便會得到一張 A3 紙。A3 紙長 420 mm，闊 297 mm。將長度除以闊度，我們得到一張 A3 紙長度與闊度之比大約為 1.414。回看 A4 紙，它的長與闊之比（即 297 ÷ 210）亦大約為 1.414，兩個比值是相同的！

這不是一個巧合，而是人們設計紙張大小時的一個刻意

安排。試想想，如果我們手上有一份文件打印在兩張 A4 紙上，並打算用影印機將整份文件縮印到一張 A4 紙之上，那麼由於 A3 紙的長闊比跟 A4 紙的一樣，因此整份文件便可以順利地縮印到一張 A4 紙之上；否則，由於兩種紙張的長闊比不同，因此一定會出現一些沒有用的白邊了。

話說回來，A4 中的長闊比是怎樣計算出來的呢？

假如一張紙的長度是 x 個單位，而闊度是 1 個單位。現在如圖 10.1 般將兩張紙拼在一起，那麼所得的紙便會長 2 個單位，闊 x 個單位了。由於這兩個長方形的長闊比是相同的，因此我們可以得到以下方程：

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{1}\text{，}$$

解之，得

$$x = \sqrt{2}\text{。}$$

換句話說，A4 紙的長闊比應該等於 $\sqrt{2}$: 1（$\sqrt{2} \approx 1.414$）。有了這個比值，我們便可以回到這篇文章的主題，爲大家介紹 $\cos\phi = -\frac{1}{3}$ 中的 ϕ 了。

圖 10.2 中，長方形 $ABCD$ 的長闊比和一張 A4 紙一樣，都是 $\sqrt{2}$: 1，那麼兩條對角線的夾角 $\angle AOB$ 等於多少呢？

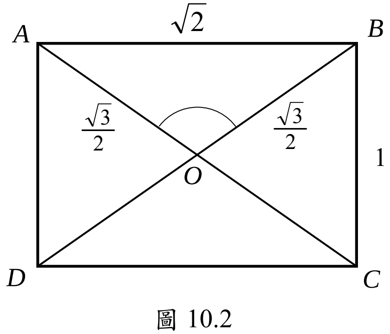


圖 10.2

由於相似圖形的關係，我們可設 $AB = \sqrt{2}$，$BC = 1$。應用勾股定理，得 $AC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$。由此得 $OA = OB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。應用餘弦定律，得

$$\cos\angle AOB = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\,(\frac{\sqrt{3}}{2})\,(\frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{1}{3}\text{。}$$

原來一張 A4 紙兩條對角線所構成的鈍角，就等於開始時提到的角 ϕ 了。

「等邊正四稜錐」側面的夾角

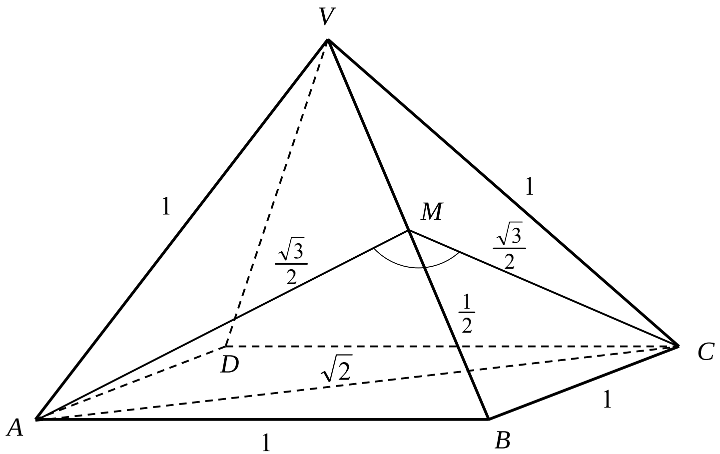


圖 10.3

圖 10.3 所示 $VABCD$ 爲一「等邊正四稜錐」，其底 $ABCD$ 爲一正方形，且該稜錐上所有稜的長度都相等。現在問稜錐上兩個相鄰側面（例如：VAB 和 VCB）之間的夾角有多大呢？

我們設 VB 上的中點爲 M，並連結 AM 和 CM。由於 ΔABV 和 ΔCBV 均爲等邊三角形，因此 $AM \perp VB$ 而 $CM \perp VB$。根據

