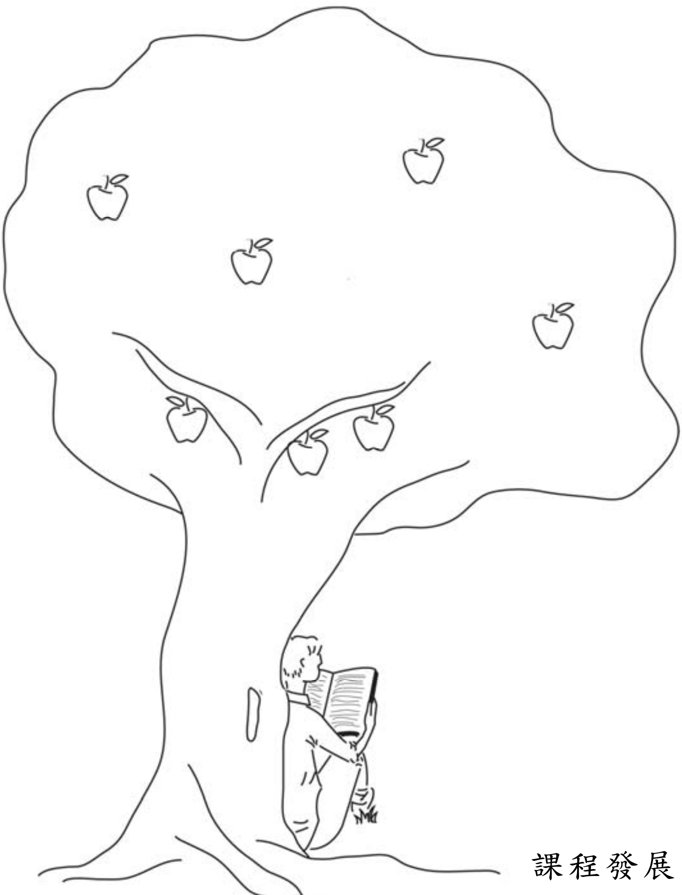
數學百子櫃系列（六）

# 數學的應用

# 投資組合及市場效率

作者楊良河博士



教育局
課程發展處數學教育組

ISBN 978-988-8019-67-0

# 目錄

# 前言

為配合香港數學教育的發展，並向老師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深老師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《數學的應用：投資組合及市場效率》是這個系列的其中一冊，當中輯錄了香港大學楊良河博士於 2006 年 11 月在「新高中數學課程知識增益系列－數學應用」研討會上演說的內容，研討會內容精彩豐富，介紹現今課堂上較少討論到的應用。現將研討會的講章輯錄成書，供老師參考。本書內容由作者提供，並不反映教育局的立場。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
(傳真：3426 9265　電郵：ccdoma@edb.gov.hk )

教育局課程發展處
數學教育組

# 作者簡介

楊良河，一九八九年香港大學數學系畢業，隨即於原校進修統計學，於一九九三年獲哲學博士學位。現任香港大學統計及精算學系副教授。香港統計學會副會長。多年來参與有關統計分析、風險管理及數據挖掘的教學和研究。除了在學報上發表研究論文外，亦曾參與多個財務及風險管理的諮詢項目，包括為銀行界作投資者的風險取向分析，研發投資組合優化系统等。近年為鼓勵大學僱員養成良好的儲蓄習慣及培養審慎理財，参與推動儲運活動，現為大學儲蓄互助社創會會員及董事。

# I. 前言

數學與統計的工具在金融及財務方面的應用很廣泛，例如投資組合的選擇及計算衍生工具的定價時，當中涉及回報、風險和標準差的計算。表一列出一些常用的投資學的課題及其中對應的數學及統計方法。用粗體標註的工具是中學課程會涵蓋的，如百分數、等比級數、矩陣、概率和正態分佈等計算及概念。這兒值得一提的是不少經濟學家的研究成果，因對金融學的貢獻超卓，而成為諾貝爾經濟學獎的得主。他們研發的課題或工具以斜體顯示在下列表中。

**表一： 應用在投資學上的數學與統計方法**

| 投資學的課題 | 數學及統計方法 |
|---|---|
| *投資組合的選擇* | **百分數**；**等比級數**；**預期值**；**方差**；協方差；偏度；峰度；**概率**；**正態**及非正態分佈；正態分佈檢驗；**矩陣代數**；**最優化方法** |
| *資產定價模型* | 回歸分析；因子分析 |
| 市場效率性 | 隨機走動；連檢定法；自相關係數；時間序列模型 |
| 技術分析 | 控制圖；*共整合* |
| 市場波幅 | ARCH，GARCH 模型 |
| *期權定價* | 布朗運動；隨機積分 |

## A. 數學與統計的工具在金融經濟學上之貢獻

很多著名的學者因對金融及財務統計方法作出貢獻而獲得諾貝爾經濟學獎。1990 年諾貝爾經濟學獎得主米勒（Merton Miller）、馬克維茲（Harry Markowitz）和夏普（William Sharpe）在設計投資組合方面作出了重大的突破。在 1997 年，斯科爾斯（Myron Scholes）和默頓（Robert Merton）獲得諾貝爾經濟學獎，以表揚他們在金融領域應用數學工具，解决了衍生產品的定價問題。前者對布萊克－斯科爾斯公式（Black-Scholes）所依賴的假設條件做了進一步減弱，在許多方面對其做了推廣。後者给出了著名的布萊克－斯科爾斯期權定價公式，該法則已成為金融機構涉及金融新產品的思想方法。2003 年諾貝爾經濟學獎得主是恩格爾（Robert Engle）與格蘭傑（Sir Clive Granger）。他們的得獎原因是兩人均設計出新的統計方法，處理經濟時間數列兩個關鍵屬性－「時間變異波動性」與「非穩定性」。恩格爾提出了 ARCH（autoregressive conditional heteroskedasticity）模型，而格蘭傑發明了「共整合」方法。

# II.投資組合

言歸正傳，甚麼是投資? 很多香港人都會投資股票及基金，將儲蓄放在銀行戶口作定期存款也算是投資的一種。「現在投入，將來收回」，我們都期望能在未來換取較原本所投入更多的回報。由於投資涉及未來，因此在預測將來的利潤時會產生不確定性，或稱作風險性，例如天文台也不能準確無誤地預測未來的天氣，當中一定會存在一些不確定性。而預測距離現在愈遠的事，涉及的不確定性就會愈大。市場上有很多不同種類的金融投資產品，主要的產品包括債券、股票、

基金、外幣及由它們所衍生的各種投資產品如期貨、期權、認股證等。

## A. 投資資產的簡單回報率

在認識怎樣投資前，我們先要學懂如何計算回報。資產回報能從下列算式求出來：

設

- $P_t$ 為在時間 $t$ 時資產的價格
- $D_t$ 為資產在時段（$t-1, t$）內所派發的利息
- $R_t$ 為資產在時段（$t-1, t$）的回報率：

則 $$R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

資產回報率反映了資產在一段時間後的增長或減少，我們能計算每日、每月、每季或每年的回報率。

### 例一 回報率的計算

**表二**

| 月份 | 價格 | 股息 | 回報率 |
|---|---|---|---|
| 2005 年 09 月 | \$10.7 | - | - |
| 2005 年 10 月 | \$11.0 | - | 0.028 |
| 2005 年 11 月 | \$11.1 | \$0.50 | 0.054 5 |
| 2005 年 12 月 | \$10.7 | - | –0.036 |

