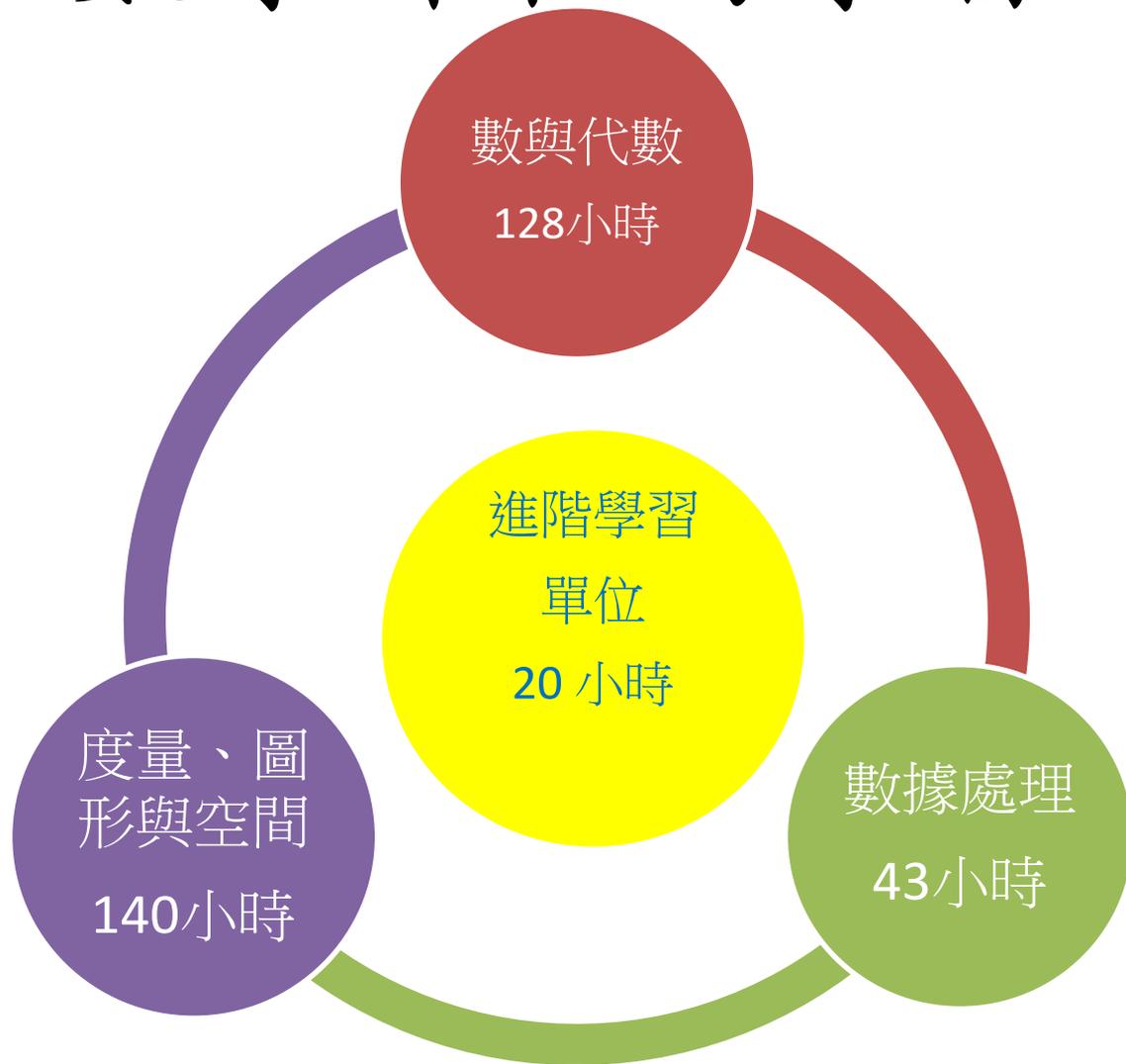


中學數學的探索、研究與解難

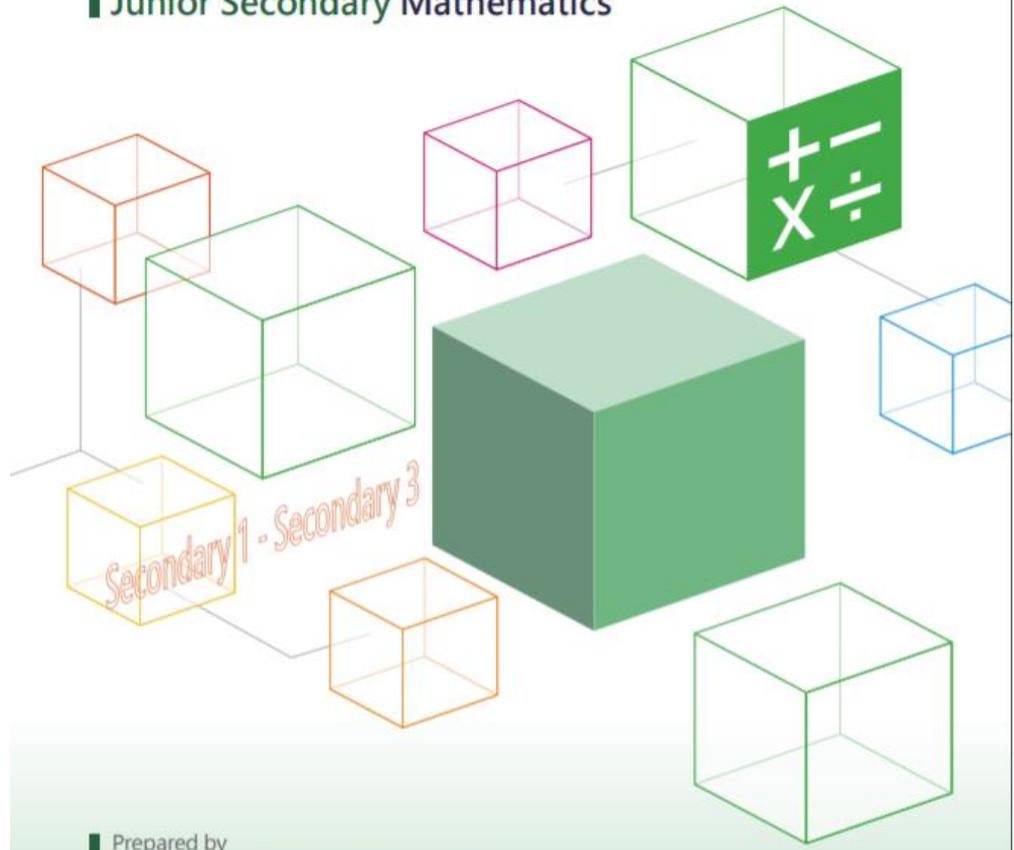
教育局
數學教育組
2019年5月

初中數學課程的學習內容



Supplement to Mathematics Education Key Learning Area Curriculum Guide

Learning Content of Junior Secondary Mathematics



Prepared by
The Curriculum Development Council

Recommended for use in schools by
The Education Bureau
HKSARG
2017

Learning Unit	Learning Objective	Time	Remarks
	<p>10.2 understand the definitions of zero exponent and negative exponents</p> <p>10.3 understand the laws of integral indices</p> <p>10.4 understand scientific notations</p> <p>10.5 <u>understand the binary number system and the denary number system</u></p> <p>10.6 **understand other numeral systems, such as the hexadecimal number system</p>		<p>The above laws of positive integral indices also apply to integral indices.</p> <p>Teachers may consider using real-life examples or related learning elements in Science Education or Technology Education KLAs to enhance learning and teaching.</p> <p>Interconversion between binary numbers and denary numbers is required.</p> <p>Teachers may consider using real-life examples or related learning elements in Science Education or Technology Education KLAs to enhance learning and teaching.</p>

