高中數學課程闡釋：單元二（代數與微積分）

教育局
課程發展處
數學教育組

目 錄

©2010 版權為香港特別行政區教育局所有；歡迎作教育及研究等非牟利用途，但請列明出處。

ISBN 978-988-8040-42-1

前 言

《數學課程及評估指引(中四至中六)》(2007)(以下簡稱《課程及評估指引》)是為 2009 年 9 月實施的新高中學制而編訂。高中數學課程包括必修部分及延伸部分。延伸部分包括兩個單元，分別是單元一(微積分與統計)及單元二(代數與微積分)。

在《課程及評估指引》中，單元二的學習重點以表列形式歸於不同學習單位內。表中「注釋」欄的內容為學習重點的補充資料。本小冊子內的課程闡釋旨在進一步解釋：

(一) 單元二學習重點的要求；

(二) 單元二的教學建議；

(三) 單元二學習單位之間的關係和結構；及

(四) 必修部分與單元二的課程銜接。

本小冊子內的課程闡釋連同《課程及評估指引》內每一學習單位的「注釋」欄及教學時數，可顯示該學習單位處理的闊度和深度。教師宜在施教單元二時，把必修部分及單元二的內容視為連貫的數學知識，並培養學生運用數學解決問題、推理及傳意的能力。此外，教師須留意，《課程及評估指引》中的學習單位及學習重點的編排次序並不等同於學與教的次序，教師可因應學生需要有系統地編排學習內容。

歡迎各界人士就本小冊子提供意見和建議。來函請寄：

九龍油麻地彌敦道 405 號

九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任(數學)收

傳真：3426 9265

電郵：ccdoma@edb.gov.hk

(空白頁)

基礎知識領域

基礎知識領域內容包括五個學習單位，可作為單元二內微積分領域和代數領域的先備知識。這些基礎知識能貫通必修部分及單元二。因此，深入處理此領域內的課題並非本課程的重點。

學習單位「根式」提供必要工具協助學生掌握微積分領域內的極限和導數。學習單位「二項式定理」是證明學習單位「求導法」內的一些法則的基礎。學生應能應用數學歸納法證明命題。學習單位「續三角函數」介紹弧度法、六個三角函數和一些在學習微積分常用的三角公式。學生應理解弧度法在微積分領域中的重要性。學習單位「e 的簡介」幫助學生理解自然對數為重要的數學概念，特別是在微積分求導法及積分法中十分重要。

由於基礎知識領域與其他領域有很強的聯繫，教師應編排合適的教學次序以照顧學生的學習需要。例如，教師在教授從基本原理求導數時，可將學習單位「根式」融入學習單位 6「極限」中，使學習內容更為連貫。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
1. 根式	1.1 將形如 $\dfrac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 的數式的分母有理化	1.5

課程闡釋：

本學習單位的重點是要將形如 $\dfrac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 的數式的分母有理化。教師可指出數式 $\dfrac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 與 $m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})$ 可以經過有理化步驟，由其中一數式轉化為另一數式，所以此二數式實際上是同類根式。這些技巧能幫助學生在學習單位 6 中計算極限。學生可應用此技巧將分母或分子有理化以求出諸如 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ 的極限。教師可選擇在教授極限時才引入本學習單位。

教師應注意在第三學習階段中，學生未必掌握有理化的概念。只有那些已學習過第三階段中學習單位「有理數及無理數」內非基礎部分的學習重點「將含有 $\sqrt{a}$ 形式的分母有理化」的學生，才接觸過這個概念。

教師應與學生重溫基本代數恆等式 $a^2-b^2\equiv(a-b)(a+b)$ 作為本學習單位的先備知識。

教師不須討論包含三項或以上異類根式諸如 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ 的分母有理化。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
2. 數學歸納法	2.1　理解數學歸納法原理	5

課程闡釋：

數學歸納法是證明數學命題的重要工具。學生應能在單元二中運用此原理證明有限數列求和及整除性有關的命題。

在《課程及評估指引》中，「理解」的要求一般比「認識」高。「理解數學歸納法原理」意謂學生須懂得數學歸納法的步驟、為何原理成立、原理何時失效及應用原理解決問題。

開始介紹數學歸納法時，引用的例子務求簡易，以令學生能掌握及理解。

在必修部分學習單位 7 中，學生應理解等差與等比數列的求和公式。學生亦可能接觸過其他有限數列的求和公式。學生會質疑諸如 $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的公式的正確性。教師可利用以下方法引導學生發現這些公式。

教師可考慮以下情況要求學生猜想首 n 個單正整數和的公式。

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+3 &= 4\\
1+3+5 &= 9\\
1+3+5+7 &= 16\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &= ?
\end{aligned}$$

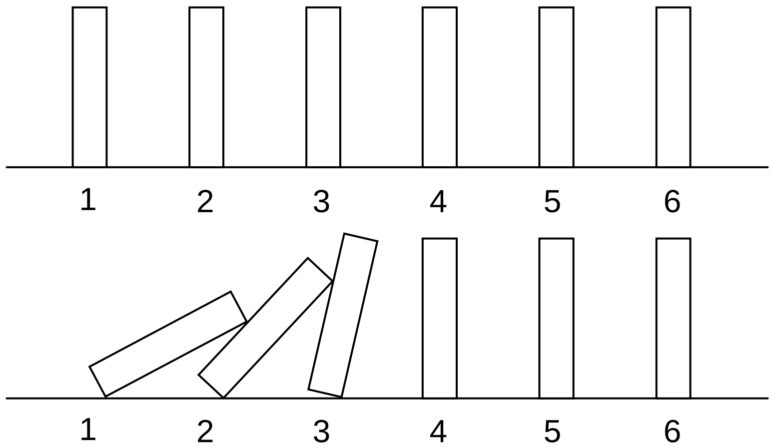
公式 $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ 在 n = 1, 2 及 3 時成立。然而，如何得知公式對所有正整數均成立？是故，有需要作出證明。數學歸納法就是其中一個有

用的工具。

教師可讓學生探索一些有限數列的求和公式，例如

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 或 $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ 。讓學生發現公式後，再運用數學歸納法原理證明公式。

教師可用骨牌遊戲來解說數學歸納法原理。



在使用數學歸納法原理時，以下的兩個步驟均十分重要：

(1) 證明 P(1)成立。

(2) 證明若 P(k)成立，則 P(k+1)亦成立(其中 k 為正整數)。

教師可利用以下反例闡釋若不能完成上述兩個步驟時，不能證明命題 P(n)對所有正整數 n 均成立。

(a) 對於任意正整數 n， n^2+n+17 是質數。[1]

(b) 對於任意正整數 n， $2^{2^n}+1$是質數。[2]