定義，側面 VAB 和 VBC 之間的夾角便等於 $\angle AMC$ 了。在這裏，我們只要再次應用勾股定理和餘弦定律，便可以計算出 $\angle AMC$ 的大小。

假設 $AB = VB = BC = 1$，那麼 $AC = \sqrt{2}$ 及 $MB = \frac{1}{2}$，從而得 $AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$。由此得知，圖 10.3 的 ΔMAC 與圖 10.2 的 ΔOAB 全等，所以 $\cos\angle AMC$ 亦等於 $-\frac{1}{3}$ 了。換句話說，等邊正四稜錐上兩個側面間的夾角亦等於 ϕ。

關於這個夾角，曾經發生過一個很有趣的故事。話說在 1980 年，美國舉行了一次全國性的考試。在成績公佈後，一名 17 歲名叫洛文的考生對他的成績很不滿意，原因是他所做的其中一題被評定爲錯誤。那道題是這樣的：

> 給定一個三稜錐和一個四稜錐，並知該兩個稜錐所有稜的長度都相等。如果從每個稜錐選出一個三角形側面，並將它們重合，從而令兩個稜錐結連成一個新的立體，那麼新的立體一共有多少塊面？

考官預期的答案是這樣的：三稜錐有 4 塊面，四稜錐有 5 塊面，當兩錐體結合時，重合的兩個三角形便會取消，故此答案應是 $4 + 5 - 2 = 7$。

不過，故事的主角洛文並不同意這個答案，他認爲由於兩個稜錐的側面夾角之和剛好等於 180°，因而令到合併出來的立體其中有 4 塊側面會融合而成爲兩塊平面，故此新的立體其實只有 5 塊面！爲了要證實自己的想法，洛文更製作了兩個模型出來驗證，結果令當年的考官大爲尷尬，不得不承認自己的錯誤。

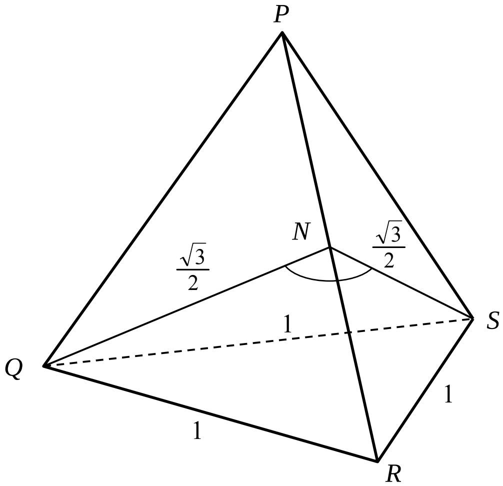


圖 10.4

其實我們不一定要製作一個模型才可以證實洛文的觀點，只要應用餘弦定律，便可證實有關的結果。圖 10.4 所示 *PQRS* 爲一「等邊正三稜錐」(我們亦稱之爲「正四面體」)，我們打算將它的其中一個側面 *PRS* 與圖 10.3 中等邊正四稜錐的側面 *VAB* 重合。留意，只要我們能夠證明 $\angle QNS + \angle AMC = 180°$，其中 N 爲稜 PR 的中點，那麼兩稜錐的側面 *PQR* 和 *VBC* 便會融合成 1 塊面。類似地，*PQS* 亦會和 *VAD* 融合，使新的立體只得 5 塊面。

事實上，由餘弦定律可知

$$\cos\angle QNS = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (1)^2}{2\,(\frac{\sqrt{3}}{2})\,(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{3}\ ,$$

再由餘弦的性質得 $\angle QNS + \angle AMC = 180°$，因此得知洛文的觀點是正確的。

正四面體中心點與兩頂點連線之間的夾角

在學習有機化學時，最先認識的化合物，相信會是甲烷了。它是由一個碳原子和 4 個氫原子所組成的。整個化合物的形狀就好像一個正四面體（如圖 10.5），碳原子位於正四面體的中心，4 個氫原子便位於正四面體的 4 個頂點之上。一個有趣的問題就是，碳原子和兩個氫原子連線之間的夾角有多大呢？