學習單位：探索與研究(I&I)

初中課程

進階學習單位			
32.探索與研究	通過不同的學習活動，發現及建構知識，進一步提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力	20	此 非 一個獨立和割裂的學習單位。教師可使用建議的時間，讓學生參與不同學習單位內的活動，例如：有關增潤課題的活動、跨學習單位的活動和建基於數學課題的跨學習領域活動。

高中課程

必修部分佔 **10** 小時

單元一、單元二 各佔 **7** 小時

國際研究顯示香港學生在閱讀、數學及科學評估保持佳績

數學能力方面，香港由PISA 2012的第三位上升至PISA 2015的第二位。香港學生的數學能力表現優秀，相信是受惠於數學課程強調學生要透過專題習作、探究活動等建構數學知識。數學課程的設計能促進教師為學生提供學習機會，在現實生活中應用數學知識，以及培養他們對數學學習採取正面的態度。

何謂探索與研究？

「問題—過程—解答—延伸」的整體程序

數學探究是數學知識發展的過程

- (1) 在一個具有適當學習輔助工具的環境下學習。
- (2) 學生把初步探究的想法用文字或圖像表達。
- (3) 提出假設。
- (4) 制定探索的大綱。
- (5) 收集資料。
- (6) 分析資料。
- (7) 從分析結果中得出結論。
- (8) 把發現與他人分享。

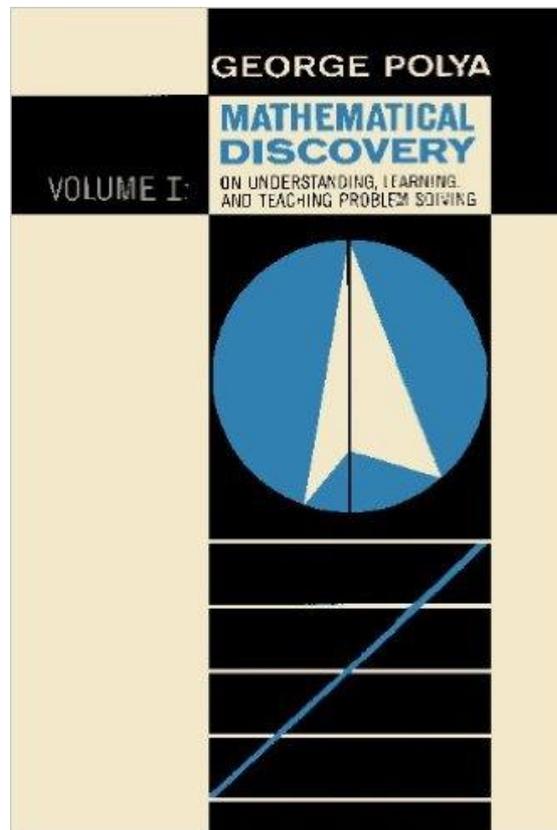
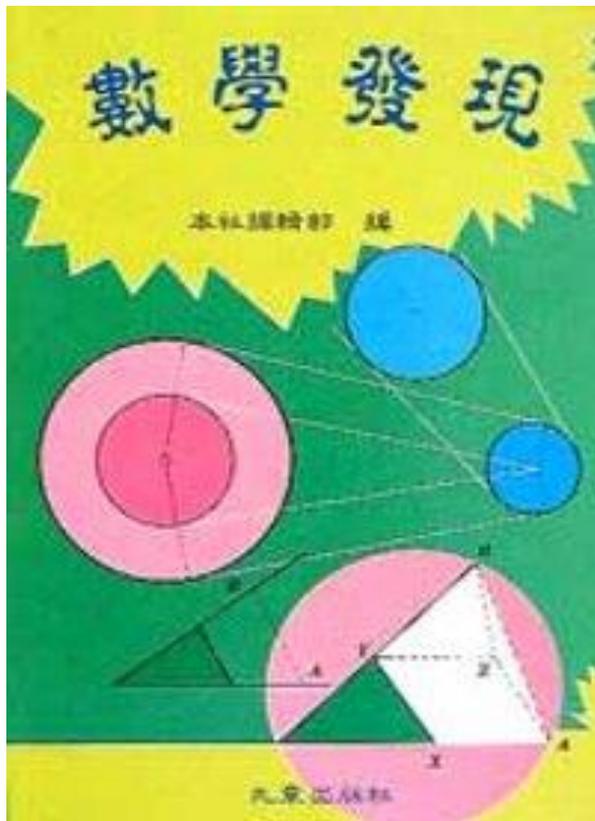
Jarrett, 1997

