單元一的學與教策略

進階概率: 條件概率和貝葉斯定理

進階概率 (現行)

學習單位	學習重點	時間
10. 條件概率和獨立性	10.1 理解條件概率和獨立事件的概念 10.2 使用法則 $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$ 和 $P(D\mid C)=P(D)$ 解應用題，其中 C 和 D 為獨立事件	3
11. 貝葉斯定理	11.1 使用貝葉斯定理解簡單應用題	4

進階概率 (修訂)

學習單位	學習重點	時間
11.條件概率和貝葉斯定理	10.1 理解條件概率的概念 10.2 運用貝葉斯定理解簡單應用題	6

必修部分的續概率

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

6 是集合 S 的元素

E = {2, 4, 6}

獨立事件

有些事件的發生與否，並不影響另一些事件的發生，反之亦然。

獨立事件

兩個事件 A 和 B 稱為獨立 (independent)，若

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$P(A \mid B)\,P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A \mid B) = P(A)$$

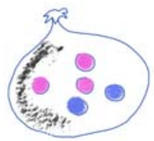
例子：　　是否放回?

$$P(A_{1紅} \cap A_{2紅})$$

$$P(A_{1紅}) = ?$$

$$P(A_{2紅}) = ?$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$$



$$\boxed{P(A_{1紅})} \qquad \boxed{P(A_{2紅} \mid A_{1紅})}$$

思考題 1

同時投擲三枚均勻硬幣，設事件 A 為「所有硬幣出現相同面」，事件 B 為「至多出現一個正面」。A、B 是否相互獨立？

思考題 2

同時投擲四枚均勻硬幣，設事件 C 為「所有硬幣出現相同面」，事件 D 為「至多出現一個正面」。C、D 是否相互獨立？

探索與研究：n 固定，p 可變…

Stenger, 1980, Abstracts AMS

C1	C2	C3
H	H	H
H	H	T
H	T	H
T	H	H
T	H	T
T	T	H
H	T	T
T	T	T

解:

$$P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

C1	C2	C3
H	H	H
H	H	T
H	T	H
T	H	H
T	H	T
T	T	H
H	T	T
T	T	T

事件 A =所有硬幣出現相同面

事件 B =至多出現一個正面

3. 必修部分中概率的運算

認識條件概率的記法

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)$$

(必修部分：不包括貝葉斯定理)

投擲一粒勻稱的六面骰子

- X 表示出現偶數的事件
- Y 表示出現點數大過 2 的事件
- Z 表示出現質數的事件

X = {2, 4, 6}

Y = {3, 4, 5, 6}

Z = {2, 3, 5}

X , Y	Y	$\overline{Y}$
	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
X: 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\overline{X}$: 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

X , Y	Y	$\overline{Y}$
	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
X: 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\overline{X}$: 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

X , Y	$P(Y)=\frac{2}{3}$	$P(\overline{Y})=\frac{1}{3}$
$P(X)=\frac{1}{2}$	$P(X\cap Y)=\frac{1}{3}$	$P(X\cap \overline{Y})=\frac{1}{6}$
$P(\overline{X})=\frac{1}{2}$	$P(\overline{X}\cap Y)=\frac{1}{3}$	$P(\overline{X}\cap \overline{Y})=\frac{1}{6}$

X = {2, 4, 6}

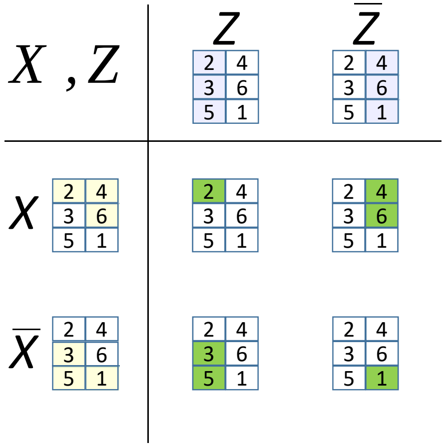
Y = {3, 4, 5, 6}

Z = {2, 3, 5}

X , Y	$P(Y)=\frac{2}{3}$	$P(\overline{Y})=\frac{1}{3}$
$P(X)=\frac{1}{2}$	$P(X\cap Y)=\frac{1}{3}$	$P(X\cap \overline{Y})=\frac{1}{6}$
$P(\overline{X})=\frac{1}{2}$	$P(\overline{X}\cap Y)=\frac{1}{3}$	$P(\overline{X}\cap \overline{Y})=\frac{1}{6}$