[1] 對於 n =1, 2, 3,…,15，n^2+n+17 為質數。

當 n = 16， $n^2+n+17=16^2+16+17=17^2$ 並非質數。

[2] 費馬猜測若 n 為正整數，所有形如 $2^{2^n}+1$ 的數(即費馬數)均為質數。他只驗算當 n = 1,2,3,4 時，命題成立。及後歐拉發現第五個費馬數並非質數。歐拉指出 $2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417$。

(c) 對於任意正整數 n，$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+2$。

(a)及(b)為不完全歸納的例子，在只有有限種情況下「P(n)成立」。在證明的過程中，不能完成上述的第 2 個步驟，所以不能證明 P(n)對於所有正整數 n 均成立。

在例(c)中，雖然可以完成第 2 個步驟，但由於 P(1)不成立，所以 P(n)不成立。

教師可利用多一些例子展示如何應用數學歸納法。例如：

對於任意正整數 n，證明

(a) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。

(b) 23^n-1 可被 11 整除。

(c) 7^n+3n-1 可被 9 整除。

(d) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 $a+b$ 整除。

教師應提醒學生在作出結論時，須注意以下幾個名詞的使用：數、整數、正數及正整數。

學生應學習原理的一些常見變化。學生應能改變應用數學歸納法時的兩個步驟去證明一些如「對所有偶正整數 n，a^n-b^n 可被 $a+b$ 整除。」的命題。然而，數學歸納法原理的一些較複雜變化(如以下的例子)不是課程所需：

(1) P(1) 成立。

(2) 若 $1\le n\le k$，P(n) 成立，則 P(k+1) 亦成立(其中 k 為正整數)。

或

(1) P(1) 及 P(2) 成立。

(2) 若 P(k−1) 及 P(k) 成立，則 P(k+1) 亦成立。

學生不須運用數學歸納法去證明與不等式有關的命題。

教師可使用數學歸納法給學生證明下一個學習單位中的二項式定理。

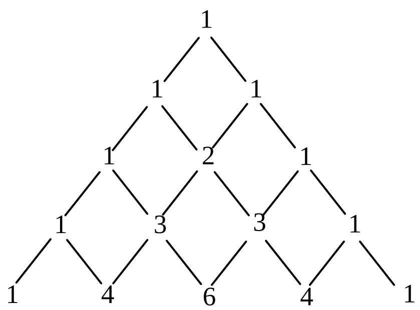
學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
3. 二項式定理	3.1 以二項式定理展開指數為正整數的二項式	3

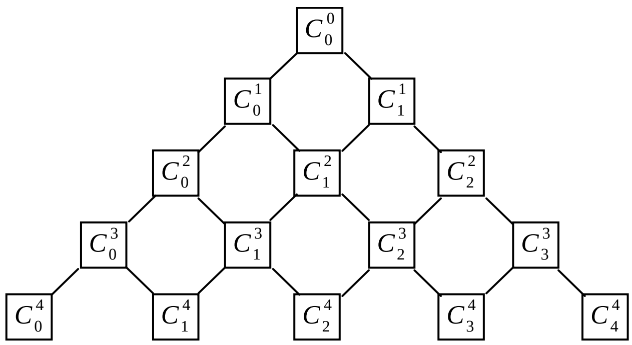
課程闡釋：

學生應理解怎樣運用數學歸納法原理去證明二項式定理。

在必修部分的學習單位「排列與組合」中已有討論過 C_r^n 的定義。由此，可以使用組合方法來證明二項式定理。考慮數式 $(a+b)^5$ 的展式中，a^3b^2 項的係數為將 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ 展開時，從上列 5 組中揀選兩個 b 的組合數目。學生應不難理解 C_2^5 為 $(a+b)^5$ 的展開式中 a^3b^2 的係數。

在介紹時，可以著學生以組合方法求得 $(a + b)^n$ 的展開式中各項的係數，再與左邊帕斯卡三角[3]的數值作比較。





[3]帕斯卡於 1654 年出版的《算術三角論》介紹二項式係數的三角形排列方法及其應用。因此，一般稱這個三角形的排列方法為帕斯卡三角。事實上，早於 13 世紀，中國數學家楊輝在他的著作《詳解九章算術》(1261) 已展示相同的三角形，並指出「賈憲用此術」。故此，這個三角形的排列方法亦稱為「楊輝三角」或「賈憲三角」。

一般而言，$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$

為使二項展式的表達更加簡潔，引入求和符號(Σ)便變得十分合理，但應注意不須引入涉及求和符號的繁瑣運算。

二項式定理是屬於基礎知識領域內的學習單位，所以涉及這定理的有關問題和例子應簡單和直接。因此，不須引入以下內容：

- 三項式的展開
- 最大係數、最大項和二項式係數性質
- 求近似值的應用

二項式定理亦可用於從基本原理來證明 $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$，其中 n 為正整數。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
4. 續三角函數	4.1 理解弧度法的概念 4.2 透過弧度法求弧長及扇形面積 4.3 理解餘割函數、正割函數和餘切函數及其圖像 4.4 理解恆等式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ 4.5 理解正弦、餘弦、正切函數的複角公式、二倍角公式及正弦、餘弦函數的和積互化公式	11

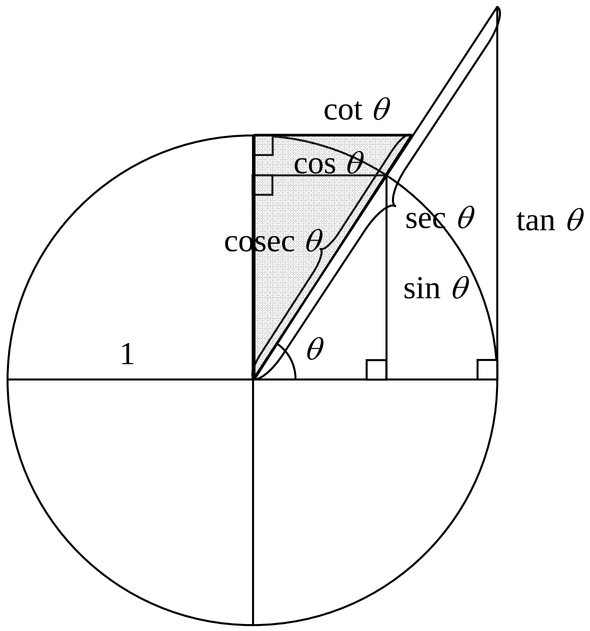
課程闡釋：

在第三學習階段中，學生已學會以度數來量度角度及利用比例計算弧長和扇形面積。在單元二中，學生將學習以弧度來量度角度及以弧度有關的公式來計算弧長和扇形面積。在學習重點 6.2 注釋欄中，只有當 θ 以弧度表示時，公式 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 才成立。因此，在處理有關微積分的問題時，涉及三角函數的角皆以弧度來表示。