Inquiry strategies for science and mathematics learning: It's just good teaching.

Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory.

George Polya(波利亞).

MATHEMATICAL DISCOVERY 《數學發現》



美國數學教師協會 (National Council for Teachers of Mathematics, 1989) :

“ Problem solving should be the central focus of mathematics curriculum. As such, it is a primary goal of all mathematics instruction and an integral part of all mathematical activity. Problem solving is not a distinct topic but a process that should be permeate the entire program and provide the context in which concepts and skills can be learned.”

(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA. p.23)

小孩學步（一步一步）

引發興趣

擁抱挑戰

專業判斷

1. 設置一個可「感受」的情境

運用數學，作出決策

兩個玩法(贈送獎品)

1. 拿一顆籃球，可以投一次。命中，獲 1000 港元
2. 拿一顆籃球，可以投三次中兩次，也能得到1000 港元

你會選擇哪一個？

考慮期望值

- 第一個賭注的期望值: $\$1000 \times p$
- 第二個賭注的期望值: $\$1000 \times (3p^2 - 2p^3)$

列表、繪圖

第一次投球	第二次投球	第三次投球	概率	贏得一千港元
				否
		✓		否
	✓			否
✓				否
	✓	✓		是
✓		✓		是
✓	✓			是
✓	✓	✓		是

2. 用促進較高層次思維的詞語來提問

解釋

說明

聯繫

區別

對比

分析

推斷

解決

發現

概括

數列的規律

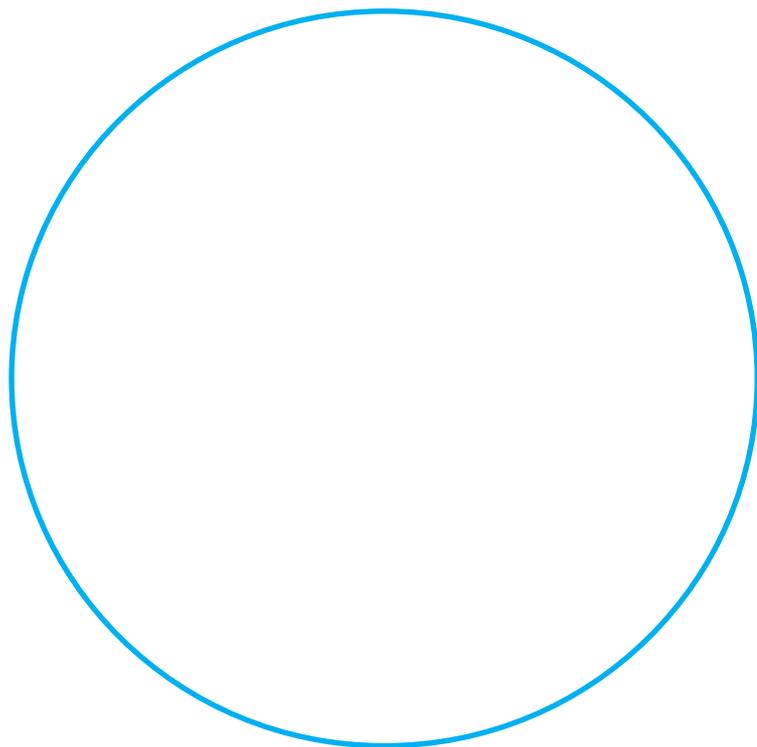
1, 2, 4, 8, 16, ?

