傳染病的數學模型

學習階段： 4（必修部分 和 單元一）

學習單位： 進階應用
探索研究

目的：
(i) 幫助學生聯繫 STEM 教育與現實生活
(ii) 讓學生認識生活中的數學及應用資訊科技解決問題
(iii) 讓學生認識數學是協助規劃的有效工具

先備知識：
(i) 必修部分的「指數及對數函數」 和 「等比數列」
(ii) 初中「概率的簡單概念」
(iii) 延伸部分單元一中有關微積分的課題

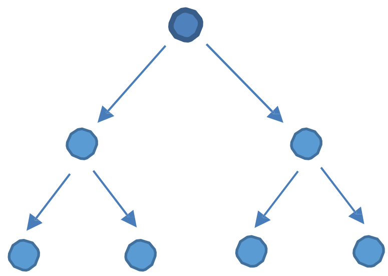
傳染病的數學模型

背景資料：禽流感、非典型肺炎、伊波拉病毒都是曾於過去二十年發生的疫症，它們嚴重損害全球人類的生命和財產。

教師可與同學們討論以下兩個簡化版的傳染病數學模型，讓學生初步認識數學如何應用於日常生活情境。

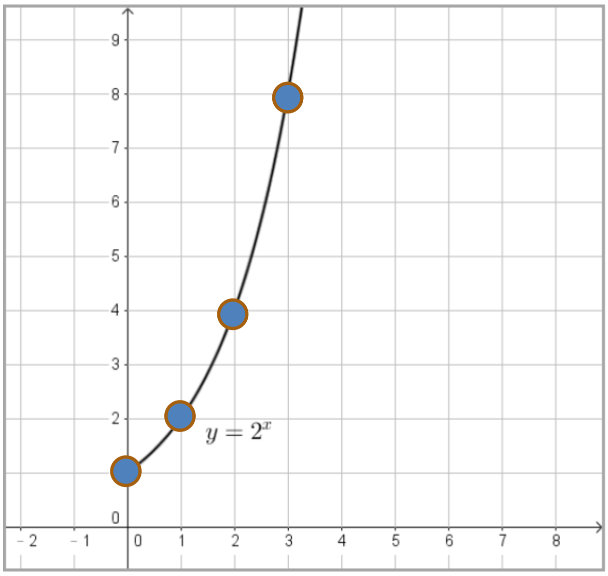
兩個傳染病數學模型的基本假設：
1. 人口處於一個封閉範圍
2. 人口數目固定
3. 受感染者只會一次經接觸把病傳染給其他人士
4. 不考慮受感染者康復或死亡等情況

模型一：
1. 假設開始時，有一位受感染者
2. 該位受感染者經一次接觸把疾病傳染給另外兩位未受感染的人士
3. 該兩位新受感染者繼續各自把病毒傳給另外兩位未受感染的人士
4. 過程持續，直至所有人均受到感染，如下圖所示。



模型一的建構：

根據以上情境，得出 $y=2^x$ ，當中 x 表示第幾輪的接觸，y 表示該輪接觸後新受感染者的數目。



數學模型的討論問題：

1. 需要多少輪傳播才能感染課室內的所有人？整間學校又怎樣？
2. 若每一輪接觸有三位新的受感染者，結果怎樣？
3. 假設全港有 780 萬人口，依據這個數學模型，約經多少輪傳播可感染全港市民？
4. 除基本假設的條件外，這個數學模型還有甚麼限制？

教師備註： 這是一個模擬疾病散播的最簡單數學模型，但過分簡化，例如這個模型並沒有考慮受感染者其後的狀況，他們可能經醫治後康復、死亡或繼續傳染其他人。這個模型也沒有考慮病患者會被隔離和未受感染人士的保護措施等。

模型二的建構：

我們投擲一粒勻稱骰子模擬受感染人數的變動，感染人數並不固定。

我們考慮兩個情況：

(i) 感染人數的期望值大於 1

(ii) 感染人數的期望值小於 1

情境一：

骰子上的數字	新受感染者的數目
1	0
2	0
3	1
4	2
5	2
6	3

受感染人數的期望值 = $\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 3=\frac{4}{3}$

受感染人數的期望值大於 1，傳染病爆發。

情境二：

骰子上的數字	新受感染者的數目
1	2
2	1
3	1
4	0
5	0
6	0

受感染人數的期望值 = $\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times 0=\frac{2}{3}$

受感染人數的期望值小於 1，傳染病停止散播。

課堂活動：

教師可要求學生分成小組，每組獲得一粒勻稱骰子及 30 顆數粒，並進行以下活動 :