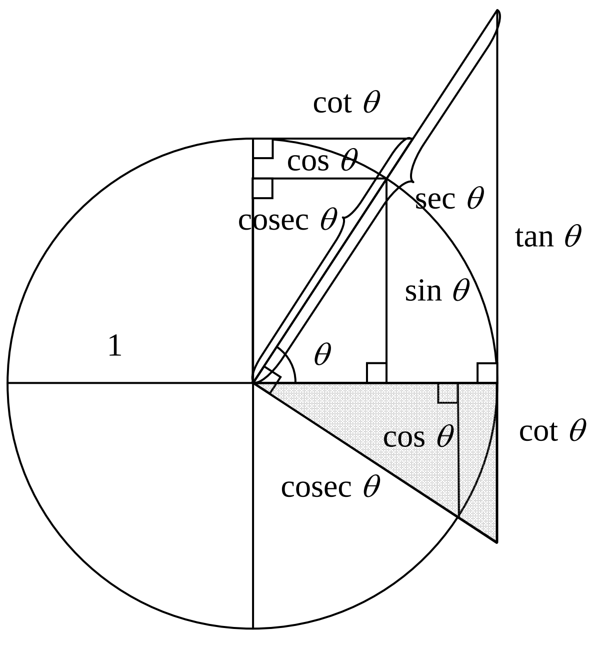
在必修部分學習重點 13.1 中，學生已學會正弦、餘弦和正切的三角函數及其圖像和性質(包括極大值、極小值和週期性)。學生在本單元中將會學習另外三個三角函數(即餘割函數、正割函數及餘切函數)的圖像和性質。由於學生在必修部分學習重點 9.1 須描繪及比較不同函數的圖像，包括三角函數，學生應能從三個已學習的三角函數的圖像和性質描繪另外三個三角函數的圖像和性質。在此，教師可先引導學生從 $y=f(x)$ 的圖像描繪 $y=\frac{1}{f(x)}$ 的圖像，再從 $y=\sin\theta$ 的圖像探究 $y=\operatorname{cosec}\theta$ 的圖像。學生應能探究及理解函數 $y=\operatorname{cosec}\theta$ 的定義域、極大值和極小值、對稱性和週期性。他們更可進一步描繪正割函數及餘切函數的圖像並發現其性質。

在第三學習階段中，學生已學會恆等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，他們應能用此式推導出其餘兩個恆等式，$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 和 $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$。學生亦可利用這些恆等式簡化其他三角數式。

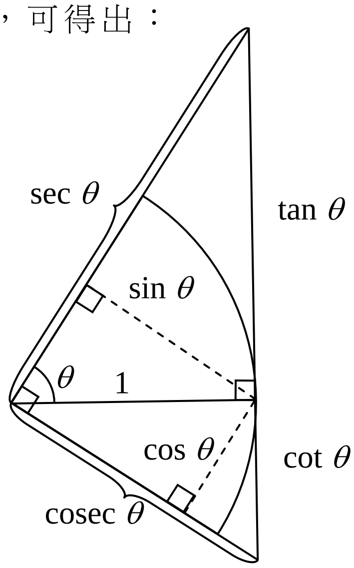
教師亦可利用下圖說明正弦、餘弦、正切、餘割、正割和餘切的意義及其關係，並引導學生發現上述的恆等式。下圖的圓為單位圓。



透過旋轉上圖有陰影的三角形至新位置，可得到下圖。



在圖中加入兩條虛線，可得出：



學生可從上圖觀察到三角恆等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$、$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 及 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$。惟上圖的證明只適用於 θ 為銳角。

學生會發現《課程及評估指引》第 52 及 53 頁的學習單位 4 注釋欄內列出的公式在解涉及三角函數的問題時是非常有用的。

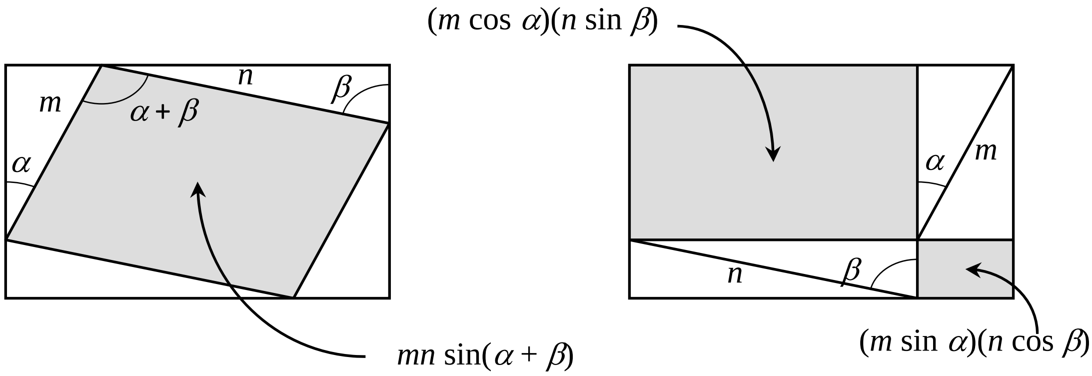
教師可運用圖示推導複角公式

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B \text{ 和 } \cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B，$$

並利用這四個基本公式推出其他公式。

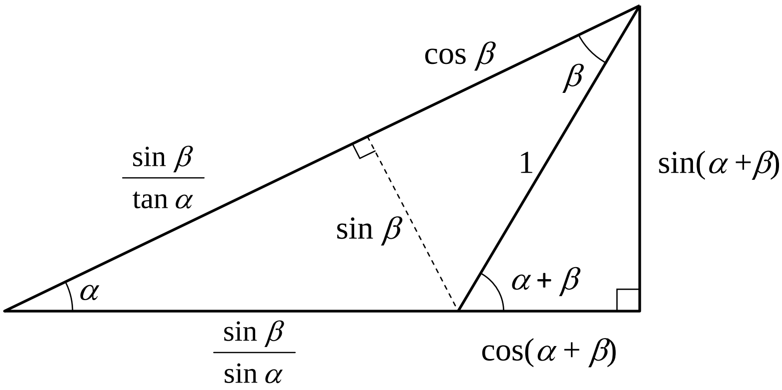
教師可從參考書/教科書中找到有關上述四個基本公式的不同證明。現提供這些公式的一些非傳統證明給教師參考，但須注意在一般的圖示證明中，對有關的角度大小有一定的局限。

<u>例子一</u>　證明 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。



$$
\begin{aligned}
\text{左圖中陰影部分的面積} &= \text{右圖中陰影部分的總面積}\\
mn\sin(\alpha+\beta) &= (m\sin\alpha)(n\cos\beta)+(m\cos\alpha)(n\sin\beta)\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

<u>例子二</u>　證明 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。



$$\sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta+\dfrac{\sin\beta}{\tan\alpha}}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\left(\cos\beta+\frac{\sin\beta}{\tan\alpha}\right)\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