探索與研究

解難

數列的規律

1, 2, 4, 8, 16, ?

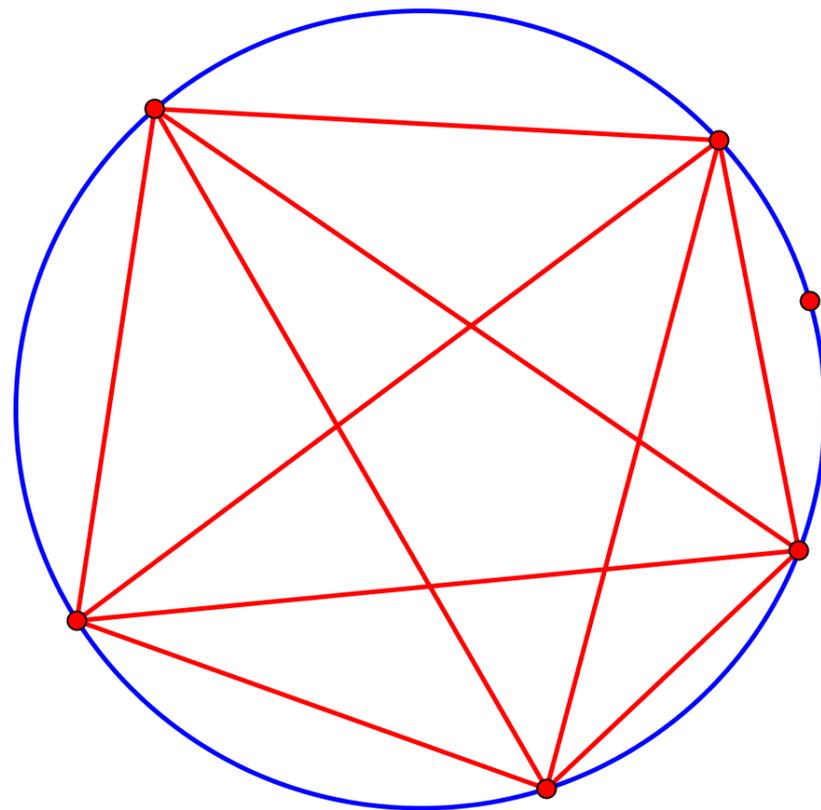


在圓周上 n 點
連直線，最多
可給圓形分割
成多少區域？

數列的規律

1, 2, 4, 8, 16, ?

n	區域數目
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	?



數列的規律

1, 2, 4, 8, 16, ?

n	區域數目
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	?

$1 + C(6, 2) + C(6, 4) =$

任何 2 點相連，
增加 1 區域： $C(n, 2)$

任何 4 點，
成 1 交點，
增加 1 區域： $C(n, 4)$

區域數目：
 $1 + C(n, 2) + C(n, 4)$

數列的規律

1, 2, 4, 8, 16, ?

有無窮多答案

任何一個數都可以是答案

數列的規律

2, 4, 37

$$f(n) = \frac{2(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)} + \frac{4(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)} + \frac{37(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 37$$

數列的規律

2, 4, π

$$f(n) = \frac{2(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)} + \frac{4(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)} + \frac{\pi(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = \pi$$

推行策略

扣緊課程

出人意表

一元二次方程

明顯地， $x \neq 0$

$$x - x^2 = 1$$

$$1 - x = \frac{1}{x}$$

$$1 = x + \frac{1}{x}$$

$$x - x^2 = x + \frac{1}{x}$$

$$x^3 = -1$$

$$x = -1$$

但 $x = -1$ 不是解！

一元二次方程

明顯地， $x \neq 0$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x = -1 \text{ or } x - x^2 = 1$$

