

把学校活动室改造成咖啡阁

学习阶段： 3

学习单位： 探索与研究
〔此建模活动主要涉及：〕

- 求积法
- 率、比及比例〕

目标：

- (i) 加强学生认识如何通过数学建模处理现实问题
- (ii) 提升学生在建模中作出假设和运用数学概念的能力
- (iii) 丰富学生在现实情境中运用求积法和比的经验

先备知识：

- (i) 解涉及表面面积的应用题
- (ii) 解涉及比的应用题

教学资源： 卷尺或数位测量器

背景资料：

创建空间的平面图是室内设计、建筑和设施管理等範疇的一项重要技能，这涉及到数学知识和技能的应用。某些学者提出的数学建模任务，例如 Yeo (2015) 所描述的案例，提出考虑现实情境，逐步完善平面图的设计过程。本示例的活动让学生想象把学校活动室改造为一个舒适的咖啡阁，以促进学生和教师之间的社交互动。

这一系列活动的目的主要是运用数学建模的方法，帮助我们处理与室内设计相关的问题。具体而言，学生的任务是思考如何运用不同因素来衡量空间的舒适度，并设计咖啡阁的平面图，包括提出最佳的桌椅布局，以善用空间并提升舒适度。然后，他们会制定一个家具成本的预算报告，并讨论在预算中需要考虑的其他因素。通过分组汇报和参考其他同学的设计，学生将进一步探讨如何从数学角度思考对于一个舒适的咖啡阁的衡量条件及其设计。

活动详情：

此资源套件共有三个主要的活动：

- 活动 1：引导学生思考如何以数学方式描述空间的舒适度，并制作咖啡阁的初步平面图。
- 活动 2：就舒适度和家具预算，收集有关咖啡阁或餐厅（2A）和家具（2B）的现实数据，并思考如何为咖啡阁的舒适度和家具成本制定衡量条件。
- 活动 3：运用活动 2 关于咖啡阁舒适度和家具成本的结果，优化咖啡阁的设计，以按比例平面图展示，并制定咖啡阁的家具预算。通过分组汇报，学生观摩不同的设计，并思考如何优化自己的设计。

为提升此活动对能力较高的学生的挑战性，教师可以加入预算计划的限制和考虑咖啡阁的收入。这将会要求学生在确保舒适度和容纳更多顾客之间取得平衡，从而增加情境的复杂性，创造更多数学建模学习机会。

下表总结了教师可以在相应活动中与学生讨论的建模步骤及元素。

建模步骤	元素	工作纸 1	工作纸 2	工作纸 3
分析现实世界问题	<ul style="list-style-type: none">• 理解现实世界情境• 厘清问题中的关键因素• 识别与问题相关的数据 / 数据及问题中的数学元素	1, 2a, 3a	1, 3ab	
建立数学模型	<ul style="list-style-type: none">• 提出假设以简化现实世界问题• 以数学方式表述问题• 确定关键量/变量之间的关系	2bc, 3bc, 4	2, 4	1
求解模型以得出数学的解	<ul style="list-style-type: none">• 应用数学知识与技能，以及不同的工具来求出模型的解	4	2, 4	2
解释数学模型的解以获得现实世界的解	<ul style="list-style-type: none">• 考虑数学的解在现实世界问题下的意义			2
评估数学模型	<ul style="list-style-type: none">• 按现实世界情境验证模型• 反思模型的优点和限制• 比较不同模型• 提出优化模型的建议	3d		3

活动 1 (请参阅工作纸 1)

此活动首先让学生认识如何透过不同因素来衡量空间的舒适度，然后制作咖啡阁的初步设计，以粗略的平面图展示。

教学建议：

1. 教师可以向学生介绍把活动室改造成咖啡阁的背景。在问题 1 中，教师可与学生讨论如何以数学方式来描述餐厅环境的「舒适度」，并找出那些因素是与数学相关的，这是建模中把现实问题数学化的过程。以下是一些可能的讨论结果。
 - 与数学较直接相关的因素：
 - 咖啡阁空间的大小
 - 同一时间可容纳的顾客人数
 - 桌椅的数目
 - 两组桌椅之间的距离
 - 与数学较不直接相关的因素：
 - 背景音乐
 - 布置
 - 颜色