及

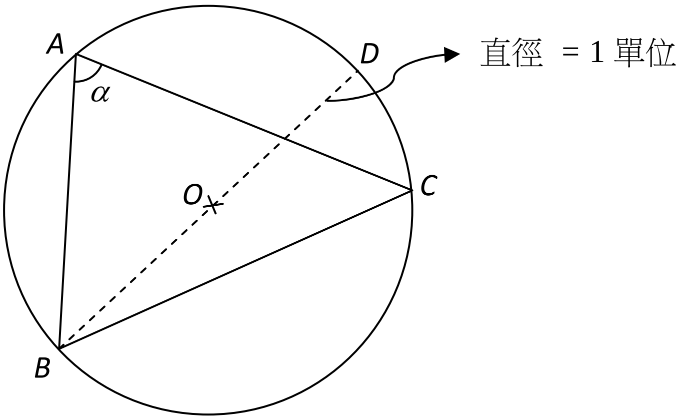
$$\cos\alpha = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}}{\cos\beta+\dfrac{\sin\beta}{\tan\alpha}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\frac{\cos^2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

<u>例子三</u>(本例子可視為必修部分學習單位 18 內「托勒密定理」的應用)

(a)　如下圖所示，BOD 為三角形 ABC 的外接圓的直徑。



連接 CD。

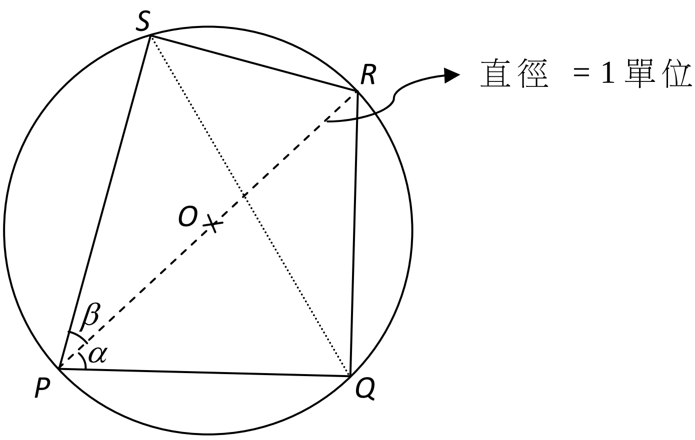
$\angle BDC = \alpha$，$\angle BCD = 90°$。

$$\sin\alpha = \frac{BC}{1}$$

$$BC = \sin\alpha$$

(b) 以下將會運用托勒密定理，證明 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$。

設 $PQRS$ 為圓內接四邊形，其外接圓的直徑 $PR = 1$ 單位。



由於 PR 是直徑，$\angle PQR = 90°$，$\angle RSP = 90°$。

$PQ = \cos\alpha$，$QR = \sin\alpha$，$RS = \sin\beta$，$SP = \cos\beta$。

由(a)，$QS = \sin(\alpha+\beta)$。

由托勒密定理，$PQ\times RS+QR\times SP=PR\times QS$。

$\therefore\quad \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = 1\times\sin(\alpha+\beta)$。

即 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$。

$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$ 和 $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$ 可以由上述的兩個複角公式導出。這幾個公式加上和積互化的公式是計算積分的重要工具。教授這一個學習單位時，不須引入半角公式、三倍角公式、*t*-公式及「輔助角的形式」。

在必修部分學習重點 13.2 中，學生應能解簡易的三角方程(其解限於 0° 至 360°區間)。在此，學生應能解答案取值範圍為 0 至 2π 的三角方程。這一節討論的內容可應用到解學習重點 8.4 內有關極值的問題。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
5. e 的簡介	5.1　認識 e 和自然對數的定義及其記法	1.5

課程闡釋：

必修部分的學習單位 3 和 5，為非基礎課題，其中已討論指數函數、對數函數和它們的圖像。數字 e 及自然對數是十分重要的數學概念。它們在微積分的學習中有重要的意義。學生會在本學習單位中學習指數函數 e^x。

一般引入 e 的方法有下列兩種：

(1)　$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

(2)　$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

單元二(代數與微積分)會以第一個方法引入數值 e。

介紹 e 的時候，可以使用以下以複利息計算本利和為例子。

若將一筆款項存於銀行一年，年利率為 1%。以複利息計算，按以下情況求本利和：

(i)　每一季為一期；

(ii)　每一個月為一期；

(iii)　每一日為一期；

(iv)　每一小時為一期；

(v)　每一秒為一期。

由此，引出求極限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的討論。

證明這一個極限值的存在須應用單調收斂定理[4]。然而，這個定理並不包括在本課程的範圍內。因此，學生並不須證明有關極限的存在問題。

作為延伸，可進一步向學生介紹 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ 的證明。

單元一(微積分與統計)則以第二個方法導入，其中涉及展開二項式的 n 次冪 $(1+\frac{x}{n})^n$。

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{x}{n})^n &= \sum_{r=0}^{n} C_r^n (\frac{x}{n})^r \\
&= C_0^n(\frac{x}{n})^0 + C_1^n(\frac{x}{n})^1 + C_2^n(\frac{x}{n})^2 + C_3^n(\frac{x}{n})^3 + \ldots + C_r^n(\frac{x}{n})^r + \ldots + C_n^n(\frac{x}{n})^n \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\frac{x^r}{n^r} + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{x^n}{n^n} \\
&= 1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{x^r}{r!} + \ldots \\
&\quad + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\Bigg[1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{x^r}{r!} + \\
&\qquad \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}\Bigg] \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots
\end{aligned}
$$

代入 $x = 1$，可得

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots$$

[4]單調收斂定理指出每一個單調上升並有上界的序列必定收斂及每一個單調下降並有下界的序列也必定收斂。

利用計算機，可以得到 e 與 2.71828 近似。

教師可提醒學生，自然對數函數擁有常用對數函數的所有性質，所以不須把自然對數函數作為函數的一個新類別來處理。因為在以後的學習單位中，換底公式尤其是在求不同底的對數函數的導數時十分重要，所以應該重溫必修部分學習重點 3.3 有關換底公式的內容。

這一個學習單位亦可安排在教授學習重點 6.1 之前。

微積分領域

微積分領域包括「極限和求導法」及「積分法」。

在學習「極限和求導法」前，學生須掌握函數的概念、其圖像及性質。此外，有關根式的操作技巧亦有助他們解決很多求極限的問題。學生可使用二項式定理證明公式 $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$(其中 n 為正整數)。

教師可進一步引導學生欣賞數學的美，例如無理數 e、函數 e^x 與其導數等。學生亦會學習到求導法在解決有關變率、極大值及極小值等問題的重要性。

不定積分與求導法有一個互逆的聯繫，而微積分基本定理將這兩個表面上不同的概念連繫起來。在這階段，定積分的其中一個應用是求平面圖形的面積和旋轉體的體積。學生更可欣賞如何使用定積分來計算一些由非直線所組成的圖形面積，諸如圓面積等。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
極限和求導法		
6. 極限	6.1 理解函數極限的直觀概念 6.2 求函數的極限	5