(捨去)

但 $x = -1$ 不是解！

$$x - x^2 = 1$$

$$1 - x = \frac{1}{x}$$

$$1 = x + \frac{1}{x}$$

$$x - x^2 = x + \frac{1}{x}$$

$$x^3 = -1$$

$$x = -1$$

延伸問題

$$\sqrt{x+1} - x + 1 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

$$x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = 3$$

(捨去)

延伸問題

$$\log x^2 = 2\log 3$$

$$\log x^2 = \log 3^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$2\log x = 2\log 3$$

$$\log x = \log 3$$

$$x = 3$$

$x = -3$ 不見了？

鞏固

扣緊課程

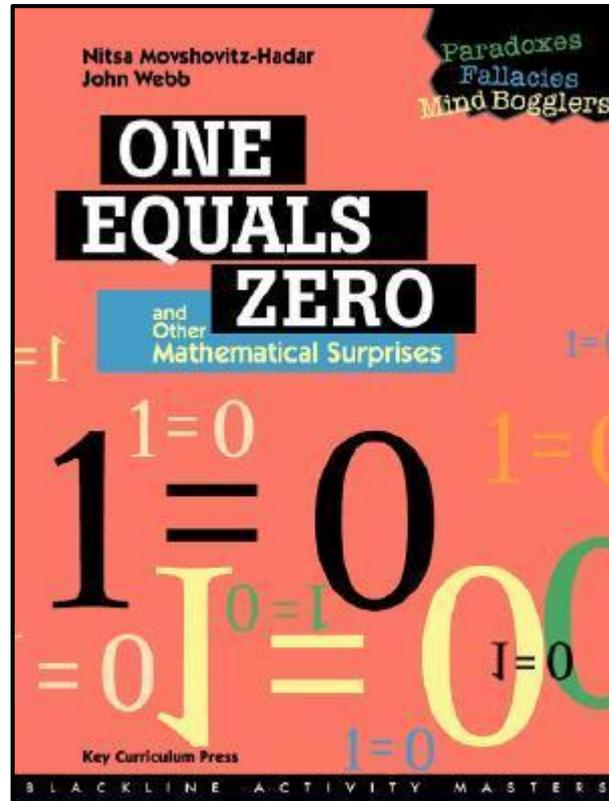
出人意表

忍耐……

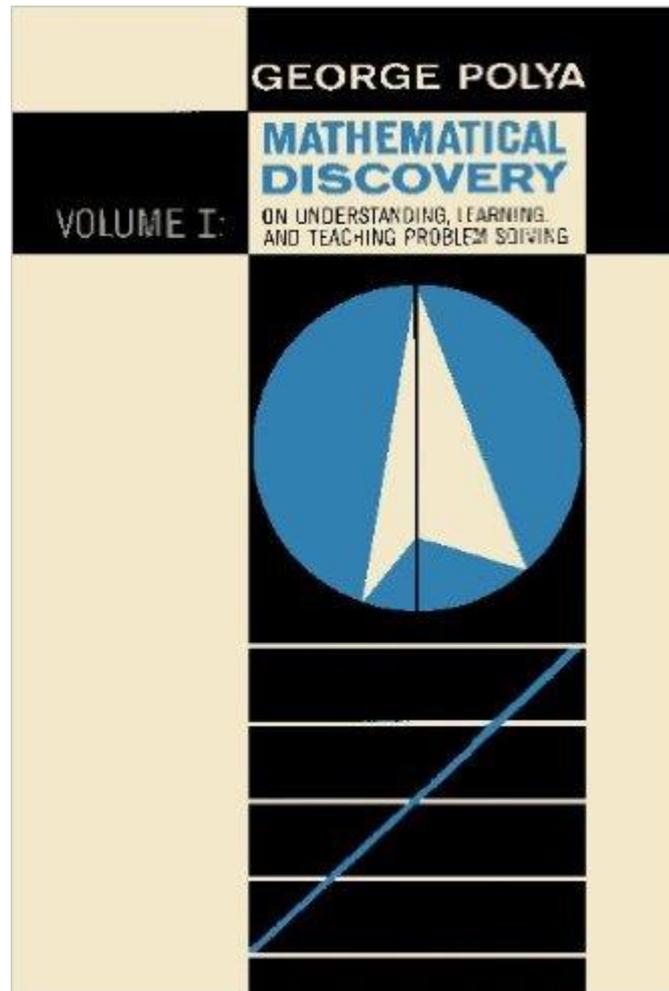
從簡到繁

陶哲軒(2011)的《陶哲軒教你聰明解數學》中提出解題的策略：