(i) 若一個投資者在二零零五年九月購買一隻股票，那麼到了十月，這股票的回報率便是

$$\frac{11.0-10.7}{10.7}=0.0280\text{或 }2.80\%\text{。}$$

(ii) 約在十一月有$0.5 利息派發，那月的回報率就是

$$\frac{11.1+0.5-11.0}{11.0}=0.0545\text{或 }5.45\%\text{。}$$

(iii) 最後，十二月沒有派發利息，那月的回報率就是

$$\frac{10.7-11.1}{11.1}=-0.0360\text{或 }-3.60\%\text{。}$$

## B. 如何計算投資產品的平均回報率？

由於每個月份的回報率都不相同，我們通常會利用算術平均數(A.M.) 或幾何平均數(G.M.)去計算平均回報率。以下是兩個方法的計算數式：

- 算術平均數：

$$1+\mathrm{A.M.}=\frac{[(1+R_1)+(1+R_2)+\cdots+(1+R_T)]}{T}\quad\text{或}$$

$$\mathrm{A.M.}=\frac{(R_1+R_2+\cdots+R_T)}{T}$$

- 幾何平均數：

$$1+\mathrm{G.M.}=[(1+R_1)(1+R_2)\ldots(1+R_T)]^{1/T}\quad\text{或}$$

$$\mathrm{G.M.}=[(1+R_1)(1+R_2)\ldots(1+R_T)]^{1/T}-1$$

大家都知道算術平均數一定大過或等於幾何平均數（即 A.M.≥G.M.），但在計算回報時，我們應選擇哪一種算法呢？

## 例二 平均回報率的計算

**表三**

| 月份 | 回報率 |
|---|---|
| 9 月 | 0.2000 |
| 10 月 | –0.0833 |
| 11 月 | –0.0909 |

根據以上表三內九月至十一月的回報率，我們可以用算術平均數得出這三個月的平均回報率是

$$\frac{[0.2+(-0.0833)+(-0.0909)]}{3}\times 100\% = 0.86\%，$$

而用幾何平均數計算出的平均回報率則是

$$\{[(1+0.2)(1-0.0833)(1-0.0909)]^{1/3}-1\}\times 100\% = 0.0\%。$$

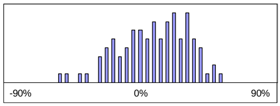
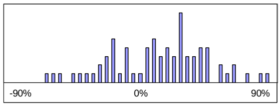
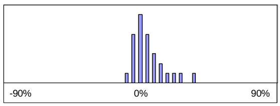
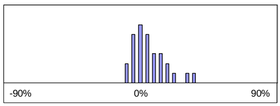
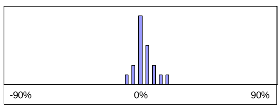
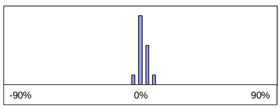
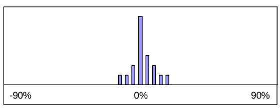
那麼，哪一個平均回報率較有代表性呢？我們試用實際的數字來作解釋。譬如說你現在有$100，九月你有 20%的回報率，因此在十月你的資產應為 $\$100\times(1+0.20)=\$120$。因為十月你蝕了 8.33%，所以十一月你的資金變為 $\$120\times(1-0.0833)=\$110$。之後的一個月，你又蝕了 9.09%，最後你的資產變回$100，沒有賺亦沒有蝕。

雖然算術平均數在統計學上的應用比較廣泛，但從這例子我們得出的結論是用幾何平均數計算出的平均回報率更能反映實質的情況。但有一些時候，我們仍會採用 A.M.作其他的運算分析，例如在估計未來的回報率，詳見 D 部分。

現在讓我們來看看一些歷史數據，表四列出了美國不同的投資產品在 1926 年至 1999 年間的平均年回報率及標準差。大

家應該留意到由 A.M. 和 G.M. 計算出來的平均年回報率是不一樣的， 而且不同種類的產品也有不同的回報，例如美國大公司的股票比通脹的回報率高很多。表內第四行數字是標準差，這是用來量度風險的高低。教師若教這課題時，可以嘗試給予學生一些投資產品的數據，讓他們自己動手計算回報率及標準差，再把這些年回報率畫在棒形圖上，以看看它們的分佈。

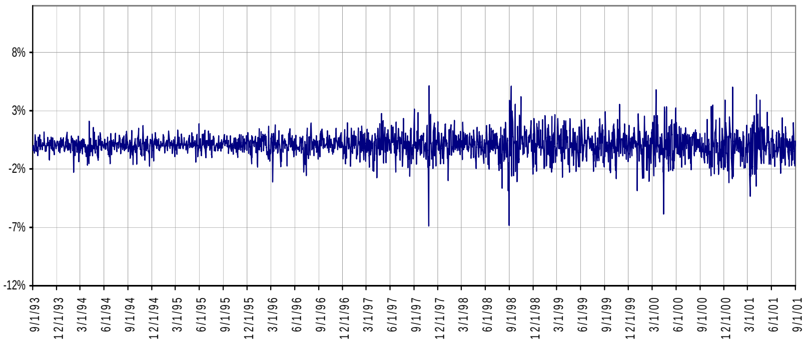
**<u>表四： 美國資產的平均年回報率及標準差 (1926-1999)</u>**

| 投資產品 | 幾何平均數 (G.M.) | 算術平均數 (A.M.) | 標準差 | 分析 |
|---|---|---|---|---|
| 大型公司的股票 | 11.3% | 13.3% | 20.1% |  |
| 小型公司的股票 | 12.6% | 17.6% | 3.6% |  |
| 長期公司債券 | 5.6% | 5.9% | 8.7% |  |
| 長期政府債券 | 5.1% | 5.5% | 9.3% |  |
| 中期政府債券 | 5.2% | 5.4% | 5.8% |  |
| 短期政府票據 | 3.8% | 3.8% | 3.2% |  |
| 通脹 | 3.1% | 3.2% | 4.5% |  |

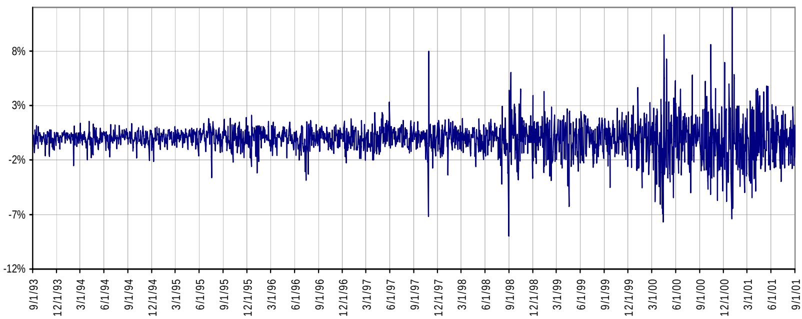
先假設我們同樣以$1 投資在一些金融產品上，然後按著它們每年的回報率計算出各產品的每年的增長率，這樣我們便可畫出每種產品的增長線。這類回報走勢圖可讓投資者觀察資產價格的變化，從而比較哪種產品的增長較快，而期間回報波動的大小亦可由此圖反映出來。此外，回報率也可依時間序列表示出來，圖一中的三幅圖，由上至下，分別為標準普爾 500 指數、納斯達克指數和十年債券。依觀察所見，納斯達克指數的波幅最大，十年債券的波幅則最小，意味著投資債券的風險較少。