X , Z	Z	$\overline{Z}$
	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
X: 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1
$\overline{X}$: 2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1	2 4 3 6 5 1

$X\ ,Z$	$P(Z)=\frac{1}{2}$	$P(\overline{Z})=\frac{1}{2}$
$P(X)=\frac{1}{2}$	$P(X\cap Z)=\frac{1}{6}$	$P(X\cap \overline{Z})=\frac{1}{3}$
$P(\overline{X})=\frac{1}{2}$	$P(\overline{X}\cap Z)=\frac{1}{3}$	$P(\overline{X}\cap \overline{Z})=\frac{1}{6}$

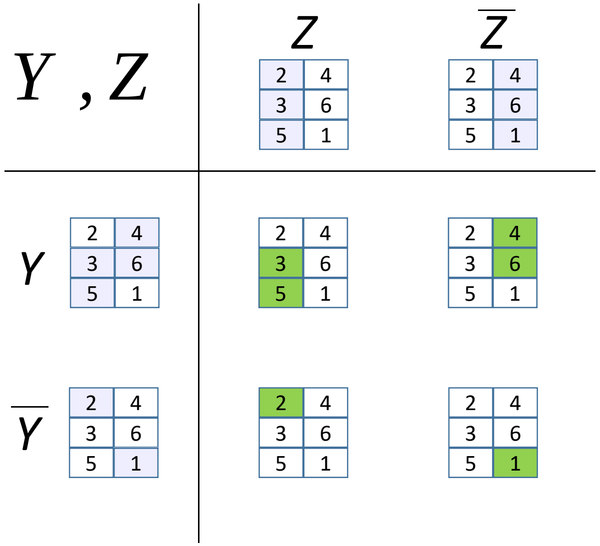


X = {2, 4, 6}

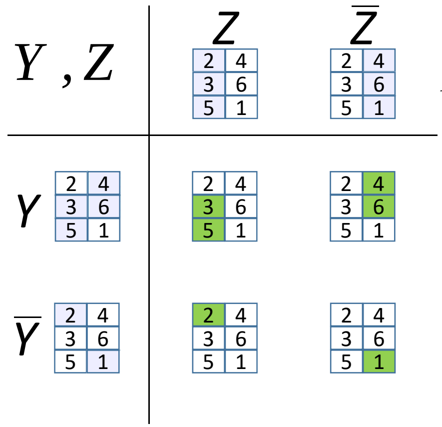
Y = {3, 4, 5, 6}

Z = {2, 3, 5}

$X\ ,Z$	$P(Z)=\frac{1}{2}$	$P(\overline{Z})=\frac{1}{2}$
$P(X)=\frac{1}{2}$	$P(X\cap Z)=\frac{1}{6}$	$P(X\cap \overline{Z})=\frac{1}{3}$
$P(\overline{X})=\frac{1}{2}$	$P(\overline{X}\cap Z)=\frac{1}{3}$	$P(\overline{X}\cap \overline{Z})=\frac{1}{6}$



$Y\ ,Z$	$P(Z)=\frac{1}{2}$	$P(\overline{Z})=\frac{1}{2}$
$P(Y)=\frac{2}{3}$	$P(Y\cap Z)=\frac{1}{3}$	$P(Y\cap \overline{Z})=\frac{1}{3}$
$P(\overline{Y})=\frac{1}{3}$	$P(\overline{Y}\cap Z)=\frac{1}{6}$	$P(\overline{Y}\cap \overline{Z})=\frac{1}{6}$



X = {2, 4, 6}

Y = {3, 4, 5, 6}

Z = {2, 3, 5}

$Y\ ,Z$	$P(Z)=\frac{1}{2}$	$P(\overline{Z})=\frac{1}{2}$
$P(Y)=\frac{2}{3}$	$P(Y\cap Z)=\frac{1}{3}$	$P(Y\cap \overline{Z})=\frac{1}{3}$
$P(\overline{Y})=\frac{1}{3}$	$P(\overline{Y}\cap Z)=\frac{1}{6}$	$P(\overline{Y}\cap \overline{Z})=\frac{1}{6}$

條件概率

計算 $P(X|Y)$，與 $P(X)$，$P(Y)$和 $P(X\cap Y)$ 有何關係? 你有甚麼發現?