課程闡釋：

「極限」是微積分中最基本的概念。完成必修部分學習單位 2 及 9 後，學生對不同函數及其圖像的概念應該有一個全面的認識。但是，學生遇見的函數一般是連續的。在這學習單位中，學生將遇到不連續函數，並會討論到不連續函數的一些性質。介紹這一個課題時，可從連續及不連續函數的圖像開始，並進一步引入一些函數極限的直觀概念。繪圖軟件在探究函數圖像時十分有效。但須注意，函數極限的嚴格定義不是課程所需。

為了說明函數的連續性，可向學生介紹絕對值函數 $|x|$、正負號函數 $\operatorname{sgn}(x)$、上取整函數 $\lceil x \rceil$ 及下取整函數 $\lfloor x \rfloor$，但須謹記這些函數只應視為例子，而毋須討論函數連續性的嚴格定義。學生亦不須學習涉及絕對值函數的有關運算、求導和積分。

教師可以採用以下的例子，藉考慮函數的圖像，與學生討論某些極限是否存在。

(a) 設 $f(x)=|x|$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

(b) 設 $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x\ge 1 \\ x-1 , & x<1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

(c) 設 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

對於能力較佳的學生，教師尚可要求他們描繪 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的圖像，其中 $f(x) = \begin{cases} x+1 , & x \ge 1 \\ 2x , & x < 1 \end{cases}$ 及 $g(x) = \begin{cases} -x , & x \ge 0 \\ x+2 , & x < 0 \end{cases}$，並求出圖像不連續點的 x 值。

教師不須證明有關函數的和、差、積、商、純量乘法及複合函數極限的定理，但須清楚陳述這些定理成立的條件。例如，指出只有 $\lim_{x\to a} f(x)$ 及 $\lim_{x\to a} g(x)$ 同時存在時，才有 $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$。同時，亦可考驗學生能否舉出 $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ 不成立的例子。

學生應知道如何求簡單函數的極限，諸如 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$。學習單位 1「根式分母有理化」是解決這類問題的重要工具。學生亦應能運用類似技巧將分子有理化求函數的極限。

學生應理解兩個極限的重要公式，$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ （θ是以弧度為單位）和 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$。

公式 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 對於求三角函數的導數十分重要。應注意這公式的證明涉及應用「逼近定理」。一個簡易的方法來處理這個極限是利用圖形比較兩個三角形及一個扇形的面積。

在介紹公式 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 時，可利用代換 $x = \ln(1+h)$ 和 e^x 的定義來證明，再由這公式求 e^x 的導數。可讓學生利用公式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ 猜想當

x 接近 0 時，$\dfrac{e^x - 1}{x}$ 的極限值。

學生須認識求有理函數在無窮大時的極限值，但其中並不涉及部分分式的使用。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
極限和求導法		
7. 求導法	7.1 理解函數導數的概念 7.2 理解求導法的加法法則、積法則、商法則及鏈式法則 7.3 求包含代數函數、三角函數、指數函數及對數函數的函數之導數 7.4 以隱函數求導法求導數 7.5 求顯函數的二階導數	14

課程闡釋：

學生應能從基本原理求包括常數函數、x^n (其中 n 為正整數)、$\sqrt{x}$、$\sin x$、$\cos x$、e^x、$\ln x$ 等初等函數的導數。他們亦應能運用有理化的技巧從基本原理求諸如 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 函數的導數。從基本原理證明 $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$(其中 n 為正整數)時，須利用二項式定理。教師亦可運用數學歸納法去證明此公式。

學生應熟悉導數的不同記法，包括 y'，$f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$，但不須判斷函數的可導性。

學生應能運用加法法則、積法則、商法則及鏈式法則求函數的導數，但須注意在必修部分中，學生不須學習複合函數的概念。如 $\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{dx}=\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{d\left(\sin x\right)}\cdot\frac{d\left(\sin x\right)}{dx}=2\sin x\cos x$ 等展示有助學生認識鏈式法則。

當對數函數的底不是 e 時，須運用到必修部分中的學習重點 3.3 (非基礎課題)所學過的「換底公式」。

例如， $y=\log_2 x$ ，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_2 x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x\ln 2}$$ 。

應向學生解釋隱函數求導法是一個有用的工具求導數，過程中不須一定要將以自變量表示因變量。方程諸如 $x^3-3xy+y^3=3$ 及 $x=y+y^2$ 可作為說明應用隱函數求導法求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子。對一些方程，y 是不容易或有時候不能以 x 表示。若目的只是求導，學生不須一定要將 y 以 x 表示。

諸如 $y=(x^2+2)(3x-2)^2(4x+5)^6$ 及 $y=\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^4$ 等方程可作為對數求導法的例子。

求隱函數的二階導數在本單元中沒有廣泛應用，所以學生只須求顯函數的二階導數。在學習重點 8.2 中，運用二階導數求函數的極值是十分有用的。教師須介紹包括 y''、$f''(x)$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的記法，但不須引入三階或更高階的導數。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
極限和求導法		
8. 求導法的應用	8.1 求曲線的切線和法線方程 8.2 求函數的極大值和極小值 8.3 描繪多項式函數及有理函數的曲線 8.4 解與變率、極大值和極小值有關的應用題	14

課程闡釋：

必修部分中的學習重點 2.3 及 2.4 (非基礎課題)，內容包括以圖解法或代數方法求二次函數的極大值/極小值。在單元二(代數與微積分)，求導法不限於應用在二次函數的極值問題。

學習重點 8.1 不單要求學生能找出曲線上一點的切線方程及法線方程，亦要求他們能夠求曲線外一點至曲線的切線方程。當中學生需要用到以代數方法解二元一次及二元二次的聯立方程，所以就必修部分學習重點 5.2(非基礎課題)的內容而言，學生應要有較為全面的理解。

求函數的局部極值(即是極大值或極小值)，可以用「一階導數判別法」和「二階導數判別法」。除局部極值外，應考慮閉區間端點的數值以判定全局的極值。若 $f''(x_0)=0$，「二階導數判別法」不適用於判別在 $x=x_0$ 的極值。在這情況下，學生須採用「一階導數判別法」。

學生須懂得用二階導數判別函數的凹凸性，並使用這些性質求函數的拐點。

教師應注意曲線描繪只限於多項式函數及有理函數。曲線的某些特徵能從其方程中容易地被觀察或找到。例如：

- 曲線的對稱性
- x 值和 y 值的限制

- 曲線與兩軸的截距
- 極大點與極小點
- 拐點
- 曲線的垂直、水平和斜漸近線

研究一個特定的曲線時，學生不須要考慮曲線的所有特徵。不同問題會考慮不同特徵，故須利用不同例子展示不同特徵。

曲線的凹凸性、遞增函數及遞減函數的概念對描繪曲線是十分有用的。曲線上拐點的切線穿越曲線，可以是水平的、斜的或甚至是垂直的。求斜漸近線的討論不須涉及複雜的極限計算，能運用長除法求有理函數曲線的斜漸近線方程便已經足夠。所以，須鞏固學生在必修部分學習重點 4.1 多項式除法的概念。