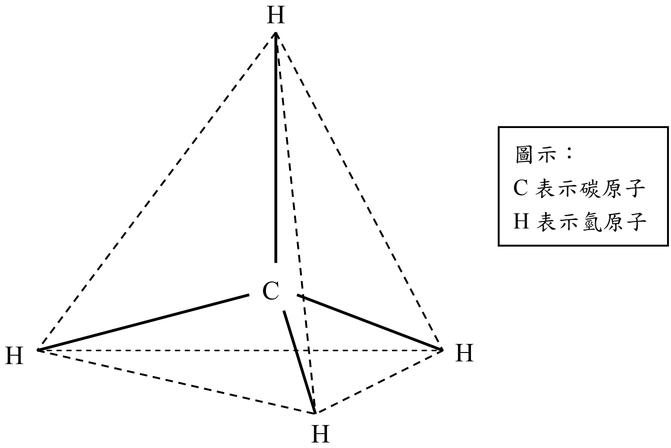


圖 10.5

圖 10.6 畫了一個正六面體（即正方體）$ABCDEFGH$，O 是它的中心點，亦即是對角線 AG 和 EC 的交點。將 A、C、F、H 四點連結，便得到一個正四面體 $ACFH$。由於 $OA = OC = OF = OH$，因此 O 亦是正四面體 $ACFH$ 的中心點，而且圖中的 $\angle AOC$，亦即是圖 10.5 中碳原子和兩個氫原子連線之間的夾角了。

假設正六面體的稜長 $AE = CG = 1$，那麼 $AC = \sqrt{2}$。很明

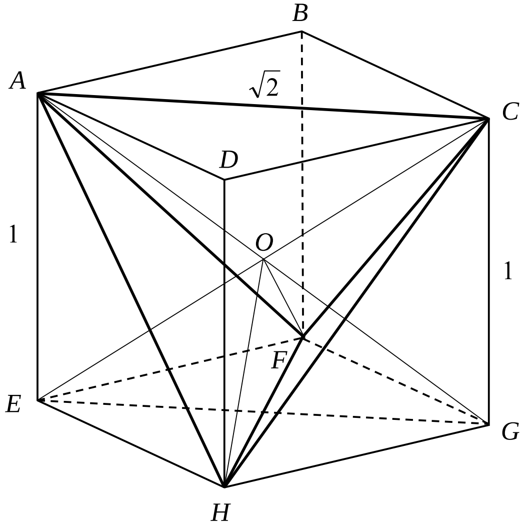


圖 10.6

顯，圖 10.6 中的長方形 $ACGE$ 亦全等於圖 10.2 中的長方形 $ABCD$。換句話說，上述的夾角 $\angle AOC$ 亦即是 ϕ 了。

大家或許會認爲，一張 A4 紙對角線的夾角和正四面體中心點和兩頂點連線之間的夾角只是巧合地相等，沒有甚麼特別。但一些研究折紙藝術的專家就一定不會同意這個說法！曾經見過一些介紹折紙的書籍，其中一個折紙就是利用一張 A4 紙，並應用了這種紙張尺碼上的特性，巧妙地折出一個如圖 10.6 中 ΔOAC 的組件，然後將 6 個相同的組件拼合出一個正四面體來。方法十分簡單。在本文的附錄中，亦介紹了一個類似的方法，供大家參考。

蜂房結構的秘密

大家都知道，一個蜂巢是由多個正六邊形的蜂房組合而成的。說得準確一點，每一個蜂房是一個以正六邊形爲底的

六稜柱體。不過，可能大家都不知道，那些蜂房並不是一條管道，可以由蜂巢的一邊，一直通往至另一邊的。在這些蜂房的中間，蜜蜂會建造一堵「牆」，將兩邊分隔開，從而成為蜂房的底部。

說也奇怪，這堵牆並不是一塊平面，而是好像圖 10.7 中的圖形般，由三個全等的菱形組合而成（為了方便觀察，圖 10.7 中蜂房的形狀是倒轉畫的，底部向上）。

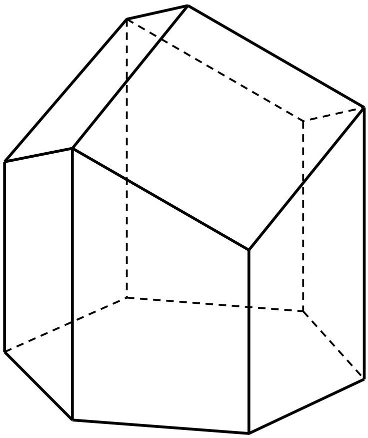


圖 10.7

這個菱形曾經引起科學家的興趣。據載，一位名叫馬拉爾迪（1665 – 1729）的法國人，曾經量度這個菱形，並發現這菱形的鈍角等於 109° 28'，而銳角則等於 70° 32' [*]。大家看看：菱形上的鈍角，不就是我們一直在討論的角 ϕ 嗎？問題是：為甚麼蜜蜂會如此喜歡這個角，將蜂房設計成這個樣