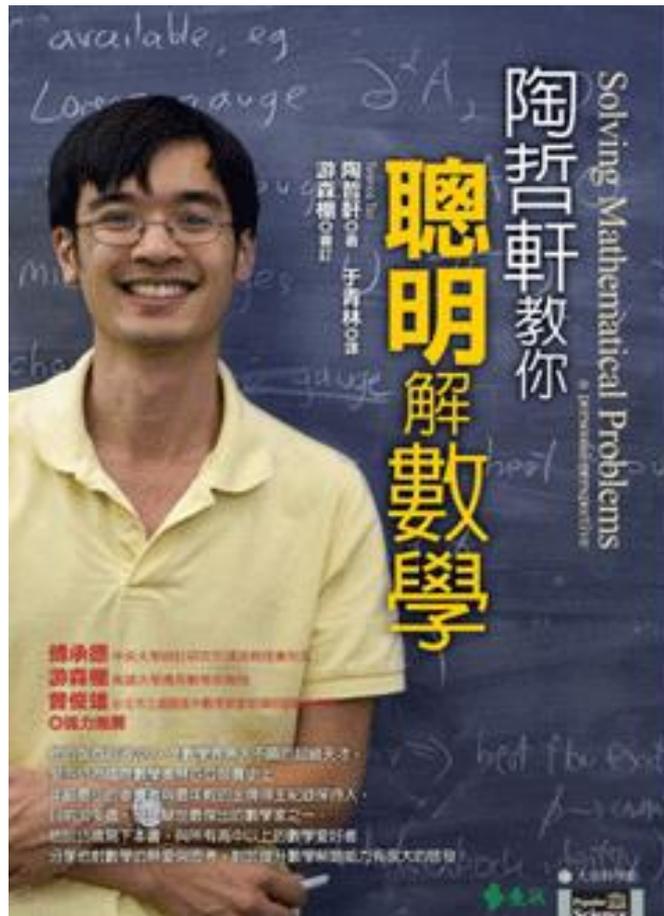
1. **理解問題**：這問題是屬於哪種類型？證明、求值、是否存在.....？
2. **理解題目所給的資訊**：給了什麼資訊、什麼條件.....。
3. **理解問題的目標**：證明什麼、求什麼值、....。
4. **選擇恰當的符號**：因應目標，用簡單的形式表達。
5. **畫一個示意圖**：用選定的符號畫圖表達。
6. **對問題稍作修改**：修改題目使更容易處理。
7. **處理與問題有關的資訊**，簡化、活用，以便達到目標。



Movshovitz-Hadar and Webb (1998). *One equals zero and other mathematical surprises: Paradoxes, fallacies and mind booglers*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.



George Polya(1962). *MATHEMATICAL DISCOVERY on understanding, learning, and teaching problem solving*. John Wiley & Sons, Inc.



陶哲軒(2011). 《陶哲軒教你聰明解數學》臺北市：遠流出版事業股份有限公司

