

把學校活動室改造成咖啡閣

學習階段： 3

學習單位： 探索與研究
〔此建模活動主要涉及：〕

- 求積法
- 率、比及比例〕

目標：

- (i) 加強學生認識如何通過數學建模處理現實問題
- (ii) 提升學生在建模中作出假設和運用數學概念的能力
- (iii) 豐富學生在現實情境中運用求積法和比的經驗

先備知識：

- (i) 解涉及表面面積的應用題
- (ii) 解涉及比的應用題

教學資源： 卷尺或數位測量器

背景資料：

創建空間的平面圖是室內設計、建築和設施管理等範疇的一項重要技能，這涉及到數學知識和技能的應用。某些學者提出的數學建模任務，例如 Yeo (2015) 所描述的案例，提出考慮現實情境，逐步完善平面圖的設計過程。本示例的活動讓學生想像把學校活動室改造為一個舒適的咖啡閣，以促進學生和教師之間的社交互動。

這一系列活動的目的主要是運用數學建模的方法，幫助我們處理與室內設計相關的問題。具體而言，學生的任務是思考如何運用不同因素來衡量空間的舒適度，並設計咖啡閣的平面圖，包括提出最佳的桌椅佈局，以善用空間並提升舒適度。然後，他們會制定一個家具成本的預算報告，並討論在預算中需要考慮的其他因素。通過分組匯報和參考其他同學的設計，學生將進一步探討如何從數學角度思考對於一個舒適的咖啡閣的衡量條件及其設計。

活動詳情：

此資源套件共有三個主要的活動：

- 活動 1：引導學生思考如何以數學方式描述空間的舒適度，並製作咖啡閣的初步平面圖。
- 活動 2：就舒適度和家具預算，收集有關咖啡閣或餐廳（2A）和家具（2B）的現實數據，並思考如何為咖啡閣的舒適度和家具成本制定衡量條件。
- 活動 3：運用活動 2 關於咖啡閣舒適度和家具成本的結果，優化咖啡閣的設計，以按比例的比例圖展示，並制定咖啡閣的家具預算。通過分組匯報，學生觀摩不同的設計，並思考如何優化自己的設計。

為提升此活動對能力較高的學生的挑戰性，教師可以加入預算計劃的限制和考慮咖啡閣的收入。這將會要求學生在確保舒適度和容納更多顧客之間取得平衡，從而增加情境的複雜性，創造更多數學建模學習機會。

下表總結了教師可以在相應活動中與學生討論的建模步驟及元素。

| 建模步驟 | 元素 | 工作紙 1 | 工作紙 2 | 工作紙 3 |
|-----------------|---|-------------|--------|-------|
| 分析現實世界問題 | <ul style="list-style-type: none">• 理解現實世界情境• 釐清問題中的關鍵因素• 識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素 | 1, 2a, 3a | 1, 3ab | |
| 建立數學模型 | <ul style="list-style-type: none">• 提出假設以簡化現實世界問題• 以數學方式表述問題• 確定關鍵量/變數之間的關係 | 2bc, 3bc, 4 | 2, 4 | 1 |
| 求解模型以得出數學的解 | <ul style="list-style-type: none">• 應用數學知識與技能，以及不同的工具求出模型的解 | 4 | 2, 4 | 2 |
| 解釋數學的解以獲得現實世界的解 | <ul style="list-style-type: none">• 考慮數學的解在現實世界問題下的意義 | | | 2 |
| 評估數學模型 | <ul style="list-style-type: none">• 按現實世界情境驗證模型• 反思模型的優點和限制• 比較不同模型• 提出優化模型的建議 | 3d | | 3 |

活動 1 (請參閱工作紙 1)