[*] 這故事有一個疑點。一般的蜂房，體積都非常之小，相信那個菱形亦不會很大，故事中的馬拉爾迪竟然可以量度出準確至 28' 的結果，實在令人難以至信。不過，正如香港人所說：「講故勿駁故」，所以這個疑點也不必深究了！

子呢？

另一位法國科學家雷奧米爾（1683 – 1757）提出了一個猜想，他認爲用了這樣的角，便可以用最少的材料來建造相同容積的蜂房。換句話說，在體積固定的情況下，這樣的蜂房，總表面面積將會是最小。

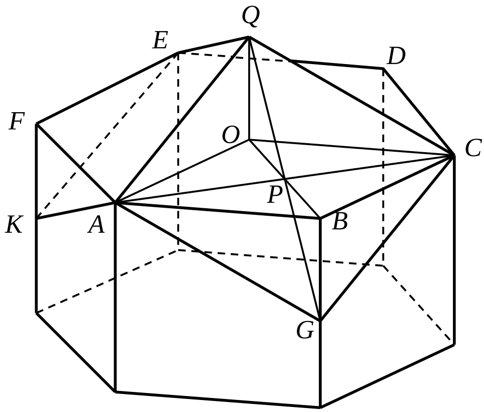


圖 10.8

事實上，雷奧米爾的猜想是正確的，我們可以通過以下的計算來證明。圖 10.8 中畫出了一個以正六邊形 $ABCDEF$ 爲底的六稜柱，O 爲正六邊形的中心點。設 $AB = 1$。連結 OB 和 AC，並稱交點爲 P。我們可以利用以下方法來建造出蜂房底部的菱形：先在 B 以下的位置選一點 G，並設 $BG = h$，然後沿著 ΔACG 的邊界將稜錐 $ABCG$ 切出，並將它反轉放在 ΔOAC 之上，即將 ΔOAC 和 ΔBAC 重合在一起。這時，原稜錐的頂點 G 便會移到位於 O 的正上方，並稱該位置爲 Q。如此，在 AC 的邊上便會出現一個菱形 $AGCQ$ 了。類似地，我們可以分別在 D、F 以下 h 個單位的位置定出 H(未有畫出)、

K 兩點，從而造出另外的兩個菱形。

非常明顯，經過切割後的立體體積，和先前的六稜柱的體積是一樣的，至於它的總表面面積，就要一番計算了。

由餘弦定律可知 $AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = 3$；又因為 $\angle ABP = 60°$，$OB \perp AC$，所以 $PB = \frac{1}{2}$。由此得 $PG = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}}$。

由圖 10.8 可知，經切割後，ΔABG、ΔCBG 和菱形 $OABC$ 會消失，即整個立體的表面面積會減小：

$$2\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=h+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{。}$$

另外，立體增加了菱形 $AGCQ$，面積亦即增加了：

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}\text{。}$$

由此可知立體的表面面積變化為 $S = \sqrt{3}\cdot\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}-h-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 了（注意：我只對 $AGCQ$ 部分進行計算，其餘兩個菱形部分的結果應該相同，故此不再重複）。

到這裏，我們求 h 值，使 S 達至最小。以下將會介紹兩個不同的方法來求得這個 h 值。首先，最直截了當的方法，當然是使用求導法：

令 $$\frac{dS}{dh} = \frac{\sqrt{3}\,h}{\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}}-1 = 0\text{，}$$

則 $$\sqrt{3}h = \sqrt{h^2+\frac{1}{4}}\text{。}$$

解之得 $$h = \frac{1}{\sqrt{8}}。$$

又 $$\frac{d^2S}{dh^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}} - \frac{\sqrt{3}\,h^2}{(h^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}，$$