1. 選取情境一或情境二。
2. 先把一顆數粒放在桌面代表一位受感染人士，即是傳染病的源頭。
3. 投擲骰子一次。假設擲得數字 4。在情境一，即兩位人士受感染。多把兩顆數粒放在桌上顯示新受感染的人士的數目。在情境二，沒有新人士受感染，傳染病停止散播。
4. 繼續為每一位新受感染人士投擲骰子，根據結果把適當數目的數粒放在桌上。
5. 繼續投擲骰子直至沒有新人士受感染或所有數粒已經用完。
6. 記錄傳染病的傳播過程於圖表上。
7. 模擬兩種情境數次，繪畫它們的圖像並作出比較。

數學模型的討論問題：

1. 在每種情境下，傳染病是爆發還是停止散播？
2. 平均來說，傳染病在每個情境下可以傳播多少輪？
3. 這個模型在哪一方面可以幫助我們理解傳染病的傳播過程？
4. 這個數學模型有沒有遺漏一些重要因素？你想到如何改善它嗎？

挑戰題：

現有一群人受到傳染病的威脅。該群人可分為兩類：健康人士和受感染人士。 設 p 為健康人士受感染的概率， r 為每月受感染人士康復的概率。假設最初有 8 位健康人士， 2 位受感染人士。

數學模型：

學生可投擲一粒勻稱的六面骰子，模擬該 10 位人士在這 10 個月期間的健康變化。假設這 10 個月內沒有人病逝，及學生為每一位人士的每月健康變化投擲勻稱骰子。

1. 學生為一位健康人士投擲骰子，若擲得數字 1，2 或 3，則該位人士在該月會受到感染（即 $p=\frac{1}{2}$ ）。
2. 學生為一位受感染人士投擲骰子，若擲得數字 4 或 5，則該位人士在該月康復（即 $r=\frac{1}{3}$ ）。
3. 若出現其他結果，他們的現況不變。

建議答案：

設 x 為人群中受感染的人士的比例，初始值為 0.2。我們可以用以下的表達式模擬 x 的變化率:

$$\frac{dx}{dt}=p\left(1-x\right)-rx$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-x\right)-\frac{1}{3}x$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=\frac{3-5x}{6}}$$

教師備註：

(i) 學生應能從所給予的條件建立有關 x 變化率的表達式，但課程並不要求學生解微分方程。教師可向能力較高的學生展示解題技巧。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3-5x}{6}$$

$$\int\frac{6}{3-5x}dx=\int dt$$

$-\frac{6}{5}\ln\left(3-5x\right)=t+k$ ，當中 k 為常數

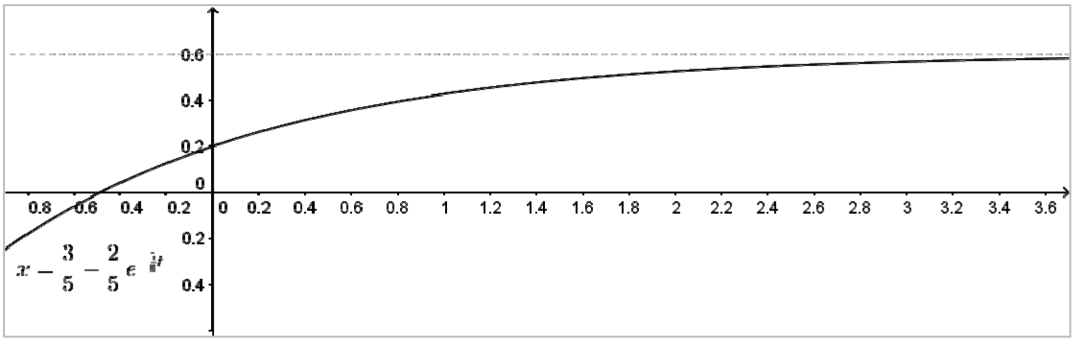
當 $t=0$ 時，$x=0.2$；所以 $k=-\frac{6}{5}\ln\left(2\right)$ ，因此

$$-\frac{6}{5}\ln\left(3-5x\right)=t-\frac{6}{5}\ln\left(2\right)$$

$$-t=\frac{6}{5}\ln\left(\frac{3-5x}{2}\right)$$

$$\frac{3-5x}{2}=e^{-\frac{5}{6}t}$$

因此 $x=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{6}t}$ ，而當 t 趨向無限大時，x 趨向 $\frac{3}{5}$ 。數學模型的圖像如下：



當 p 和 r 的數值改變，答案會產生怎樣的變化?

(ii) 另一個處理這個問題的做法是給學生建議答案 $x=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{6}t}$ ，並要求他們驗證這答案是否滿足該微分方程。

參考資料：

有關傳染病數學模型的網站

https://motivate.maths.org/content/DiseaseDynamics/

此示例主要涉及以下的共通能力：

1. 明辨性思考能力
   - 比較數學模型與現實情況，分析數學模型的不足之處

2. 解難能力
   - 在解決現實生活問題時運用數學知識建構答案
   - 應用實物模擬抽象數學情境