此活動首先讓學生認識如何透過不同因素來衡量空間的舒適度，然後製作咖啡閣的初步設計，以粗略的平面圖展示。

教學建議：

1. 教師可以向學生介紹把活動室改造成咖啡閣的背景。在問題 1 中，教師可與學生討論如何以數學方式來描述餐廳環境的「舒適度」，並找出那些因素是與數學相關的，這是建模中把現實問題數學化的過程。以下是一些可能的討論結果。
 - 與數學較直接相關的因素：
 - 咖啡閣空間的大小
 - 同一時間可容納的顧客人數
 - 桌椅的數目
 - 兩組桌椅之間的距離
 - 與數學較不直接相關的因素：
 - 背景音樂
 - 佈置
 - 顏色

教師可以聚焦於兩個可以量化空間舒適度的因素，包括通道寬度（因素 1）和自由空間比（因素 2）。

2. 問題 2 聚焦於探究通道寬度（因素 1）。教師可以在問題 2(a) 中帶領學生討論通道寬度如何能影響空間中的舒適度。以下是一些可能的討論結果。
 - 一般而言，通道寬度的值越大，即通道寬敞，舒適度越高。
相反，通道寬度的值越小，即通道容易擁擠，舒適度越低。

在問題 2(b) 中，學生需要量度活動室內兩組桌椅之間的通道寬度。他們可以使用卷尺或數位測量器（例如平板電腦或智能電話的「測距儀」應用程式）進行量度。然後，教師可以鼓勵學生提出合理的通道寬度，例如考慮某人手持一杯咖啡所需的通道寬度。

在問題 2(c) 中，教師可以帶領學生討論在實地考察時，以通道寬度來量化咖啡閣或餐廳的舒適度的困難和解決方法。以下是一些可能的討論結果。

- 困難：咖啡閣或餐廳內通常會有多條通道，而且其寬度不一。
- 解決方法：我們可以制定策略來找出最具代表性的通道寬度，例如取空間中所有通道寬度的平均值、眾數組或中位數等方法。

3. 問題 3 聚焦於探究自由空間比（因素 2）。教師可以在問題 3(a) 中帶領學生討論當自由空間比接近 0 或接近 1 時所產生的問題。以下是一些可能的討論結果。

- 若自由空間比接近 0，活動室將變得過於擁擠，妨礙顧客的移動。
相反，若自由空間比接近 1，則可能會產生空虛感和未充分利用空間。

在問題 3(b) 中，學生需要量度活動室的尺寸（每段牆腳的長度），以及當中的家具大小，從而計算目前設置的自由空間比。然後，教師可以鼓勵學生參照現時活動室的自由空間比，以及對現時活動室的觀感，為咖啡閣提出合理的自由空間比。

在問題 3(c) 中，教師可以帶領學生討論在實地考察時，以自由空間比來量化咖啡閣或餐廳的舒適度的困難和解決方法。以下是一些可能的討論結果。

- 困難：在運營中的咖啡閣或餐廳中，準確量度尺寸會有一定的難度，因為顧客和員工會在空間中走動。
- 解決方法：我們可運用估算技巧，例如測量咖啡閣或餐廳的特定區域，然後根據這些結果估算整個空間的大小。

在問題 3(d) 中，教師可以帶領學生討論自由空間比這個因素有什麼不足。以下是一些可能的討論結果。

- 自由空間比未能反映家具的形狀和擺放的位置或方向對舒適度的影響。
另外，自由空間比是一個二維指標，未能完全反映三維空間的佔用程度。

4. 在問題 4 中，學生以活動室的尺寸作為藍本及考慮咖啡閣的固有設備，初步製作咖啡閣的平面圖。同時，教師帶領學生通過考慮因素 1 和 2 或其他相關因素，討論咖啡閣的舒適度。

活動 2A (請參閱工作紙 2)

此活動涉及觀察影響咖啡閣設計和顧客體驗的變量，當中學生需走訪一些就近的咖啡閣或餐廳進行觀察。

教學建議：

1. 學生走訪一些就近的咖啡閣或餐廳，並記錄
 - (i) 同一時間可容納的顧客人數；
 - (ii) 不同類型的桌子數量；
 - (iii) 通道寬度及量度策略；
 - (iv) 自由空間比及量度策略；以及
 - (v) 作為顧客所感受的「舒適度」。