由此得 $$\left.\frac{d^2S}{dh^2}\right|_{h=\frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} > 0，$$

即當 $h = \frac{1}{\sqrt{8}}$ 時，蜂房的總表面面積會達至最小。

如果大家不認識又或者不喜歡求導法，我們亦可以借助二次方程的「判別式」來求出有關數值。先捨去 $S = \sqrt{3}\sqrt{h^2+\frac{1}{4}} - h - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 算式中的常數部分，設 $y = \sqrt{3}\sqrt{h^2+\frac{1}{4}} - h$，

移項及消去根號得 $$y^2 + 2hy + h^2 = 3h^2 + \frac{3}{4}，$$

即 $$2h^2 - 2yh + (\frac{3}{4} - y^2) = 0 \quad ....(\#)$$

由於 h 必定是一個實數，因此上述的二次方程必定有實數根，由此得

$$\Delta = 4y^2 - 4\cdot 2\cdot(\frac{3}{4} - y^2) \geq 0$$

$$4y^2 - 6 + 8y^2 \geq 0$$

$$y^2 \geq \frac{1}{2}。$$

由於我們想 y 達到最小值，因此 y 便應該等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 了。代入上面的方程 (#)

得 $$2h^2 - \sqrt{2}\,h + \tfrac{1}{4} = 0，$$

$$2\,(h - \tfrac{1}{\sqrt{8}})^2 = 0。$$

於是同樣可以得到 $$h = \frac{1}{\sqrt{8}}。$$

應用勾股定理於 ΔABG 上可以知道 $AG = \dfrac{3}{\sqrt{8}}$。最後應用餘弦定律於 ΔAGC，得

$$\cos\angle AGC = \frac{(\frac{3}{\sqrt{8}})^2 + (\frac{3}{\sqrt{8}})^2 - (\sqrt{3})^2}{2\,(\frac{3}{\sqrt{8}})\,(\frac{3}{\sqrt{8}})} = -\frac{1}{3}，$$

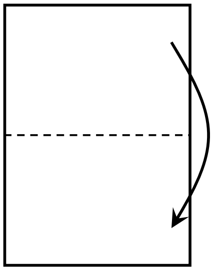
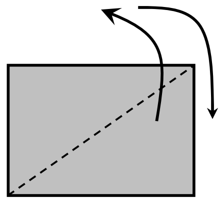
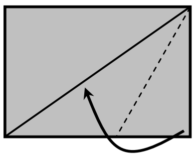
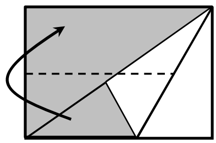
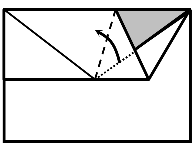
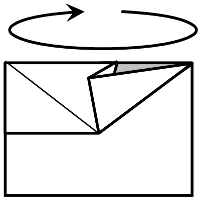
即當 $\angle AGC$ 等於角 ϕ 時，蜂房的總表面面積會達到最小，由此證實了雷奧米爾的猜想。

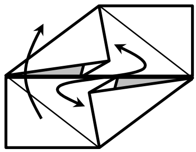
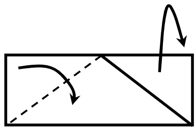
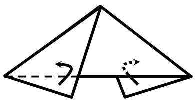
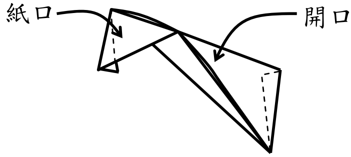
關於雷奧米爾的猜想亦曾經發生過一個十分有趣的故事。當雷奧米爾提出他的猜想後，瑞士數學家柯尼希（1712－1757）立刻給出了證明，但他計算出的結果是，菱形鈍角等於 109° 26’，銳角等於 70° 34’。起初，人們以爲蜜蜂是如此細小的昆蟲，牠們製造出來的角和人類計算出來的角出現誤差，不足爲奇，何況誤差亦只不過是 2’，可見蜜蜂已經夠「聰明」了。誰知過了幾年後，蘇格蘭數學家馬克勞林（1698－1746）提出了另一個證明，並得到 109° 28’ 16” 的結果！這時人們才發現，柯尼希在計算時所使用的對數表並不正確，因而求得一個錯誤的結果。原來，蜜蜂建造蜂房的計算才是正確的，算錯的卻是人類了！