**圖一： 指數和債券的平均年回報的時間序列圖**

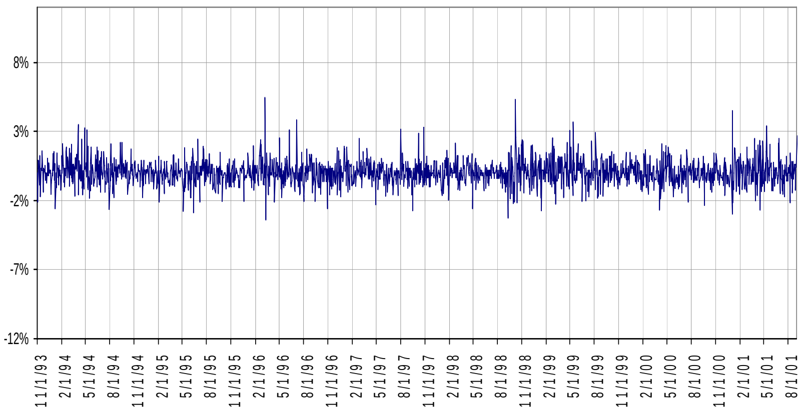
標準普爾 500 指數




納斯達克指數



十年債券




## C. 何謂投資風險？如何計算投資產品的預期回報及風險？

根據英文字典，風險的意思為「負面、暴露於危險中」，可是，「風險」的中文解釋較能反映風險的真正定義，「風險」就是危機。「危」是指危險，「機」是指機會。危險會令你招致損失，但你亦會有機會獲得報酬。在投資學上，風險其實是存在不確定性的；任何投資，只要它的回報面臨不確定，就是有風險。在統計學方面，標準差是常用的風險量度指標，其關係如下：

- 資產在一時段中的回報率，$R$
- 預期回報率，$\mu = E(R)$
- 方差，$\sigma^2 = \mathrm{Var}(R) = E(R-\mu)^2$
- 標準差，$\sigma = [\mathrm{Var}(R)]^{1/2}$

我們除了用標準差來量度風險的高低外，還可以用分佈域和

四分位數間距作其粗略的估計。

## 例三 資產的預期回報率及風險的計算

**表五**

| 市場狀況 | 概率 | 產品 A 的回報率 | 產品 B 的回報率 |
|---|---|---|---|
| 好 | 0.3 | 11% | 16% |
| 普通 | 0.5 | 9% | 12% |
| 差 | 0.2 | 8% | –8% |

假設市場只會出現三種可能性(好、普通和差)，而這三種狀況出現的概率是不一樣的。產品 A 和產品 B 的回報率會隨著不同的市場情況而變動，因此我們很難單憑肉眼去分析哪種產品較好。從表五中，我們得知有八成機會 B 的回報都會比 A 好，這是否代表我們投資時應選 B 而不選 A 呢?

讓我們來計算兩種產品的預期回報：

1. $E(R_{\text{A}}) = 0.3(11\%) + 0.5(9\%) + 0.2(8\%) = 9.4\%$

2. $E(R_{\text{B}}) = 0.3(16\%) + 0.5(12\%) + 0.2(–8\%) = 9.2\%$

讓我們來計算兩種產品的風險：

1. $\sigma_{\text{A}}^2 = [0.3 \times (11\% – 9.4\%)^2 + 0.5 \times (9\% – 9.4\%)^2 + 0.2 \times (8\% – 9.4\%)^2] = 0.000\,124$

   A 的風險值： $\sigma_{\text{A}} = (0.000124)^{1/2} = 1.11\%$

2. $\sigma_{\text{B}}^2 = [0.3 \times (16\% – 9.2\%)^2 + 0.5 \times (12\% – 9.2\%)^2 + 0.2 \times (–8\% – 9.2\%)^2] = 0.007\,696$

   B 的風險值： $\sigma_{\text{B}} = (0.007696)^{1/2} = 8.77\%$

我們發現產品 A 的預期回報較 B 為高，而 A 的風險比 B 低，因此我們應選擇投資產品 A。

若現在產品 B 的回報在市場差的情況下為 8%，那麼 B 的預期回報便會比 A 高，但風險仍是 A 較低，那麼我應選擇投資 A 或 B 呢? 這裡其實我們不需要作任何計算也能作出決定，因為在任何情況下，B 的回報都較 A 為佳，所以我們會投資產品 B。由此可見，計算也會令人產生盲點。

## D. 如何利用投資產品的歷史數據來估計預期回報率及風險？

假設 $R_1, R_2, \ldots, R_T$ 代表過去某資產每月／每周／每日的歷史回報率，我們可以用樣本平均值來估計預期回報率：

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_T}{T}$$

我們亦可以用樣本標準差來估計風險：

$$s = \sqrt{\frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + \cdots + (R_T - \overline{R})^2}{T-1}}$$

這裏好像在計算平均數上出現了一些矛盾，樣本平均值是靠 A.M. 計算出來的，但先前的例子證明了 G.M. 比 A.M. 更能反映出現實情況，為何我們仍會用 A.M. 去估計預期回報呢? 原因主要有兩個，一是樣本平均值是一個無偏估計量；二是作估計時，我們希望預測未來的情況，而不是預測過去的事。用樣本平均值來估計預期回報時，我們假設每個回報都是獨立地隨機抽出來。由於它們出現的機會率是均等的，因此我們會取它們的平均值去估計將來的回報。例四提供了簡單的數據，學生可用計算機或電腦試算表如微軟 Excel 求出回報及風險。

## 例四 兩項投資的比較

**表六**

| 回報率 | 1 月 | 2 月 | 3 月 | 4 月 | 5 月 | 6 月 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 投資 A | 3% | –1% | 4% | 1% | 2% | –3% |
| 投資 B | 2% | –2% | 1% | 3% | 2% | 1% |