$P(X|Y)$ 表示已知 事件 Y 發生，事件 X 發生的概率

X 表示出現偶數的事件 $X = \{2, 4, 6\}$

Y 表示出現點數大過 2 的事件 $Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$$P(X|Y)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$X = \{2, 4, 6\}$
$Y = \{3, 4, 5, 6\}$
$Z = \{2, 3, 5\}$

$P(X\cap Y)=P(Y)\cdot P(X|Y)$?
$P(X\cap Z)=P(X)\cdot P(Z|X)$?
$P(Y\cap Z)=P(Z)\cdot P(Y|Z)$?

獨立事件

X 表示出現偶數的事件 $X = \{2, 4, 6\}$

Y 表示出現點數大過 2 的事件 $Y = \{3, 4, 5, 6\}$

Z 表示出現質數的事件 $Z = \{2, 3, 5\}$

事件 X, Y 和 Z 是否相互獨立? 何謂「獨立事件」?

「獨立事件」的定義: $\boxed{P(X\cap Y)=P(Y)\cdot P(X)}$

$$P(X|Y)=P(X)$$

獨立事件

$X = \{2, 4, 6\}$

$Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$Z = \{2, 3, 5\}$

$$P(X|Y)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$X\ ,Y$	$P(Y)=\frac{2}{3}$	$P(\overline{Y})=\frac{1}{3}$
$P(X)=\frac{1}{2}$	$P(X\cap Y)=\frac{1}{3}$	$P(X\cap \overline{Y})=\frac{1}{6}$
$P(\overline{X})=\frac{1}{2}$	$P(\overline{X}\cap Y)=\frac{1}{3}$	$P(\overline{X}\cap \overline{Y})=\frac{1}{6}$

事件 X 和 Y 是否相互獨立? 何謂「獨立事件」?

「獨立事件」的定義: $\boxed{P(X\cap Y)=P(Y)\cdot P(X)}$

$$P(X|Y)=P(X)$$

真實統計數字 http://www.bycensus2016.gov.hk/tc/bc-index.html

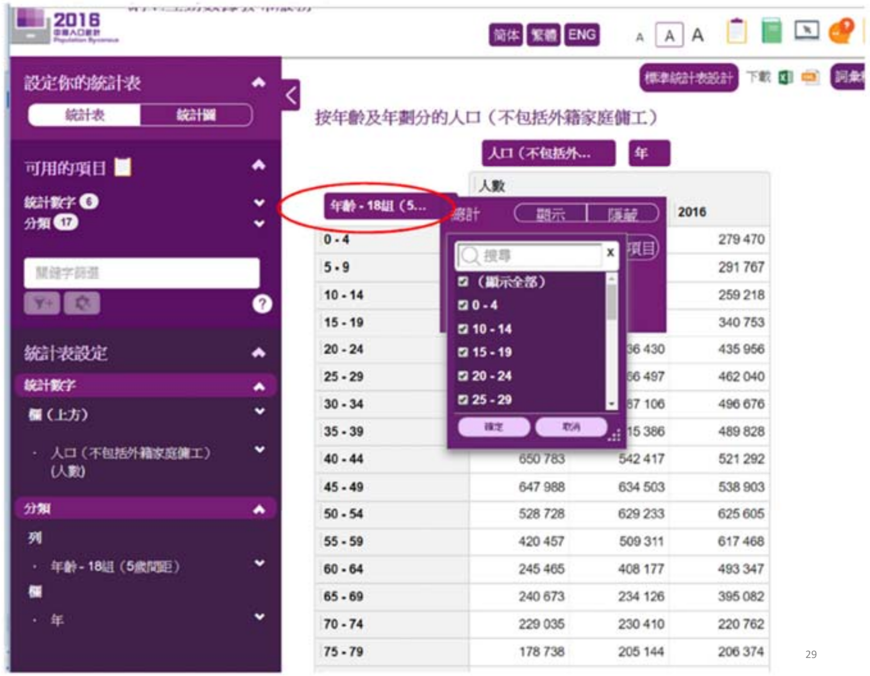
按年齡及年劃分的人口（不包括外籍家庭傭工）

	人口（不包括外籍家庭傭工）		
	人數		
年	2006	2011	2016
年齡			
0 - 4	212 605	249 235	279 470
5 - 9	313 215	243 209	291 767
10 - 14	413 855	331 116	259 218
15 - 19	438 597	423 572	340 753
20 - 24	441 578	436 430	435 956
25 - 29	455 042	466 497	462 040
30 - 34	509 519	487 106	496 676
35 - 39	546 771	515 386	489 828
40 - 44	650 783	542 417	521 292
45 - 49	647 988	634 503	538 903
50 - 54	528 728	629 233	625 605
55 - 59	420 457	509 311	617 468
60 - 64	240 465	408 177	493 347
65 - 69	240 673	234 126	395 082
70 - 74	229 035	230 410	220 762
75 - 79	178 738	205 141	206 374
80 - 84	112 786	146 081	166 968
85+	91 302	125 309	173 201
總計	6 677 197	6 817 292	7 014 790