2. 基於學生從實地考察所得的資料，他們提出一些對於舒適的咖啡閣需要符合的條件，並決定是否需要修改他們在活動 1 (問題 4) 的設計中因素 1 (通道寬度) 和因素 2 (自由空間比) 的數值。以下是一些可能的討論結果。
 - 舒適的咖啡閣需符合以下條件：
 - 顧客總人數 ≤ 30
 - 桌子數量 ≤ 15
 - 因素 1：通道寬度 $\geq 1.5 \text{ m}$
 - 因素 2：自由空間比 ≈ 0.5

活動 2B (請參閱工作紙 2)

此活動涉及收集適合新咖啡閣的家具數據。學生可走訪就近的家具店或瀏覽線上的零售商進行資料收集。

教學建議：

3. 考慮到咖啡閣的舒適度和預算，學生需要討論收集哪些家具的數據/資料。以下是一些可能的討論結果。
 - 舒適度和預算相關的數據/資料：
 - 尺寸
 - 功能（例如每張桌子的使用人數）
 - 舒適度（例如桌椅的高度和物料）
 - 價錢
4. 帶著問題 3 的想法，學生走訪就近的家具店（或瀏覽線上的零售商），收集一些可以考慮用於咖啡閣的桌子和椅子的資料。
5. 根據收集的數據，教師可引導學生討論各款家具的價格範圍，並根據活動 1 所制定的咖啡閣初步設計，預估其家具成本，作為活動 3 的其中一項重要討論條件。

教師和學生可按學校活動室的情況及咖啡閣的要求討論相應的合理家具成本。以下是一些可能的討論結果。

- 一般能提供 15 至 30 個座位的小型咖啡閣，其家具成本約為 \$120,000 至 \$250,000。當中包含相應數量的桌椅和沙發，每件家具的參考成本如下：
 - 椅子/高腳椅：\$800 至 \$5,500/張
 - 桌子（雙人或 4 人）：\$3,000 至 \$12,000/張
 - 沙發/卡座（2 至 4 人）：\$8,000 至 \$25,000/件
 - 吧枱（6 至 10 呎）：\$30,000 至 \$80,000/張

活動 3 (請參閱工作紙 3)

在此活動中，問題聚焦於使用在活動 1 和 2 中收集的數據進行平面圖設計及家具成本的預算。通過分組匯報，學生觀摩不同的設計，並思考如何優化自己的設計。

教學建議：

1. 學生可以參考以下步驟，在圖表紙上按比例創建咖啡閣的平面圖。
 - i. 學生使用在活動 1 中的量度值，設置平面圖的大小，並在圖表紙上標註比例。
 - ii. 如有需要，學生討論是否更改放置咖啡閣內固有設備的位置（見活動 1 的問題 4）。
 - iii. 根據在活動 2A 的觀察，學生討論如何放置家具以提高咖啡閣的舒適度，並兼顧咖啡閣的運作需要。
 - iv. 根據在活動 2B 中的數據，學生決定將會使用的桌子和椅子的類型和數量。
 - v. 學生按比例地繪製一個咖啡閣的平面圖，包括入口和家具的佈局。

2. 根據在問題 1 中所設計的咖啡閣平面圖，學生需計算或估算 (a) 同一時間可容納的顧客人數、(b) 咖啡閣的通道寬度、(c) 咖啡閣的自由空間比，以及 (d) 家具的總成本。

然後，學生需評估這設計是否符合於活動 2 所提出的對於一個舒適的咖啡閣的條件。教師可以邀請學生報告他們的成果。

3. 最後，問題 3 可以作為學生的課後習作。在觀摩了同學們的咖啡閣設計後，教師可以回顧一些匯報的佳作，指出他們優勝的地方和值得進一步研究的地方，進而要求學生優化他們原有對於一個舒適的咖啡閣的條件及其設計。

參考文獻：

Yeo, K. K. J. (2015). Learning through “Designing a Café”. In N. H. Lee, & K. E. D. Ng (Eds.), *Mathematical Modelling: From Theory to Practice* (pp. 163–173). Singapore: World Scientific.