由表六得出如表七的預期回報率及風險：

**表七**

| | 回報率 | 風險 |
|---|---|---|
| 投資 A | 1.00% | 2.61% |
| 投資 B | 1.17% | 1.72% |

很多時候，我們會把回報及風險按年度計，如銀行的利率都會以年度來表示 (例如，年息三厘二五)。以下是它們的計算方法：

年度化的回報：

假設平均每月回報率是 $R$。

年度化的回報率是 $(1 + R)^{12} - 1$ 。

若 $R$ 的數值很小，$(1 + R)^{12} - 1 \approx 12R$。

年度化的風險：

假設用月份數據計算出的標準差是 $s$。

年度化的風險是 $\sqrt{12}s$ 。

以恒生指數為例(見圖二)，由 1986 年 12 月至 2006 年 12 月，

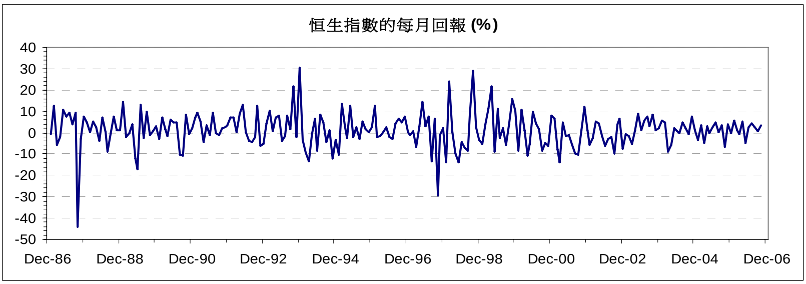
它的平均每月回報率是 1.1627%，每月的標準差是 8.0584%。因此它的

$$年回報率為 12\times1.1627\%=13.95\%，$$

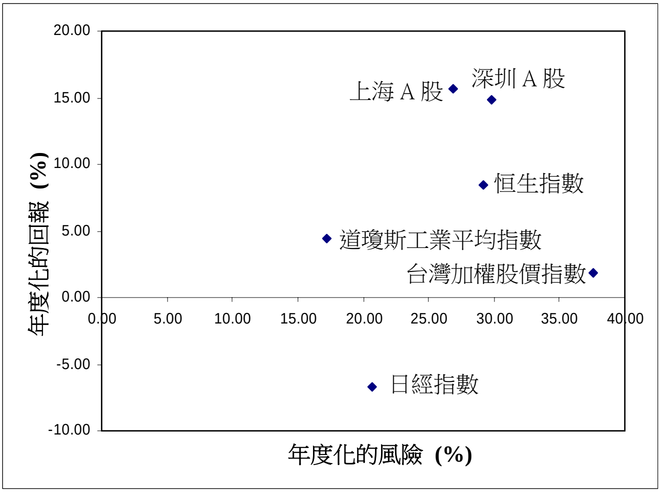
$$風險為 \sqrt{12}\times8.06\%=27.9\%。$$

然而單看這些數字，我們很難確定香港的股票市場屬於哪一類別，因此我們嘗試將香港的市場與其他地區的市場作比較。從圖三大家可觀察到相對於一些已發展地區的市場如美國紐約道瓊斯工業指數及日本東京的日經平均指數，香港市場屬於高風險的股市之一。已發展國家的市場風險通常會較發展中的國家低，而香港仍屬於發展中的市場。此外，這回報風險圖也顯示了高風險並不一定會有高回報，如台灣加權股價指數。再者，香港的股票市場亦十分獨特，競爭對手不多，依圖中所見，香港市場附近沒有其他點。

**圖二： 恒生指數的走勢圖和每月回報的時間序列圖**

**圖三： 國際股票市場指數的回報及風險（1999-2001）**




## E. 何謂投資組合？如何計算投資組合的回報率及風險？

相信大家都清楚怎樣去計算產品的回報及風險，接下來現在讓我們來看看甚麼是投資組合。簡單來說，投資組合是投資者將資金分別投資到各資產上。例如（0.3, 0.7）代表在一投資組合中，三成（30%）資金投資在第一隻資產而七成（70%）資金投資在第二隻資產。投資組合的回報率就會根據資金投放的比例去計算：

投資組合， $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ，的回報率，$R_p$：

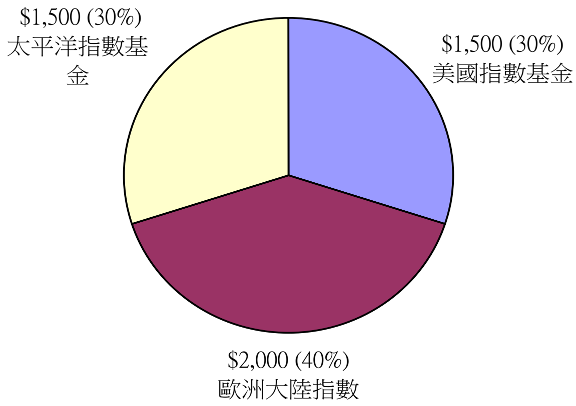
$$R_p = x_1R_1 + x_2R_2 + \ldots + x_kR_k \quad ; \quad x_1 + x_2 \ldots + x_k = 1$$

其中 $R_i$ 為第 $i$ 隻資產的回報率。

投資組合的資金分佈比例可以用圓形圖代表，圖四顯示了一個五千元的環球投資組合，它包含了三種指數基金，四成資

金會投放到歐洲大陸指數基金，三成在太平洋指數基金，剩下的三成資金投放到美國指數基金。

**圖四： 五千元環球投資組合**




假設某投資組合有兩種資產，而這組合的資金分佈比例是( $x_1$, $x_2$ ），我們可依上述的算式求出它的回報率；

- 投資組合的回報率，$R_p$：

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 \text{；} \qquad x_1 + x_2 = 1$$

而它的預期回報率及風險也不難求得。

- 投資組合的預期回報率，$\mu_p$：

$$\begin{aligned} \mu_p = E(R_p) &= x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) \\ &= x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 \end{aligned}$$

- 投資組合的風險，$\sigma_p$：

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = \mathrm{Var}(R_p) &= x_1^2 \mathrm{Var}(R_1) + x_2^2 \mathrm{Var}(R_2) + 2 x_1 x_2 \mathrm{Cov}(R_1, R_2) \\ &= x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

其中 $\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \rho_{12}\,\sigma_1\,\sigma_2$ 和 $\rho_{12} = \mathrm{Corr}(R_1, R_2)$

大家要注意在計算投資組合的風險時，由於兩種產品的回報不是獨立的，我們需要考慮它們之間的關係，其關係的強弱可用協方差來量度。以下是方差和協方差的定義及兩者的一些特性：

方差，$\mathrm{Var}(X) = E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

協方差，$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

- 特性一：$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
- 特性二：$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\mathrm{E}(Y)$
- 特性三：$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y)$

證明：$\mathrm{Var}(aX + bY)$

$$= E[(aX + bY - (a\,\mu_x + b\,\mu_y))^2]$$

$$= E[(a(X - \mu_x) + b(Y - \mu_y))^2]$$

$$= E[(a^2(X - \mu_x)^2 + b^2(Y - \mu_y)^2 + 2ab(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

$$= a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y)$$

除了協方差，兩項產品的相關程度也可用相關係數來表示。下面是相關係數的定義及其特性：

- 相關係數：$\mathrm{Corr}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$
- 特性一　：$-1 \le \mathrm{Corr}\ (X, Y) \le 1$
- 特性二　：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ 當且僅當 $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$

- 特性三　：當 $X$ 及 $Y$ 是獨立時，則 $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$；但相反不一定是對的。

以下是一個反例：

若 $X \sim N(0, 1)$，而 $Y = X^2$，那麼 $X$ 和 $Y$ 當然不是獨立的。但 $E(X) = 0$；$E(Y) =1$；$E(XY) = E(X^3) = 0$，

因此，

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0，即 \mathrm{Corr}(X, Y) = 0。$$

由此可見，

$\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$ 不代表 $X$ 和 $Y$ 是獨立的。

在以下的例子，我們嘗試利用協方差和相關係數去計算投資組合的回報及風險。例五表八列出了兩種股票的資料，當我們運用不同的計算方法，都可求得這投資組合 (股票 1 佔 30%；股票 2 佔 70%) 的回報及風險。

例五　投資組合的回報及風險的計算

**表八**

| 經濟環境 | 機會率 | 股票 1 的回報率 | 股票 2 的回報率 | 投資組合的回報率（0.3, 0.7） |
|---|---|---|---|---|
| 興旺 | 0.4 | 3% | 5% | 4.4% |
| 正常 | 0.3 | 4% | 4% | 4.0% |
| 衰弱 | 0.3 | 6% | 3% | 3.9% |
| 預期回報率，$E(R)$ | | 4.2% | 4.1% | 4.13% |
| $E(R^2)$ | | 0.00192 | 0.00175 | 0.0017107 |
| 風險 | | 1.249% | 0.831% | 0.224% |

方法一

我們先求投資組合在不同的經濟環境下的回報率：

市場氣氛興旺時：0.3(3%) + 0.7(5%) = 4.4%

市場氣氛正常時：0.3(4%) + 0.7(4%) = 4.0%

市場氣氛衰弱時：0.3(6%) + 0.7(3%) = 3.9%

之後，我們用以上的資料去計算投資組合的預期回報率和風險：

- 預期回報率，$E(R_p)$ = 0.4(4.4%) + 0.3(4.0%) + 0.3(3.9%)