資料來源：
香港特別行政區政府
政府統計處
2016年中期人口統計辦事處

按年齡及年劃分的人口（不包括外籍家庭傭工）

	人口（不包括外籍家庭傭工）		
	人數		
年	2006	2011	2016
年齡			
0 - 4	212 605	249 235	279 470
5 - 9	313 215	243 209	291 767
10 - 14	413 855	331 116	259 218
15 - 19	438 597	423 572	340 753
20 - 24	441 578	436 430	435 956
25 - 29	455 042	466 497	462 040
30 - 34	509 519	487 106	496 676
35 - 39	546 771	515 386	489 828
40 - 44	650 783	542 417	521 292
45 - 49	647 988	634 503	538 903
50 - 54	528 728	629 233	625 605
55 - 59	420 457	509 311	617 468



聯表引入獨立事件

在某地方隨機抽取樣本，樣本大小為 350，檢測色盲與性別的關係，結果如下:

樣本一：

	男性	女性	總數
色盲	10	25	35
沒有色盲	90	225	315
總數	100	250	350

聯表引入獨立事件

在某地方隨機抽取兩個樣本，樣本大小為 350，檢測色盲與性別的關係，結果如下:

樣本二：

	男性	女性	總數
色盲	5	1	6
沒有色盲	95	249	344
總數	100	250	350

聯表引入獨立事件

樣本一：

	男性	女性	總數
色盲	10	25	35
沒有色盲	90	225	315
總數	100	250	350

樣本二：

	男性	女性	總數
色盲	5	1	6
沒有色盲	95	249	344
總數	100	250	350

從兩個樣本分別計算以下概率:

$P(\text{男性})$	$P(\text{女性})$	$P(\text{色盲})$
$P(\text{色盲} \mid \text{男性})$	$P(\text{色盲} \mid \text{女性})$	$P(\text{男性} \mid \text{色盲})$
$P(\text{色盲} \cap \text{男性})$	$P(\text{色盲} \cap \text{女性})$	$P(\text{女性} \mid \text{色盲})$

樣本一：

	男性	女性	總數
色盲	10	25	35
沒有色盲	90	225	315
總數	100	250	350

$P(\text{男性}) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7}$

$P(\text{色盲} \mid \text{男性}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$P(\text{色盲} \cap \text{男性}) = \frac{10}{350} = \frac{1}{35}$

$P(\text{女性}) = \frac{250}{350} = \frac{5}{7}$

$P(\text{色盲} \mid \text{女性}) = \frac{25}{250} = \frac{1}{10}$

$P(\text{色盲} \cap \text{女性}) = \frac{25}{350} = \frac{1}{14}$

$P(\text{色盲}) = \frac{35}{350} = \frac{1}{10}$

$P(\text{男性} \mid \text{色盲}) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

$P(\text{女性} \mid \text{色盲}) = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

問題

$P(\text{色盲} \mid \text{男性}) = P(\text{色盲})?$

$P(\text{色盲} \cap \text{男性}) = P(\text{色盲}) \cdot P(\text{男性})?$

$P(\text{色盲} \mid \text{女性}) = P(\text{色盲})?$

$P(\text{色盲} \cap \text{女性}) = P(\text{色盲}) \cdot P(\text{女性})?$

$P(\text{男性} \mid \text{色盲}) = P(\text{男性})?$

$P(\text{女性} \mid \text{色盲}) = P(\text{女性})?$

$P(\text{男性} \mid \text{色盲}) = P(\text{色盲} \mid \text{男性})?$

$P(\text{女性} \mid \text{色盲}) = P(\text{色盲} \mid \text{女性})?$

樣本二：

	男性	女性	總數
色盲	5	1	6
沒有色盲	95	249	344
總數	100	250	350

$P(\text{男性}) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7}$

$P(\text{色盲} \mid \text{男性}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$P(\text{色盲} \cap \text{男性}) = \frac{5}{350} = \frac{1}{70}$