建議的教案和教學流程

活動 1

- 教學時間：約 40 分鐘或單課節

| 時間 (分鐘) | 教學目的 | 教學活動和流程 | 資源/ 備註 |
|------------|--------------|---|----------------------|
| 5 | • 引起學生興趣 | <ol style="list-style-type: none">1. 教師透過討論現實情境來引起學生的興趣。2. 教師與學生討論一些會影響咖啡閣「舒適度」的因素，以及它們與數學的相關性。 | WS 封面 WS1 Q1 |
| 20 | • 探索量化舒適度的方法 | <ol style="list-style-type: none">1. 教師引入因素 1：通道寬度，並帶領學生探索這個因素。2. 學生量度活動室內兩組桌椅之間的通道寬度，進而為咖啡閣建議一個最佳的通道寬度。3. 教師與學生討論在實地考察時，以通道寬度來量化咖啡閣或餐廳的舒適度的困難和解決方法。4. 教師引入因素 2：自由空間比，並帶領學生探索這個因素。5. 學生量度活動室的尺寸，以及當中的家具大小，從而計算它的自由空間比，進而為咖啡閣建議一個最佳的自由空間比。6. 教師與學生討論在實地考察時，以自由空間比來量化咖啡閣或餐廳的舒適度的困難和解決方法，以及其不足。 | WS1 Q2 WS1 Q3 |
| 10 | • 建立一個初步的設計 | <ol style="list-style-type: none">1. 學生初步製作咖啡閣的平面圖。2. 教師提醒學生考慮因素 1 和 2，以及其他相關的因素。 | WS1 Q4 |

| 時間 (分鐘) | 教學目的 | 教學活動和流程 | 資源/ 備註 |
|------------|----------|------------------------------------|-----------|
| 5 | • 介紹後續活動 | 1. 教師介紹活動 2A 和 2B 的安排。 2. 學生分組。 | |

活動 2A

- 活動 2A 可以考慮用作外出活動。學生走訪一些就近的咖啡閣或餐廳進行研究 (WS2 Q1-2)。教師亦可請學生通過生活觀察來收集相應的數據。

活動 2B

- 活動 2B 可以考慮用作外出活動。學生走訪就近的家具店進行研究 (WS2 Q3-5)。教師亦可請學生瀏覽線上的零售商來收集桌子、椅子及其他家具的資料。

活動 3

- 教學時間：約 80 分鐘或雙課節

| 時間 (分鐘) | 教學目的 | 教學活動和流程 | 資源/ 備註 |
|------------|-------------|--|-----------|
| 30 | • 建立一個優化的設計 | 1. 學生按比例地創建咖啡閣的平面圖。 | WS3 Q1 |
| 15 | • 制定咖啡閣家具預算 | 1. 學生計算或估算 (a) 同一時間可容納的顧客人數、(b) 咖啡閣的通道寬度、(c) 咖啡閣的自由空間比，以及 (d) 家具的總成本。 2. 學生對他們的設計進行評估。 | WS3 Q2 |
| 30 | • 展示結果 | 1. 學生展示他們的咖啡閣平面圖和預算報告。 2. 教師對學生的成果給予回饋。 | |
| 5 | • 總結活動 | 1. 教師總結這個建模活動。 2. 教師回顧一些匯報的佳作，指出他們優勝的地方，以及值得進一步研究的地方。 3. 作為課後習作，教師可以要求學生優化他們原有對於一個舒適的咖啡閣的條件及其設計。 | WS3 Q3 |