  = **4.13%**

- $E(R_p^2)$ = 0.4(4.4%)$^2$ + 0.3(4.0%)$^2$ + 0.3(3.9%)$^2$

  = 0.001 710 7

- 風險 $\sigma_p$ = (0.001 710 7 – 0.041 3$^2$)$^{0.5}$ = **0.224%**

方法二

我們先求每種股票的預期回報率和風險：

- $E(R_1)$： 0.4(3%) + 0.3(4%) + 0.3(6%) = 4.2%
- $E(R_2)$： 0.4(5%) + 0.3(4%) + 0.3(3%) = 4.1%
- $E(R_1^2)$：0.4(3%)$^2$ + 0.3(4%)$^2$ + 0.3(6%)$^2$ = 0.001 92
- $E(R_2^2)$： 0.4(5%)$^2$ + 0.3(4%)$^2$ + 0.3(3%)$^2$ = 0.001 75
- $\sigma_1$：(0.001 92 – 0.042$^2$)$^{0.5}$ = 1.249%
- $\sigma_2$：(0.001 75 – 0.041$^2$)$^{0.5}$ = 0.831%

之後，我們根據以上的資料去計算投資組合的預期回報率和風險：

- 預期回報率，$E(R_p)$：0.3(4.2%) + 0.7(4.1%) = **4.13%**
- $E(R_1R_2)$：0.4(3%)(5%) + 0.3(4%)(4%) + 0.3(6%)(3%)

  = 0.001 62
- $\text{Cov}(R_1,R_2) = E(R_1R_2) - E(R_1)E(R_2)$

  = 0.00162 – (4.2%)(4.1%) = –0.000 102
- $\text{Corr}(R_1,R_2) = \dfrac{-0.000102}{0.01249 \times 0.00831} = \dfrac{-1.02}{(1.249)(0.831)} = -0.983$
- $\text{Var}(R_p) = (0.3)^2 \times (1.249\%)^2 + (0.7)^2 \times (0.831\%)^2 + 2(0.3)(0.7)(-0.000\ 102)$

  = 0.000 005 04

風險 $\sigma_p$： $(0.000\ 005\ 04)^{0.5}$ = **0.224%**

使用兩種方法得出的答案是一樣的，有一點要留意的是方法一的步驟並沒有牽涉到協方差和相關係數的計算。若果有實質的歷史數據，我們同樣可依照各產品過去的回報率去估計它的預期回報及風險。

例六表九列出了三種股票由一月到十二月的每月回報，最底部的兩行是它們的平均回報率和風險。接下來我們嘗試選三隻股票的其中兩隻做出三個不同的投資組合— 0.5A + 0.5B、0.5A + 0.5C、0.5B + 0.5C，這些組合的平均回報率和風險也可利用以上敍述的方法求得。

## F. 如何分散投資以降低投資風險？

### 例六 分散投資

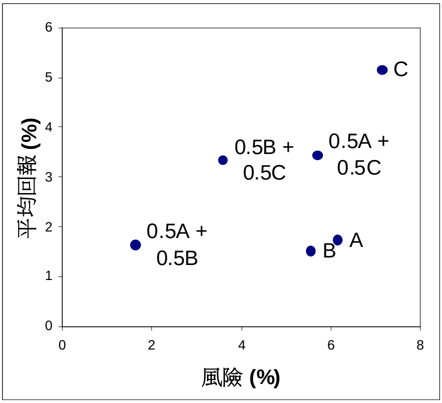
**表九**

| | 每月回報率(%) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 月 | **A** | **B** | **C** | **0.5A + 0.5B** | **0.5A + 0.5C** | **0.5B + 0.5C** |
| 1 | 10.00 | –4.30 | 25.20 | 2.85 | 17.60 | 10.45 |
| 2 | 1.90 | 5.20 | 2.86 | 3.55 | 2.38 | 4.03 |
| 3 | –6.60 | 9.30 | 5.45 | 1.35 | –0.58 | 7.38 |
| 4 | 4.47 | –5.10 | 4.56 | –0.32 | 4.52 | –0.27 |
| 5 | 3.07 | –2.30 | 3.72 | 0.39 | 3.40 | 0.71 |
| 6 | –2.79 | 6.52 | 0.29 | 1.87 | –1.25 | 3.41 |
| 7 | –8.97 | 6.40 | 5.38 | –1.29 | –1.80 | 5.89 |
| 8 | –2.45 | 2.82 | –2.97 | 0.19 | –2.71 | –0.08 |
| 9 | 8.17 | –5.10 | 1.52 | 1.54 | 4.85 | –1.79 |
| 10 | 7.62 | –2.10 | 10.75 | 2.76 | 9.19 | 4.33 |
| 11 | 7.48 | –1.80 | 3.79 | 2.84 | 5.64 | 1.00 |
| 12 | –0.94 | 8.80 | 1.32 | 3.93 | 0.19 | 5.06 |
| 平均回報率 | 1.75% | 1.53% | 5.16% | 1.64% | 3.45% | 3.34% |
| 風險 | 6.15% | 5.54% | 7.14% | 1.63% | 5.69% | 3.58% |

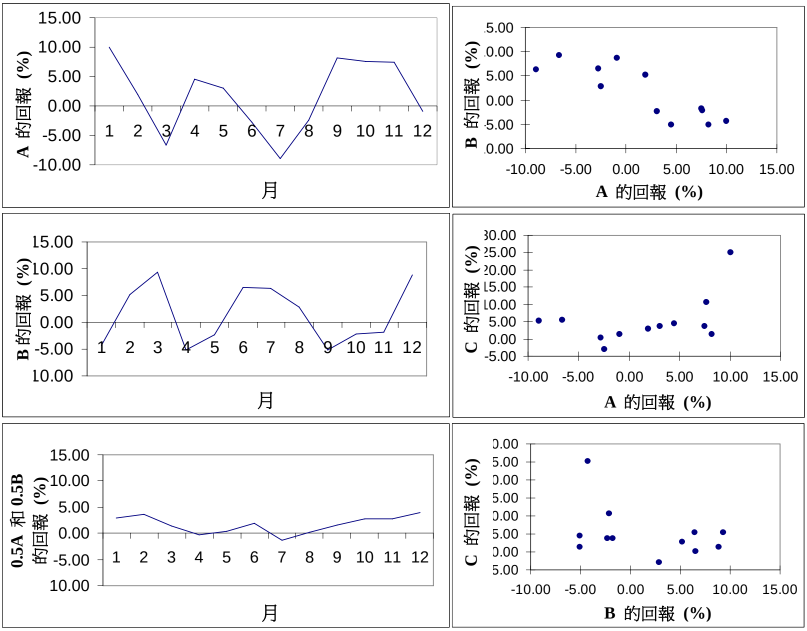
根據每種股票和投資組合的平均回報率和風險，我們可以畫出一個回報風險圖。從圖五，我們發現一個有趣的現象：股票 A 和 B 本身的平均回報率和風險大致相若，但當把它們一半一半地組合起來作投資時，這組合的的平均回報率和原先的變動不大，可是風險就大大降低了。這情形也出現在投資組合 0.5A + 0.5C 和 0.5B + 0.5C 上，但風險減少程度就沒有那麼顯著。為甚麼會有這樣的差別呢？微妙之處就在於它們的相連關係。0.5A + 0.5B 這投資組合的表現特別好，原因是

當 A 賺的時候，B 就蝕；相反當 B 錄得增長時，A 就錄得負增長，這形成了一種抵銷作用。因此將資金投放在這組合，大部分時間都可獲得正回報，但每月回報率的波動卻很少。再看看圖六：股票 A 和 B 的回報率的散點圖，我們能推斷出它們有著負相關性，而其他組合裡的兩種股票之間就沒有這樣明顯的關係。

**圖五： 回報風險圖**



**圖六： 股票 A、股票 B 和組合 A 及 B 的每月回報率圖**
**及股票 A、B 和 C 的回報散點圖**




由此可見，投資者可以透過持有多種不同的股票將隱含在個別股票中的風險分散，而分散投資的效果的好與壞取決於組合裡產品之間的相關性，這兒牽涉到樣本相關係數的計算(註一)。樣本相關係數是衡量兩變數間「線性」關聯程度的指標，且 $r$ 值介乎於−1 與 1 之間。若兩變數獨立，則兩者之相關係數值為 0 (稱「不相關」)，但反之不一定成立。當相關係數 $r_{AB}$ 越變得負，由 A 和 B 組成的投資組合的風險就越低。分散投

---

註一：這裏我們不作詳細講解樣本相關係數的計算方法，請參考 Clake, G.M. and Cooke, D. (1998). *A Basic Course in Statistics* (4th ed.). London: Arnold.