$P(\text{女性}) = \frac{250}{350} = \frac{5}{7}$

$P(\text{色盲} \mid \text{女性}) = \frac{1}{250}$

$P(\text{色盲} \cap \text{女性}) = \frac{1}{350}$

$P(\text{色盲}) = \frac{6}{350} = \frac{3}{175}$

$P(\text{男性} \mid \text{色盲}) = \frac{5}{6}$

$P(\text{女性} \mid \text{色盲}) = \frac{1}{6}$

問題

$P(\text{色盲} \mid \text{男性}) = P(\text{色盲})?$

$P(\text{色盲} \cap \text{男性}) = P(\text{色盲}) \cdot P(\text{男性})?$

$P(\text{色盲} \mid \text{女性}) = P(\text{色盲})?$

$P(\text{色盲} \cap \text{女性}) = P(\text{色盲}) \cdot P(\text{女性})?$

$P(\text{男性} \mid \text{色盲}) = P(\text{男性})?$

$P(\text{女性} \mid \text{色盲}) = P(\text{女性})?$

$P(\text{男性} \mid \text{色盲}) = P(\text{色盲} \mid \text{男性})?$

$P(\text{女性} \mid \text{色盲}) = P(\text{色盲} \mid \text{女性})?$

一般情況

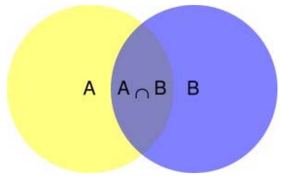
$$P(色盲\cap男性)=P(男性)\cdot P(色盲|男性)$$

$$P(色盲\cap男性)=P(色盲)\cdot P(男性|色盲)$$

$$\therefore\ P(色盲)\cdot P(男性|色盲)=P(男性)\cdot P(色盲|男性)$$

$$P(男性|色盲)=\frac{P(色盲|男性)\cdot P(男性)}{P(色盲)}$$

先備知識：條件概率



$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$$

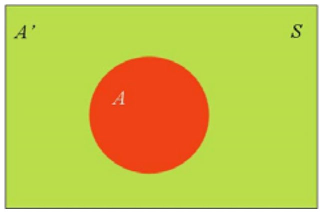
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

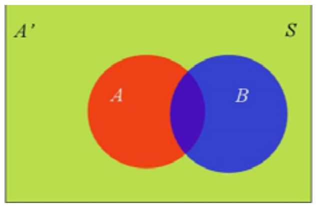
$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

先備知識：全概率公式





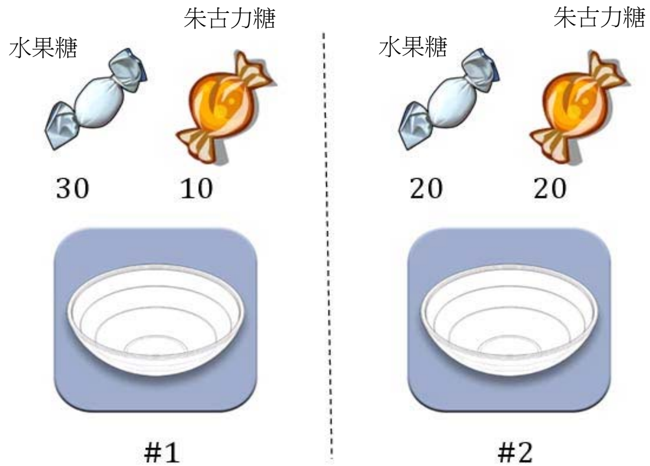
$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$$

$$P(B\cap A)=P(B|A)P(A)$$

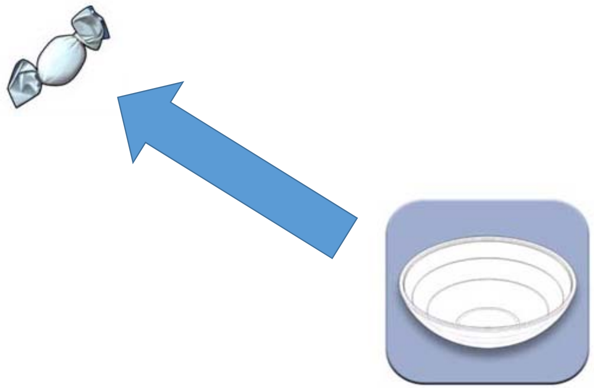
$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}$$

Bayes Theorem (貝葉斯定理)



Bayes Theorem (貝葉斯定理)