在解涉及極大值及極小值的文字題之前，應著學生留意以下幾點：

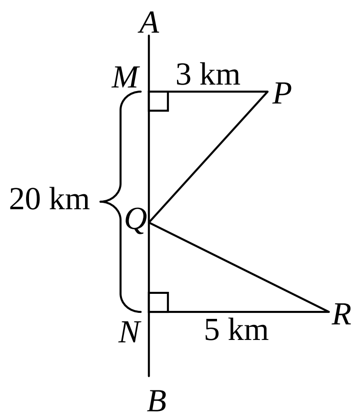
(1) 一個連續函數的局部極大值及局部極小值是交替出現的。

(2) 若一個函數只有一個轉向點，由問題的性質可清楚決定該轉向點是極大值還是極小值。

在解有關極值的問題時，應注意在某些情況下計算導數並不是求函數極大值及極小值的唯一方法。配方法是求二次函數的極大值和極小值的一個有效代數方法。在處理文字題時，題目中的現實情況有時會提供極佳的解題線索。例如，求導法可以用來解決以下的問題，但若考慮到現實情況，不用微積分的方法，可能更簡潔優美。

例子一

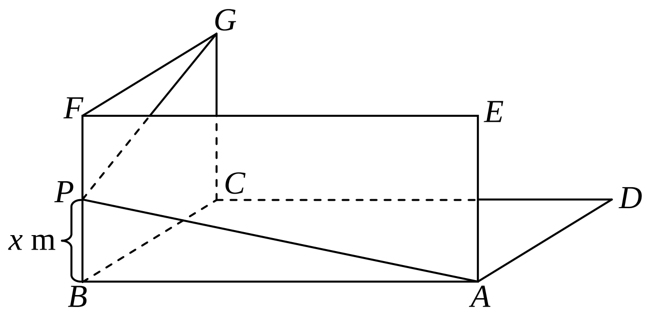
如圖，P 和 R 為河流 AB 同一邊的兩點。若要由 P 走到河邊的一點(稱作 Q)，再走到 R。問 Q 點應該在河岸的那一位置使得由 P 到 Q，再到 R 的路徑為最短？



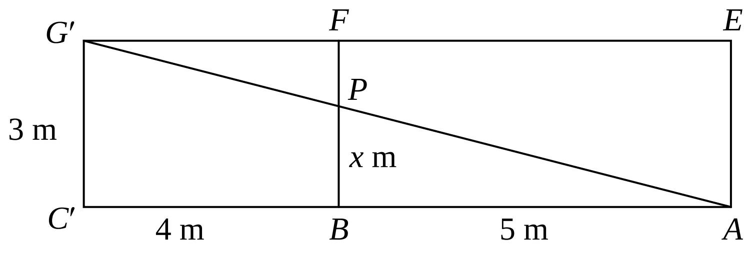
(提示：將 R 沿 AB 作反射得影像 R'。路徑 $PQR = PQ + QR = PQ + QR'$。若 PQR' 為直線時，路徑 PQR 的長度為最短。由相似三角形的性質，可求得 $MQ = 7.5$ km)

例子二

從房間地面 $ABCD$ 的牆角 A，沿 $ABFE$ 的牆壁、$FGCB$ 的牆壁鋪設一條電線，稱電線過 FB 的點為 P，其中 $AB = 5$ m，$BC = 4$ m，$BF = 3$m。求 x，使得鋪設的電線總長度 L 為最短。



(提示：想像以 BF 為旋轉軸，將 $BCGF$ 作 90°旋轉使得與 $ABFE$ 共面，稱 G 的影像為 G'。當 APG' 為直線時，L 為最短。由相似三角形的性質可得 $x = \frac{5}{3}$)



可考慮引入經濟學上有關最大淨利、平均淨利等問題，作為求導法在其他學科上應用的例子。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
積分法		
9. 不定積分法	9.1 認識不定積分法的概念 9.2 理解不定積分的性質及使用代數函數積分公式、三角函數積分公式及指數函數積分公式求不定積分 9.3 理解不定積分在現實生活或在數學情境的應用 9.4 使用代換積分法求不定積分 9.5 使用三角代換法求含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 、 $\sqrt{x^2-a^2}$ 或 $\sqrt{a^2+x^2}$ 形式的不定積分 9.6 使用分部積分法求不定積分	16

課程闡釋：

學生須理解不定積分是求導法的逆運算。若 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ 成立，則 $\int f(x)dx=F(x)+C$，其中稱 C 為積分常數。算式 $\int f(x)dx$ 稱為 $f(x)$ 的不定積分，但須知道不定積分不是唯一的。若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個不定積分，$F(x)+C$ (C 是一個常數)亦是 $f(x)$ 的不定積分。同時，亦須展示給學生運用不同方法計算不定積分，可得出看似不同答案的例子。

例如， $\int (x+1)^2\,dx=\int (x^2+2x+1)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C_1$ 及

$\int (x+1)^2\,dx=\int (x+1)^2\,d(x+1)=\frac{1}{3}(x+1)^3+C_2$ 。

教師可要求學生證明 $C_1=C_2+\frac{1}{3}$ 並注意以上兩個答案相差的只是常數項。

學習重點 9.2 注釋欄所列出的公式應須理解，而不應只是強記背誦公式。在推導公式 $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$ 時，須引入絕對值 $|x|$。學生不須學習 $f(x)$ 涉及絕對值的不定積分 $\int f(x)\,dx$。

代換積分法及分部積分法是求不定積分的有用工具。

若使用三角代換，答案中會包括 $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 及 $\tan^{-1} x$ 等函數。因為學生尚未有反函數的概念，教師須與學生討論這些反函數的記法與及介紹它們的主值。應注意毋須討論被積函數包括反三角函數的積分。

本單元不包括涉及部分分式的問題。

為避免繁瑣的計算，求一個積分時只限使用最多兩次分部積分法。同時，不須引入積分的歸約公式。

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
積分法		
10. 定積分法	10.1 認識定積分法的概念 10.2 理解定積分的性質 10.3 求代數函數、三角函數和指數函數的定積分 10.4 使用代換積分法求定積分 10.5 使用分部積分法求定積分 10.6 理解偶函數、奇函數及周期函數定積分的性質	11