資就更有效。用上述例子為例， $r_{AB} = -0.85$， $r_{AC} = 0.47$，而 $r_{BC} = -0.38$，所以投資組合 0.5A + 0.5B 的效果最好，但相對地，它的回報就會較低。

以下表十列出 1926 年至 1999 年美國資產的樣本相關係數的數據。我們看到債券類別之間的相關係數很高(>0.9)，而債券與小型公司及大型公司的股票的相關係數則很小，有些更錄得負數。因此很多人分散投資時，往往會同時購買債券和股票，以減低投資風險。但在現實的金融市場中有林林總總不同種類的投資產品，我們應如何分配手上的資金呢？答案就是用效率前緣/最佳投資曲線來幫助我們選擇最合適的投資組合。

**表十 ：美國資產的相關係數 (1926-1999)**

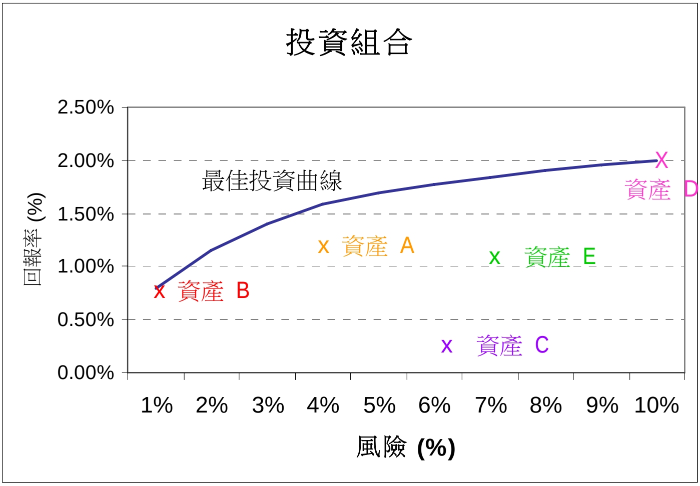
| 美國資產類 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.大型公司 | 1 | | | | | | |
| 2.小型公司 | 0.79 | 1 | | | | | |
| 3.長期企業債券 | 0.25 | 0.10 | 1 | | | | |
| 4.長期政府債券 | 0.19 | 0.02 | 0.94 | 1 | | | |
| 5.中期政府債券 | 0.11 | –0.04 | 0.91 | 0.91 | 1 | | |
| 6.短期政府債券 | –0.02 | –0.09 | 0.21 | 0.24 | 0.49 | 1 | |
| 7.通脹率 | –0.03 | 0.05 | –0.15 | –0.15 | 0.01 | 0.41 | 1 |

## G. 效率前緣/最佳投資曲線

效率前緣是由 1990 年諾貝爾經濟學獎得主馬克維茲（Harry Markowitz）在他的現代投資理論中提出的，它代表一系列投資組合，相對其他投資組合，在同樣的風險下，投資在效率前緣上的組合會得到最高的預期回報率。要畫出這條曲線，我們第一步先要計算出所有資產(如基金、債券、股票等) 的預期回報率、風險及其相關係數，然後以二次規劃法求出具

效率的投資組合，計算出最佳的投資比重分配方式。以下圖七展示了一條效率前緣，投資者能利用這條曲線，按照自己本身的風險承受程度，找出最佳的資產投資組合，使投資報酬最高而風險最小。

**圖七： 效率前緣／最佳投資曲線**




若考慮的投資組合中包含多於兩種資產，那求取效率前緣就會變得相當複雜。在這種情況下，我們可以利用一些統計軟件[1]，依據各資產的歷史數據，來設計最有效率的投資組合，這類軟件平台在大學的教授課程中也會用到。接下來，我們以一為期五年的公積金為例，看看這軟件怎樣使用。

[1]可從以下網址: www.riskscientist.com,
http://finance.wharton.upenn.edu/~stambaug/portopt.html 或
http://www.spreadsheetmodeling.com/ 下載這些軟件

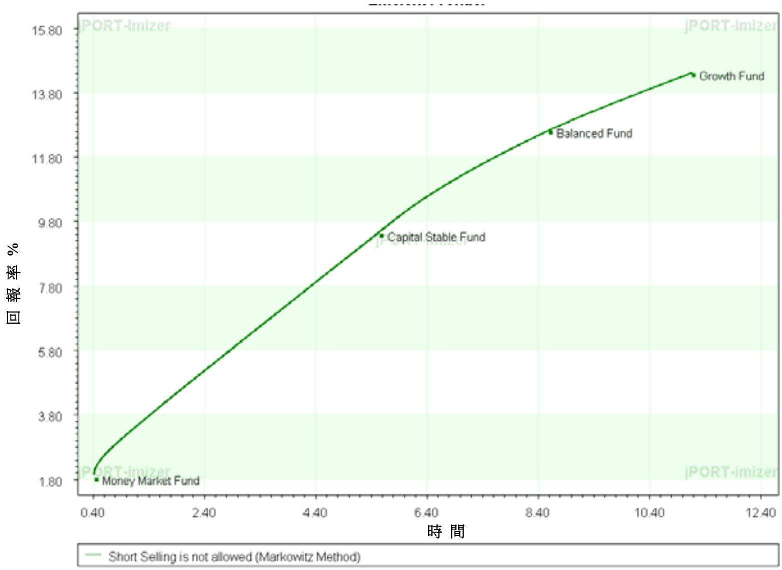
## 示範一　用統計軟件設計效率前緣／最佳投資曲線 — 公積金投資組合

### 表十一：　各基金的年度化回報、風險和相互間的相關係數

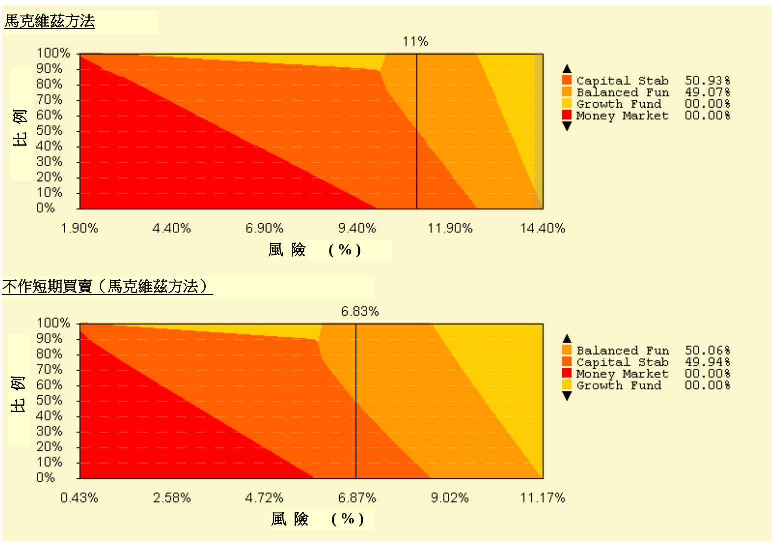
| 基金 | 年度化回報率 | 年度化風險 | 相關係數 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Money market | 1.84% | 0.43% | 1 | | | |
| 2. Capital stable | 9.41% | 5.56% | –0.10 | 1 | | |
| 3. Balance | 12.63% | 8.60% | –0.02 | 0.86 | 1 | |
| 4. Growth | 14.40% | 11.17% | 0.02 | 0.74 | 0.98 | 1 |