附錄：以 A4 紙折正四面體的方法

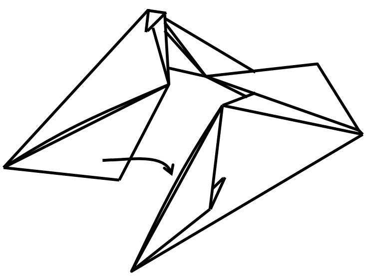
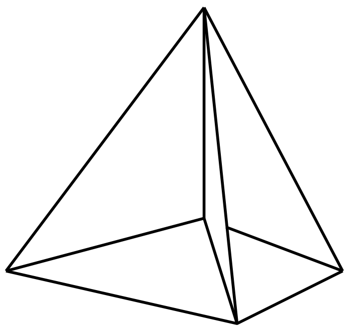
此折紙法先將 6 張長闊比為 $\sqrt{2}$: 1 的紙折成 6 個基本組件，然後再將它們組合成一個正四面體。

基本組件折法

(一) 將紙從中間對折 	(二) 沿一對角線對折，折後將紙打開 
(三) 將一邊折向剛才的折痕 	(四) 沿中線往上折 
(五) 沿虛線折入，點線拉出，從而得一個「鉤」 	(六) 反轉並於另一面重複折一次 

(七) 將前後兩面反折，並將前後兩鉤扣在一起 	(八) 將兩面凸出部分向下折 
(九) 再將凸出部分收藏 	(十) 完成製作一個組件 

接合成正四面體的方法

將組件凸出來的「紙口」，插入另一個組件的「開口」之中 	完成圖 

上述折紙方法由譚志良老師設計，並獲授權轉載。作者特此向譚老師致謝。

習題

1. 計算圖 10.2 中 $\angle BOC$ 的餘弦值（即 $\cos\angle BOC$）。
2. 計算圖 10.6 中 $\angle EOH$ 的餘弦值（即 $\cos\angle EOH$）。亦即是計算正六面體的中心點與兩相鄰頂點連線之間夾角的餘弦值。
3. 模仿附錄中的折紙法，設計一個以 A4 紙折出正六面體的方法。
4. 計算正八面體中心點與兩相鄰頂點連線之間夾角的大小，由此設計一個折出正八面體的方法。
5. 解釋附錄中的折紙方法爲何可以造出正四面體。

參考書目

1. 布施知子著，高嘉蓮譯（2001）。《長方形折紙》。台北：百善書房。
2. 梁宗巨（1995）。《數學歷史典故》。台灣：九章出版社（本書原本由瀋陽：遼寧教育出版社於 1992 年出版）。
3. 華羅庚（1984）。《華羅庚科普著作選集》。上海：上海教育出版社。
4. 談祥柏（1986）。《數學山海經》。上海：少年兒童出版社。

~ 後記 ~

到了今天，我仍然記得那年在大學圖書館中第一次閱讀李學數《數學和數學家的故事》時的興奮心情。雖然一直以來我對歷史科都提不起興趣，但是李教授的數學故事卻深深地吸引著我，更使我毫不猶豫地決定選修由梁鑑添博士及蕭文強教授主講關於數學發展史的課。

自從大學畢業到學校工作以來，我亦嘗試追隨著三位前輩的步伐，在不同機構的刊物之中發表關於數學歷史和數學故事的文章，幸運地亦得到不少朋友的支持和好評。現在更得到教育局課程發展處數學教育組的邀請，將部分曾經發表過的文章結集成書出版，實在令我感到十分光榮。

此書一共蒐集了九篇曾經公開或以半公開形式發表過的文章，爲了隆重其事，我亦增加了一篇新文章作爲全書的引子，更新了一些過時的資料，同時在各篇中補充了一些當年發表時遺漏了或因篇幅所限而刪掉了的內容。希望今次可以做到不單資料充足，而且內容有趣吸引的效果。

此書得以順利出版，實有賴數學教育組同事的努力所致。他們不辭勞苦、嚴謹、謹慎地爲我修訂文中的每字、每句，亦爲我聯絡各個機構，處理版權的問題，令我非常感激和佩服。在此向他們致以衷心的謝意！

梁子傑

2008 年秋