課程闡釋：

教師須向學生介紹定積分的基本定義為和的極限。學生可能會將定積分和不定積分的記法混淆，所以應向學生介紹微積分基本定理作為這兩種概念的聯繫，並同時引入定理的證明。

學生應理解定積分中啞變量的概念，應向學生強調學習重點 10.2 注釋欄內定積分的所有性質。

偶函數、奇函數及周期函數定積分性質的討論有助學生更深入理解定積分。

學生須理解如何應用代換積分法證明學習重點 10.6 內注釋欄中提及的性質。

教師應注意以下部分不是課程所需：

- $f(x)$ 涉及絕對值的定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的計算

- 歸約公式
- 以定積分求無窮數列之和
- 廣義積分
- 不等式 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

學習單位	學習重點	時間
微積分領域		
積分法		
11. 定積分法的應用	11.1 理解以定積分求平面圖形面積的應用 11.2 理解以定積分求沿坐標軸或平行於坐標軸的直線旋轉而成的旋轉體體積的應用	7

課程闡釋：

在本單元，定積分的應用只限於計算平面圖形和旋轉體體積。教師可以幾何方法表示定積分定義和平面圖形面積之間的關係。透過展示圓面積、直立圓錐體積及球體體積公式的嚴格證明時，可以令學生欣賞到定積分的應用。應注意討論沿不同坐標軸或沿平行於坐標軸的直線旋轉而成的旋轉體體積之間的分別。

教師應引入「圓盤法」和「外殼法」，講解時，可以使用直觀的幾何方法，但毋須提供嚴謹證明。在某些情況下，「外殼法」在計算旋轉體體積時比「圓盤法」更為優勝。例如，計算曲線 $y=\sin x+x$ 與直線 $y=0$， $x=\frac{\pi}{2}$ 圍成的面積繞 y 軸旋轉的體積時，使用「外殼法」更為方便。教師可在計算同一旋轉體體積時，比較這兩種方法。

學生須學習計算空心旋轉體的體積。

代數領域

代數領域內容包括「矩陣及線性方程組」 及「向量」。

在這個領域內，學生會接觸到他們尚未遇見過的代數數學結構—「矩陣」。他們會發現矩陣的乘法並不是交換的。這個新的概念有別於學生過往經驗。學生須理解矩陣的概念、運算及其性質、逆矩陣的存在及行列式。行列式是研究矩陣性質的重要工具。

在第三學習階段，學生運用代數方法及圖像法解二元一次方程。在第三學習階段已學習過增潤項目「探究不相容或沒有唯一解的聯立方程」的學生，會對「相容」及「不相容」的概念有初步的認識。在這領域，學生可進一步探究線性方程組相容性或不相容性的條件。他們應能運用克萊瑪法則、逆矩陣和高斯消去法解線性方程組。可以讓他們理解到每一個方法的強項與弱項及如何選擇合適的方法解題。

為進一步延伸學生在代數領域的知識，在這階段向學生介紹向量的概念、運算及性質。純量積及向量積是研究幾何性質包括平行及正交的兩個重要工具。此外，學生亦可學習到如何運用向量方法求得平行六面體的體積、兩向量的夾角及三角形或平行四邊形的面積等。

學習單位	學習重點	時間
代數領域		
矩陣及線性方程組		
12. 行列式	12.1 認識二階及三階行列式的概念及其性質	3

課程闡釋：

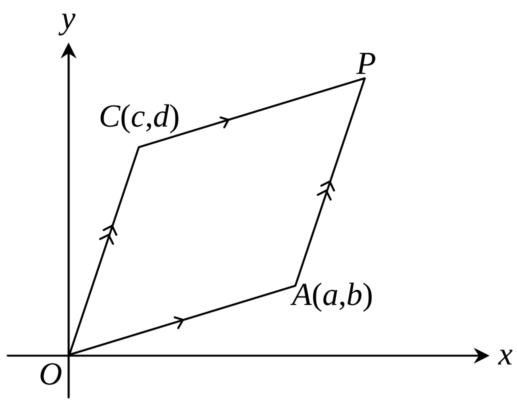
在矩陣及線性方程組的學習中，行列式是不可或缺的數學工具。

學生應認識二階及三階行列式的基本運算及性質。有關性質已詳列在《課程及評估指引》第 62 及 63 頁中的注釋欄內。

學生應認識 $|A|$ 和 $\det(A)$ 為矩陣 A 的行列式的兩個常用記法。

教師可向學生介紹行列式的一些應用，如以下所述。

如圖，$OAPC$ 為一經過原點 O 的平行四邊形，其中 $A=(a,b)$ 及 $C=(c,d)$。



平行四邊形 $OAPC$ 的面積$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$。

學習單位	學習重點	時間
代數領域		
矩陣及線性方程組		
13. 矩陣	13.1 理解矩陣的概念、運算及其性質 13.2 理解二階及三階方陣逆矩陣的概念、運算及其性質	9

課程闡釋：

對於一般學生來說，學習重點 13.1 有關 $|AB| = |A||B|$ 的一般證明相對困難，教學的時候可以使用例子來進行驗證而毋須證明。然而，不高於三階的情況下，其證明較為容易，教師可與學生進行較深入的討論。

雖然《課程及評估指引》的內容沒有特別提到單位矩陣及零矩陣，但是它們的定義及一些性質仍須討論。矩陣乘法的非交換性質，即 $AB \neq BA$，與學生過往的經歷非常不同，所以應加以強調。

在求 2×2 矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的逆矩陣時，學生須解以 x, y, z 及 w 為未知數的矩陣方程 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。為了查驗逆矩陣 $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 存在與否，很自然會考慮到 $ad-bc$ 的值。這個值正好是矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式並以 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 來表示。學習單位 12 中有關行列式的概念及性質與這一單位的內容有非常緊密的關係，教學時可考慮將它們放在一起。

學生應理解二階及三階方陣逆矩陣的概念、運算及性質。學生須判斷矩陣的可逆與否，並能夠求可逆矩陣的逆矩陣，例如使用伴隨矩陣或基本行運算等方法以求得逆矩陣。此外，在某些情況下，學生亦可能須要使用數學

歸納法原理來證明一些有關涉及矩陣的命題。

學習單位	學習重點	時間
代數領域		
矩陣及線性方程組		
14. 線性方程組	14.1 以克萊瑪法則、逆矩陣和高斯消去法解聯立二元和三元線性方程組	6

課程闡釋：

在第三學習階段，運用代數方法及圖像法解二元一次方程已有討論，而增潤項目內中亦有有關「探究不相容或沒有唯一解的聯立方程」、「相容」及「不相容」的初步介紹。在這學習單位中，會再進一步討論以克萊瑪法則、逆矩陣和高斯消去法解聯立二元和三元線性方程組，而涉及的線性方程組可以是齊次的或非齊次的。在這階段，可以清楚地向學生介紹「相容」及「不相容」的意義。

克萊瑪法則是行列式其中一個重要的課題。由克萊瑪法則，可以知道對於線性方程組 $A\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$，若$\Delta$為係數矩陣的行列式，其中$\Delta \neq 0$，方程組有唯一解。若$\Delta=0$，則不能使用克萊瑪法則。教師可與學生討論以下更一般的結果：

$$\Delta \cdot x = \Delta_x\ , \quad \Delta \cdot y = \Delta_y \quad 及 \quad \Delta \cdot z = \Delta_z \ (*)$$