### 圖八　：各基金的表現圖

圖九： 效率前緣／最佳投資曲線




圖十： 資產配置圖



# III. 市場效率

假若股價能充分反映市場狀況，那麼利用以往的股價，根本沒法估計將來的價格，這就是有效**市場假設**。換言之，若有效市場假設是對的，這樣沒有其他資料能提供投資策略去賺取比合理回報更高的回報。但是有些人認為這理論與實際情況不符，他們認為市場的升跌應該有跡可尋，例如「秋官效應」— 每次香港演員秋官飾演的劇集一推出，他們認為股市就會大幅下滑。若市場對信息的解讀和吸收都是瞬時的，那它本身應能立刻作出調整。

**表十四： 關於秋官劇集的股市效應**

| 播映日期 | 劇集 (角色) | 股市表現 |
|---|---|---|
| 05/10/92 至 27/11/92 | 大時代 (丁蟹) | 劇集播出的尾段，恒指四天內跌 598 點 |
| 21/11/94 至 13/01/95 | 笑看風雲 (黃天) | 從首播至大結局，恒指共跌 2175 點，下挫 23%，九四年底剛爆發墨西哥金融危機 |
| 05/02/96 至 03/05/96 | 天地男兒 (徐永邦) | 從首播至大結局，恒指跌 36.4%，共跌 735 點 |
| 02/04/97 至 29/05/97 | 大時代 [重播] | 股市升浪，重播的整段期間恒指升 2342 點 (從 12136 點升至 14416 點，共 18.8%) |
| 22/09/97 至 12/12/97 | 江湖奇俠傳 (雍正) | 亞洲金融風暴牽連港股急挫，首播不足兩個月，恒指跌 5324 點 |

## A. 隨機走動模型

過去很多學者都嘗試證明市場是有效率的，股價的變動是隨機性的，無可依循。法國數學家巴奇萊爾（Bachelier）在 1900 年猜測股票的價格服從隨機走動。隨機走動模型描述到 $t$+1 期的股價的自然對數，是 $t$ 期價格的自然對數，加上合理回報（$\mu$），再加上當中的股價變動的隨機噪音（$e_{t+1}$），而 $e_{t+1}$ 的平均值為 0：

即，$\ln(P_{t+1}) = \mu + \ln(P_t) + e_{t+1}$。

之後，肯德爾（Kendall）在1953年分析了二十多種股票，出乎意料之外，他發現那些股票價格並沒有任何節奏性、週期性或趨勢性，進而他得到的結論是股價服從隨機走動。

活動一　神奇的硬幣

玩法：

1. 找 5 個人**模擬**自己連續地投一硬幣 50 次，將投硬幣的結果（正($H$)面或反面($T$)）寫在一張紙條上，並寫下他／她的姓名。
2. 另外找 5 個人用**硬幣**連續地投 50 次，將投硬幣的結果（正面($H$)或反面($T$)）寫在一張紙條上，並寫下他／她的姓名
3. 收集所有紙條，交給遊戲主持人去猜猜哪 5 人的隨機序列是以擲硬幣得出；而哪 5 人只是模擬擲硬幣得出。
4. 若你知道這遊戲的奧妙，你成功猜中的機會率應達到 80%。

破解方法：

人們普遍都認為在一組隨機序列中，$H$ 或 $T$ 的轉換次數會很多，換言之，重複投得一面的結果不會經常發生。因此模擬自己在擲硬幣的人不會連續寫下太長的 $H$ 或 $T$，同時他們亦不會填下太多的重複組合。根據以上兩點，我們便可判斷出誰人真正擲硬幣；誰人是模擬自己在擲硬幣。

## B. 連檢定法

以往更有學者發現上述用擲硬幣得出的隨機序列中，$H$和$T$的平均轉換次數應該接近二十六次，而標準差為3.5。其實這關連到一個測試回報隨機性的方法 — **連檢定法**。股票市場的價格變動只有兩個可能性，上升和下跌。我們將一股價上升表作「+」；一股價下跌表作「–」。若股價變動成一正關係，這樣股價回報出現正值後，會有再出現正值的傾向；而出現負值後，也傾向於再出現負值，這表示股價回報率並非完全隨機。舉例「+ – + + + – – + + – + – –」，$n_+ = 7$，$n_- = 6$，連續上升趨勢 (即連續「+」號) 和下跌趨勢 (即連續「–」號) 的組合的數目 $T = 8$ [(+)(–)(+ + +)(– –)(+ +)(–)(+)(– –)]。有了這些數據之後，我們便可計算連檢定法的檢定統計量 $T$ 去進行假說檢定：

在原假設 ($H_0$)中，「+」 和「–」 的出現次序是隨機的，而

$$E(T) = \frac{2n_+n_-}{n} + 1 \qquad \text{及} \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{2n_+n_-(2n_+n_- - n)}{n^2(n-1)}$$

證明： $T = 1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$，

其中若第$k$個符號 ≠ 第$k$–1個符號，$I_k = 1$；否則 $I_k = 0$。例如在以上的例子，因第2個符號「–」不等於第1個符號「+」，$I_2 = 1$。

- $E(I_k) = P($第 $k$ 個 $\neq$ 第 $k-1$ 個$) = \dfrac{2n_+ n_-}{n(n-1)}$
- $E(I_k^2) = E(I_k)$
- $\text{Var}(R) = \text{Var}(\sum_{k=2}^{n} I_k) = (n-1)\text{Var}(I_k) + \sum_{2\le j\ne k\le n} \text{Cov}(I_j, I_k)$

$= (n-1)\, E(I_k^2) + \sum_{2\le j\ne k\le n} E(I_j\, I_k) - (n-1)^2\, [E(I_k)]^2$

若 $j = k-1$ or $k+1$,

$$E(I_j I_k) = \frac{n_+ n_- (n_+ - 1) + n_- n_+ (n_- - 1)}{n(n-1)(n-2)}$$

其他情況，

$$E(I_j I_k) = \left[\frac{2n_+ n_-}{n(n-1)}\right]\left[\frac{2(n_+ - 1)(n_- - 1)}{(n-2)(n-3)}\right]$$

若樣本足夠大，我們可以使用正態近似法，即是在 $H_0$ 中，對於大的 $n = n_+ + n_-$，

$$T \sim N\left(\frac{2n_+ n_-}{n} + 1, \frac{2n_+ n_- (2n_+ n_- - n)}{n^2 (n-1)}\right)$$ 。

## <u>例七　運用連檢定法去測試 **2004** 年和 **2005** 年恒生指數的價格變動是否隨機</u>

在2004年的數據中，有52個週期 ($n$ = 52)，有31次升 ($n_+$ = 31) ，21次跌($n_-$ = 21)，總共有24次轉勢 ($T$ = 24)。將上述的數值代進$T$的參數方程，以求得$T$。如果檢定統計量 ($|(T - 26.04) / (11.80)^{0.5}|$) 大於1.96，那麼原假設 ($H_0$) 便不成立。這裡我們得出的結論是2004年恒生指數的股價服從隨機走動。

**圖十一： 二零零四年恒生指數的走勢圖**


而在2005年的數據中，週期有52個 $(n = 52)$，有28次升 $(n_+ = 28)$ ，24次跌$(n_- = 24)$，總共轉勢了26次$(T = 26)$。這裡我們同樣發現2005年恒生指數的價格服從隨機走動。這說明了上述的經濟理論 —「有效市場假設」適用於香港的股票市場，即沒有投資者能靠預測股價的走勢，從而獲得比合理回報更高的回報。