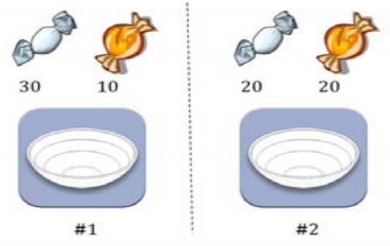
#1

設 $H1$表示一號碗，$H2$表示二號碗

$P(H_1) = 0.5$　先驗概率

設 E 表示水果糖

$P(H_1|E) = ?$　後驗概率



$$P(H_1|E) = P(H_1)\frac{P(E|H_1)}{P(E)}$$

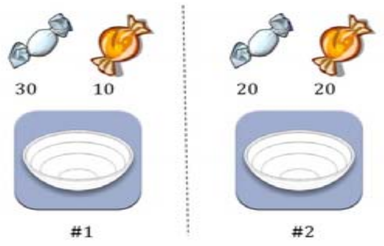
後驗概率 = 先驗概率 × 調整因子

設 $H1$表示一號碗，$H2$表示二號碗

$P(H_1) = 0.5$　先驗概率

設 E 表示水果糖

$P(H_1|E) = ?$　後驗概率



$$P(H_1|E) = P(H_1)\frac{P(E|H_1)}{P(E)}$$

後驗概率 = 先驗概率 × 調整因子

$$P(E|H_1) = \frac{30}{30+10} = 0.75$$

$$P(E) = P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2)$$

$$P(E) = 0.75 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5$$

$$P(E) = 0.625$$

$$P(H_1|E) = P(H_1)\frac{P(E|H_1)}{P(E)}$$

$$P(H_1|E) = 0.5 \times \frac{0.75}{0.625} = 0.6$$

$$P(男性|色盲)=\frac{P(色盲|男性)\cdot P(男性)}{P(色盲)}$$

- P(男性): 先驗概率
  (prior probability)
- P(男性|色盲): 後驗概率
  (posterior probability)

全概率公式 (Theorem of total probability)

$$P(色盲)=P(色盲\cap男性)+P(色盲\cap女性)$$

$$P(色盲)=P(色盲|男性)\cdot P(男性)+P(色盲|女性)\cdot P(女性)$$

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

註：B_1 和 B_2 兩兩互斥；

B_1 和 B_2 為樣本空間內的有限劃分

$$P(男性|色盲)=\frac{P(色盲|男性)\cdot P(男性)}{P(色盲)}$$

Bayes Theorem (貝葉斯定理)

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$$

$$P(男性|色盲)=\frac{P(色盲|男性)\cdot P(男性)}{P(色盲)}$$

Bayes Theorem (貝葉斯定理)

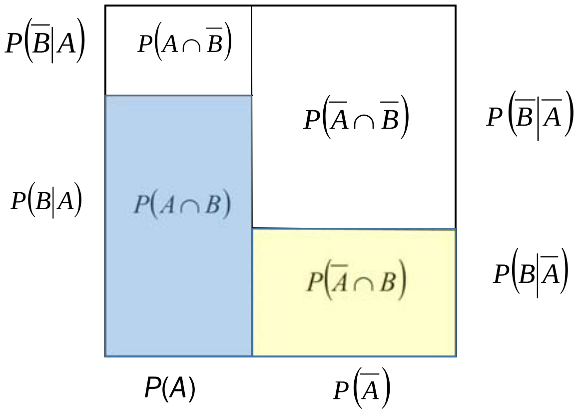
	A	$\overline{A}$
B	$A\cap B$	$\overline{A}\cap B$
$\overline{B}$	$A\cap\overline{B}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$

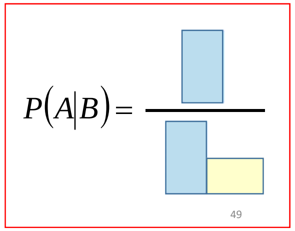
	A	$\overline{A}$	合計
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Bayes Theorem (貝葉斯定理)

面積模型

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$$





貝葉斯推斷 過濾垃圾郵件

如果來自 A 箱的概率 (為垃圾郵件的概率) 大於預先的設定值，電腦就自動判斷它是垃圾電子郵件。

訓練 **sex**

正常郵件	垃圾郵件
4000封	4000封

訓練

某個詞只出現在垃圾郵件中

假設在正常郵件出現的概率為1%

貝葉斯過濾器的使用過程

設　S 表示垃圾郵件 (spam)，
H表示正常郵件 (healthy)
W表示“sex”這個詞

$$P(S|W)=\frac{P(W|S)P(S)}{P(W|S)P(S)+P(W|H)P(H)}$$

$$P(S|W)=\frac{5\%\times 50\%}{5\%\times 50\%+0.05\%\times 50\%}=99.0\%$$