教师可以聚焦于两个可以量化空间舒适度的因素，包括通道宽度（因素 1）和自由空间比（因素 2）。

2. 问题 2 聚焦于探究通道宽度（因素 1）。教师可以在问题 2(a) 中带领学生讨论通道宽度如何能影响空间中的舒适度。以下是一些可能的讨论结果。
 - 一般而言，通道宽度的值越大，即通道宽敞，舒适度越高。
相反，通道宽度的值越小，即通道容易拥挤，舒适度越低。

在问题 2(b) 中，学生需要量度活动室内两组桌椅之间的通道宽度。他们可以使用卷尺或数位测量器（例如平板电脑或智能电话的「测距仪」應用程式）进行量度。然后，教师可以鼓励学生提出合理的通道宽度，例如考虑某人手持一杯咖啡所需的通道宽度。

在问题 2(c) 中，教师可以带领学生讨论在实地考察时，以通道宽度来量化咖啡阁或餐厅的舒适度的困难和解决方法。以下是一些可能的讨论结果。

- 困难：咖啡阁或餐厅内通常会有多条通道，而且其宽度不一。
- 解决方法：我们可以制定策略来找出最具代表性的通道宽度，例如取空间中所有通道宽度的平均值、众数组或中位数等方法。

3. 问题 3 聚焦于探究自由空间比（因素 2）。教师可以在问题 3(a) 中带领学生讨论当自由空间比接近 0 或接近 1 时所产生的问题。以下是一些可能的讨论结果。

- 若自由空间比接近 0，活动室将变得过于拥挤，妨碍顾客的运动。
相反，若自由空间比接近 1，则可能会产生空虚感和未充分利用空间。

在问题 3(b) 中，学生需要量度活动室的尺寸（每段墙脚的长度），以及当中的家具大小，从而计算目前设置的自由空间比。然后，教师可以鼓励学生参照现时活动室的自由空间比，以及对现时活动室的观感，为咖啡阁提出合理的自由空间比。

在问题 3(c) 中，教师可以带领学生讨论在实地考察时，以自由空间比来量化咖啡阁或餐厅的舒适度的困难和解决方法。以下是一些可能的讨论结果。

- 困难：在运营中的咖啡阁或餐厅中，准确量度尺寸会有一些的难度，因为顾客和员工会在空间中走动。
- 解决方法：我们可运用估算技巧，例如测量咖啡阁或餐厅的特定区域，然后根据这些结果估算整个空间的大小。

在问题 3(d) 中，教师可以带领学生讨论自由空间比这个因素有什么不足。以下是一些可能的讨论结果。

- 自由空间比未能反映家具的形状和摆放的位置或方向对舒适度的影响。
另外，自由空间比是一个二维指标，未能完全反映三维空间的占用程度。

4. 在问题 4 中，学生以活动室的尺寸作为蓝本及考虑咖啡阁的固有设备，初步制作咖啡阁的平面图。同时，教师带领学生通过考虑因素 1 和 2 或其他相关因素，讨论咖啡阁的舒适度。

活动 2A (请参阅工作纸 2)

此活动涉及观察影响咖啡阁设计和顾客体验的变量，当中学生需走访一些就近的咖啡阁或餐厅进行观察。

教学建议：

1. 学生走访一些就近的咖啡阁或餐厅，并记录
 - (i) 同一时间可容纳的顾客人数；
 - (ii) 不同类型的桌子数量；
 - (iii) 通道宽度及量度策略；
 - (iv) 自由空间比及量度策略；以及
 - (v) 作为顾客所感受的「舒适度」。

2. 基于学生从实地考察所得的资料，他们提出一些对于舒适的咖啡阁需要符合的条件，并决定是否需要修改他们在活动 1（问题 4）的设计中因素 1（通道宽度）和因素 2（自由空间比）的数值。以下是一些可能的讨论结果。
 - 舒适的咖啡阁需符合以下条件：
 - 顾客总人数 ≤ 30
 - 桌子数量 ≤ 15
 - 因素 1：通道宽度 $\geq 1.5 \text{ m}$
 - 因素 2：自由空间比 ≈ 0.5

活动 2B (请参阅工作纸 2)

此活动涉及收集适合新咖啡阁的家具数据。学生可走访就近的家具店或浏览线上的零售商进行资料收集。

教学建议：

3. 考虑到咖啡阁的舒适度和预算，学生需要讨论他们需要收集哪些家具的数据/资料。以下是一些可能的讨论结果。
 - 舒适度和预算相关的数据/资料：
 - 尺寸
 - 功能（例如每张桌子的使用人数）
 - 舒适度（例如桌椅的高度和物料）
 - 价钱
4. 带着问题 3 的想法，学生走访就近的家具店（或浏览线上的零售商），收集一些可以考虑用于咖啡阁的桌子和椅子的资料。
5. 根据收集的数据，教师可引导学生讨论各款家具的价格范围，并根据活动 1 所制定的咖啡阁初步设计，预估其家具成本，作为活动 3 的其中一项重要讨论条件。