**圖十二： 二零零五年恒生指數的走勢圖**

## C. 如何做一位理性投資者？

若股價的變動服從隨機走動模型，投資者可否獲取利潤呢？答案是可以的。投資者可以獲取合理的報酬，這合理回報也可從模型中的 $\mu$ 反映出來。但投資者可否獲取比合理回報更豐厚的利潤呢？這條問題的答案就不太肯定了，贊成和反對意見皆眾說紛紜。

### 活動二 猜數字 得巨獎

**玩法：**

1. 在一張紙上寫下你的姓名及一個在 0 至 100 以內的數字(整數)。
2. 收集所有紙條。
3. 計算數字的平均數。
4. 誰人寫下的數字最接近這平均數的 $\frac{2}{3}$，就獲得大獎。當多於一人得到相同接近的情況，隨機抽出一人得大獎。

**討論：**

這遊戲嘗試去探討何謂理性與非理性。所有具理性的人都不會填67或以上的數字，因為這需要每人都填100，平均數才會是67。接著下來，如果大家都認為對方不會填67或以上的數字，那麼參加者要勝出便應填45或以下的數字。按此推論下去，玩者應選31、21、15、11、7.4、5、3.4、2.3、1.6、1.1、0.8、... 最後，0便會是最具理性的答案。但試想想寫下「0」的玩者會否能勝出呢? 這遊戲說明了當玩者決定數字的大小時，要顧及到其他參加者的想法，才填下數字，這麼贏的機會率便會提高。

這道理其實也可以應用到投資市場上。簡單來說，理性的投資者都會選擇高回報、低風險的資產組合，但現實的資本市場相當複雜，個別投資者是有限理性的，並且普遍存在投資偏差問題，這種偏差包括投資者對於股票價格波動的認知偏差、投資者對股票價值的估計偏差等，而投資者互相之間都是競爭對手。因此要作出適當的投資策略，我們需要判斷其他投資者的理性與非理性的行為模式。

例如為何有些投資者，無論他們的資產在獲得利潤或虧損下，仍會繼續持有該資產呢？前者的原因是他們認為市場還有上調的空間，而後者則認為市場會出現反彈。上述的投資行為模式在現實市場裡絕不為奇。我們可運用投資心理學去分析個別投資者的理性與非理性程度，從而用不同的行為模型去計算資產的合理定價。

# IV. 結語

透過這講座，相信大家都學會了一些與投資市場有關的簡單計算，但其實有很多問題是值得我們細心思考的。

第一、是否利用歷史數據去計算出平均回報和風險，就能做好投資組合呢？答案是不一定的。由於我們是以歷史數據去計算出平均回報和風險，這些求得的數值只反映了過去某資產的表現，但是投資涉及未來，因此設計出來的組合未必是最有效率的。

第二、是否做足 “功課”就一定贏呢？答案也是不一定的。因為預測始終牽涉一些不確定性，「天有不測之風雲」，我們難以準確無誤地估計資產的未來價格。

第三、是否有分析便是投資，沒有分析純靠運氣才是賭博/投機？這說法不一定正確。一位買賣者是投資還是投機取決於他個人的心態。投機者往往希望以短時間，在金融市場裡賺取豐厚利潤。近年來，香港的股票市場投機氣氛濃厚，病態「股徒」開始出現，而「炒燶股」的個案數字更不斷上升，由2003年的零宗，飆升到2006年的三十宗。因此明愛在2003年10月成立展晴中心，協助那些因「炒燶股」求助的人士。

**表十五**

| 年份 | 個案(宗) |
|---|---|
| 06 (1 月– 9 月) | 30 |
| 05 | 10 |
| 04 | 2 |
| 03 (10 月– 12 月) | 0 |

最後，希望這課程能夠讓各位教師對數學在投資方面的應用有基本的認識。香港證監會常用一句說話忠告投資者 —「先求知，後投資」，這句話對教師和學生們也是一個提醒，我們應按部就班，先加深自己對投資的認識和理解，之後再衡量自己能承受的風險而作出適當的投資，當然最重要的是在任何時候也要保持正確的投資態度，多謝大家。

## 參考網頁及資料：


1. www.riskscientist.com;
2. http://finance.wharton.upenn.edu/~stambaug/portopt.html;
3. http://www.spreadsheetmodeling.com/;
4. David G. Luenberger (1984). *Linear and Nonlinear Programming*, Second Edition. Chapter 14. MA: Addison-Wesley

# 提供詞彙

| | |
|---|---|
| $R_p$ | Portfolio return |
| 十年債券 | 10-year T BOND |
| 二次規劃法 | Quadratic Programming |
| 下跌趨勢 | Downward trends |
| 分散投資 | Portfolio diversification |
| 中期政府債券 | Intermediate-term government bonds |
| 日經平均指數 | Nikkei225 Index |
| 布朗運動 | Brownian motion |
| 正態近似法 | Normal Approximation |
| 共整合 | Co-integration |
| 年度化的回報 | Annualized return |
| 年度化的風險 | Annualized risk |
| 有效市場假設 | Efficient Market Hypothesis |

| | |
|---|---|
| 自相關係數 | Autocorrelation coefficient |
| 投資心理學 | Behavioral finance |
| 投資組合的風險 | Portfolio risk |
| 投資組合的預期回報率 | Portfolio expected return |
| 投資組合的選擇 | Portfolio selection |
| 長期公司債券 | Long-term corporate bonds |
| 長期政府債券 | Long-term government bonds |
| 金融投資產品 | Financial asset |
| 相關係數 | Correlation Coefficient |
| 衍生工具定價 | Derivatives pricing |
| 風險性 | Risky |
| 峰度 | Kurtosis |
| 納斯達克綜合指數 | NASDAQ Composite Index |
| 偏度 | Skewness |
| 現代投資理論 | Modern portfolio theory |

| | |
|---|---|
| 組合的數目 | Number of runs |
| 連檢定法 | Runs test |
| 上升趨勢 | Upward trends |
| 最佳投資曲線 | Efficient frontier |
| 期貨 | Futures |
| 期權 | Option |
| 無偏估計量 | Unbiased estimator |
| 短期政府票據 | U.S. Treasury bills |
| 資產定價模型 | Capital Asset Pricing Model |
| 預期回報率 | Expected return |
| 暴露於危險中 | Exposing to danger or hazard |
| 樣本相關係數 | Sample correlation coefficient |
| 標準普爾 500 指數 | Standard & Poor’s 500 Index |
| 獨立的 | Independent |
| 隨機遊動 | Random walk |

| | |
|---|---|
| 隨機噪音 | Random noise |
| 隨機積分學 | Stochastic calculus |
| 檢定統計量 | Test statistic |

| 數學百子櫃系列 | 作者 |
|---|---|
| （一）漫談數學學與教－新高中數學課程必修部分 | 張家麟、黃毅英、韓藝詩 |
| （二）漫談數學學與教－新高中數學課程延伸部分單元一（即將出版） | 韓藝詩、黃毅英、張家麟 |
| （三）漫談數學學與教－新高中數學課程延伸部分單元二（即將出版） | 黃毅英、張家麟、韓藝詩 |
| （四）談天說地話數學 | 梁子傑 |
| （五）數學的應用：圖像處理－矩陣世紀 | 陳漢夫 |
| （六）數學的應用：投資組合及市場效率 | 楊良河 |
| （七）數學的應用：基因及蛋白的分析（即將出版） | 徐國榮 |