Δ_x是以列矩陣 **b** 取代係數矩陣的第一列而得出的行列式； Δ_y是以列矩陣 **b** 取代係數矩陣的第二列而得出的行列式；Δ_z是以列矩陣 **b** 取代係數矩陣的第三列而得出的行列式。Δ的值為零時，以上的結果仍然成立。由 (*) 更可以推論出以下的一些結論：

情況	條件	結論
1	$\Delta \neq 0$	方程組有唯一解。
2	$\Delta = 0$及其中最少一個Δ_x，Δ_y 或 $\Delta_z \neq 0$	方程組沒有解。
3	$\Delta = 0$及$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$	方程組沒有解或有無限多個解。

在情況 1 中，方程組有唯一解及 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}, z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$。

在情況 2 中，由於已知條件與(*)互相予盾，故方程組沒有解。

在情況 3 中，可利用以下例子解釋方程組沒有解或有無限多個解。

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \quad \text{(沒有解)} \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \quad \text{(無限多個解)} \\ 3x+3y+3z=9 \end{cases}$$

學生會對於情況 3 中為何沒有唯一解產生疑問。在情況 3 下，方程組既可沒有解，亦可有解。假設方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有一解 $\mathbf{x}_1$，即 $A\mathbf{x}_1=\mathbf{b}$。當在情況 3 中，$\Delta = 0$，教師可應用《課程及評估指引》第 64 頁中注釋內的定理指出齊次線性方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 必有最少一個非零解。假設此非零解為 $\mathbf{x}_2$，則 $A\mathbf{x}_2 = 0$。由於 $A(\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + \lambda A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} + \lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{b}$，其中 λ 為任意實數，所以有 $\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2$ 為方程組的一組非零解。故此，若方程組有解，則它必有無限多個解。

學生須理解「一個齊次三元線性方程組有非平凡解當且僅當它的係數矩陣為奇異矩陣」的定理的證明。教師可用一個二元齊次線性方程組與學生探討該定理，藉此亦可一併引入「當且僅當」的意義。學生亦須理解一個齊次線性方程組必相容，且須知道如何找出其非平凡解。

除了使用克萊瑪法則外，學生須懂得利用高斯消去法解線性方程組。藉著建立增廣矩陣，運用基本行運算求線性方程組的解。

矩陣是解線性方程組的另一個重要的工具。當線性方程組以矩陣形式表示，若係數矩陣的逆矩陣存在，可運用逆矩陣方法解線性方程組。學生須知道在逆矩陣不存在時，這方法失效。教師可藉著解線性方程組，展示矩陣、行列式及基本行運算之間的聯繫。

學習單位	學習重點	時間
代數領域		
向量		
15. 向量的簡介	15.1 理解向量及純量的概念 15.2 理解向量的運算及其性質 15.3 理解向量在直角坐標系統的表示法	5

課程闡釋：

第三學習階段學習單位「續立體圖形」的其中一個目的，是為培養學生的空間感。在學習單位「直線的坐標幾何」中，學生亦曾運用分析的方法研究直線的性質。

在討論向量的性質時，向量只限於 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$，亦應強調模和方向兩個重要的概念。同時，應向學生指出向量的概念與第三學習階段學過的直線的概念是有所不同的。學生須理解 $\mathbf{R}^2$ 上的公式 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\mathbf{R}^3$ 上的公式 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，在 $\mathbf{R}^2$ 上的公式 $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 及 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，及非零向量與 x 軸形成的夾角。本課程不要求在 $\mathbf{R}^3$ 中引入方向餘弦的概念。$\mathbf{R}^3$ 上的直線方程和平面方程超出本單元範圍。

對於向量的運算及其性質，須與學生討論學習重點 15.2 注釋欄內的八個性質。

學習單位	學習重點	時間
代數領域		
向量		
16. 純量積與向量積	16.1 理解向量的純量積（點積）的定義及其性質 16.2 理解在 $\mathbf{R}^3$ 中向量的向量積（叉積）的定義及其性質	5

課程闡釋：

學生須能分辨純量積和向量積，並能討論純量積和向量積的幾何意義及其性質。須注意學習重點 16.2 中，所有關於向量的討論只限於 $\mathbf{R}^3$。

作為起步點，可採用以下其中一個定義引入向量積：

(1) 對於兩個 $\mathbf{R}^3$ 的非零及互不平行的向量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$，

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$，其中 θ 為 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 之間的夾角($0°\le\theta\le 180°$)，$\hat{\mathbf{n}}$是一個與 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均垂直的單位向量，且 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 滿足右手定則。
否則，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$。

(2) 若向量 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$，

則 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$。

教師亦可向學生介紹以行列式表示向量積，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$。

教師須向學生介紹純量三重積及其性質，與及純量三重積的行列式表示式

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$，其中 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ 及

$\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ 。

教師可運用行列式的性質證明純量三重積兩個性質$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 和 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$，和解釋 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 的幾何意義，其中 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 可視為“平行六面體底面積乘以它的對應高度”，換句話說，純量三重積等於一個平行六面體的體積。

學習單位	學習重點	時間
代數領域		
向量		
17. 向量的應用	17.1 理解向量的應用	8

課程闡釋：

在第三學習階段，已經討論過兩線平行或垂直的條件。在這學習單位，學生須運用向量的性質來處理平行和正交的概念。兩個非零向量的向量積等於零表示兩向量平行；如果一個非零向量是另一個非零向量的純量乘積，這兩個向量平行。兩個非零向量的純量積等於零表示向量正交。學生可運用向量的概念探究線段的分割及一個向量至另一向量的投影。此外，學生還可利用純量三重積、純量積及向量積求分別為平行六面體的體積、兩向量之間的夾角和平行四邊形的面積。

教師應注意不須引入立體幾何中的直線方程及平面方程。

學習單位	學習重點	時間
進階學習單位		
18. 探索與研究	通過不同的學習活動，發現及建構知識，進一步提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力	10

課程闡釋：

本學習單位旨在提供更多學習空間，讓學生在學習其他學習單位的內容時，能參與更多有助發現及建構知識、提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力之活動。換句話說，這並非一個獨立和割裂的學習單位，活動可在課堂中引起動機、發展、鞏固或評估等不同環節進行。

鳴謝

我們特別向下列委員會及工作小組的委員致謝，多謝他們對本小冊子所提供的寶貴意見和建議。

課程發展議會數學教育委員會

課程發展議會 — 香港考試及評核局數學教育委員會（高中）

課程發展議會 — 香港考試及評核局高中數學課程（單元二）工作小組

ISBN 978-988-8040-42-1

© 2010 版權爲香港特別行政區教育局所有；歡迎作教育及研究等
非牟利用途，但請列明出處。