教师和学生可按学校活动室的情况及咖啡阁的要求讨论相应的合理家具成本。以下是一些可能的讨论结果。

- 一般能提供 15 至 30 个座位的小型咖啡阁，其家具成本约为 \$120,000 至 \$250,000。当中包含相应数量的桌椅和沙发，每件家具的参考成本如下：
 - 椅子/高脚椅：\$800 至 \$5,500/张
 - 桌子（双人或 4 人）：\$3,000 至 \$12,000/张
 - 沙发/卡座（2 至 4 人）：\$8,000 至 \$25,000/件
 - 吧枱（6 至 10 呎）：\$30,000 至 \$80,000/张

活动 3 (请参阅工作纸 3)

在此活动中，问题聚焦于使用在活动 1 和 2 中收集的数据进行平面图设计及家具成本的预算。通过分组汇报，学生观摩不同的设计，并思考如何优化自己的设计。

教学建议：

1. 学生可以参考以下步骤，在图表纸上按比例创建咖啡阁的平面图。
 - i. 学生使用在活动 1 中的量度值，设置平面图的大小，并在图表纸上标注比例。
 - ii. 如有需要，学生讨论是否更改放置咖啡阁内固有设备的位置（见活动 1 的问题 4）。
 - iii. 根据在活动 2A 的观察，学生讨论如何放置家具以提高咖啡阁的舒适度，并兼顾咖啡阁的运作需要。
 - iv. 根据在活动 2B 中的数据，学生决定将会使用的桌子和椅子的类型和数量。
 - v. 学生按比例地绘制一个咖啡阁的平面图，包括入口和家具的布局。

2. 根据在问题 1 中所设计的咖啡阁平面图，学生需计算或估算 (a) 同一时间可容纳的顾客人数、(b) 咖啡阁的通道宽度、(c) 咖啡阁的自由空间比，以及 (d) 家具的总成本。

然后，学生需评估这设计是否符合于活动 2 所提出的对于一个舒适的咖啡阁的条件。教师可以邀请学生报告他们的成果。

3. 最后，问题 3 可以作为学生的课后习作。在观摩了同学们的咖啡阁设计后，教师可以回顾一些汇报的佳作，指出他们优胜的地方和值得进一步研究的地方，进而要求学生优化他们原有对于一个舒适的咖啡阁的条件及其设计。

参考文献：

Yeo, K. K. J. (2015). Learning through “Designing a Café”. In N. H. Lee, & K. E. D. Ng (Eds.), *Mathematical Modelling: From Theory to Practice* (pp. 163–173). Singapore: World Scientific.

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
5	• 介绍后续活动	1. 教师介绍活动 2A 和 2B 的安排。 2. 学生分组。	

活动 2A

- 活动 2A 可以考虑用作外出活动。学生走访一些就近的咖啡阁或餐厅进行研究 (WS2 Q1-2)。教师亦可请学生通过生活观察来收集相应的数据。

活动 2B

- 活动 2B 可以考虑用作外出活动。学生走访就近的家具店进行研究 (WS2 Q3-5)。教师亦可请学生浏览线上的零售商来收集桌子、椅子及其他家具的资料。

活动 3

- 教学时间：约 80 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
30	• 建立一个优化的设计	1. 学生按比例地创建咖啡阁的平面图。	WS3 Q1
15	• 制定咖啡阁家具预算	1. 学生计算或估算 (a) 同一时间可容纳的顾客人数、(b) 咖啡阁的通道宽度、(c) 咖啡阁的自由空间比，以及 (d) 家具的总成本。 2. 学生对他们的设计进行评估。	WS3 Q2
30	• 展示结果	1. 学生展示他们的咖啡阁平面图和预算报告。 2. 教师对学生的成果给予回馈。	
5	• 总结活动	1. 教师总结这个建模活动。 2. 教师回顾一些汇报的佳作，指出他们优胜的地方，以及值得进一步研究的地方。 3. 作为课后习作，教师可以要求学生优化他们原有对于一个舒适的咖啡阁的条件及其设计。	WS3 Q3