

预测歌手社交媒体粉丝数目

学习阶段： 3 或 4

学习单位： 探索与研究

〔此建模活动主要涉及：

- 代数式
- 百分法
- 等差数列与等比数列及其求和法（第四学习阶段）
- 指数函数与对数函数（第四学习阶段）〕

目标：

- (i) 加强学生对如何通过数学建模处理现实问题的认识
- (ii) 提升学生在建模中评价建模方法，作出假设和识别限制的能力
- (iii) 提升学生分析数据的能力
- (iv) 丰富学生在现实情境中应用数列、百分变化、指数函数和对数函数等概念的经验

先备知识：

- (i) 认识数列的概念
- (ii) 理解百分变化的概念
- (iii) 理解等差数列和等比数列的概念（第四学习阶段）
- (iv) 理解指数函数的性质及认识其图像的特征（第四学习阶段）

教学资源： 配有試算表應用程式及網路連線的電腦或平板電腦

背景资料：

基于数据来研究趋势在日常生活中十分重要，例如在财务和社交媒体领域。识别这些趋势有助个人和机构根据历史数据和预测结果作出明智的决定。本示例的主要目标是丰富学生的建模经验并让学生运用数学概念解决生活问题。于第三学习阶段中进行此活动，将能帮助学生理解代数式和百分变化相关概念的实际应用。如在第四学习阶段中进行此活动，则能加强学生认识等差及等比数列和指数函数相关概念的实际应用。

本示例的活动展现了如何建基数据进行数学建模。具体而言，学生需根据所提供的数据，以数学方式表达社交媒体粉丝数目趋势（即建立模型），从而预测不同歌手的社交媒体粉丝数目，以及通过探讨不同的建模方法，分析这些方法的

优点和缺点。此外，学生还会考虑所制定的模型中既有的假设和限制，促进对建模过程的深入理解。

活动详情：

这资源套件共有四个主要的活动：

- 活动 1：初步分析建模情境并进行简单的预测。
- 活动 2：探索适用于线性趋势的建模方法。
- 活动 3：(适合高中学生) 探索适用于指数趋势的建模方法。
- 活动 4：进一步探索较复杂的趋势。

备注：

1. 因应本示例主要是加强学生对线性趋势和指数趋势之建模方法的认识，因此活动 1 至 3 并未有使用现实数据。而在活动 4，教师可按学生能力，考虑以现实数据取代所提供的数据。
2. 教师可按学生能力，把活动 1 作为课前活动。

下表总结了教师可以在相应活动中与学生讨论的建模步骤及元素。

建模步骤	元素	工作紙 1	工作紙 2	工作紙 3	工作紙 4
分析现实世界问题	<ul style="list-style-type: none"> • 理解现实世界情境 • 厘清问题中的关键因素 • 识别与问题相关的数据 / 数据及问题中的数学元素 	1	1, 2, 3a, 4a, 5a, 8a	1, 2, 3a, 4a, 5a, 6a	1a, 2a
建立数学模型	<ul style="list-style-type: none"> • 提出假设以简化现实世界问题 • 以数学方式表述问题 • 确定关键量/变量之间的关系 	2ab			
求解模型以得出数学的解	<ul style="list-style-type: none"> • 应用数学知识与技能，以及不同的工具来求出模型的解 	2b	3bc, 4bc, 5bc, 8bc	3bc, 4bc, 5bc, 6bc	1b, 2b
解释数学模型的解以获得现实世界的解	<ul style="list-style-type: none"> • 考虑数学的解在现实世界问题下的意义 				
评估数学模型	<ul style="list-style-type: none"> • 按现实世界情境验证模型 • 反思模型的优点和限制 • 比较不同模型 • 提出优化模型的建议 		3d, 4d, 5d, 6, 7	3d, 4d, 5d, 7	

活动 1 (请参阅工作纸 1)

此活动初步分析建模背景，然后帮助学生通过数列的概念进行简单的预测。

教学建议：

1. 在问题 1 中，教师可以向学生介绍社交媒体的背景，并促进学生讨论影响歌手粉丝数目的因素。以下是一些可能的讨论结果。
 - 与歌手本身相关的因素，例如歌手的年龄、个人魅力、公开露面次数。
 - 与社交媒体相关的因素，例如帖文质素、发帖频率、与粉丝在社交媒体上的互动、社交媒体的演算法。
 - 其他因素，例如歌手主演的电影上画期间对粉丝数目的影响。
2. 问题 2 展示了歌手 A 和歌手 B 的社交媒体粉丝数目，并要求学生按这些数据来预测歌手 A 和歌手 B 在往后月份的社交媒体粉丝数目。学生需观察到歌手 A 的粉丝数目遵循等差数列，而歌手 B 的粉丝数目则遵循等比数列。在问题 2(a) 中，学生将讨论他们在预测时所涉及的假设。在问题 2(b) 中，学生将按歌手 A 和歌手 B 粉丝数目的规律预测下一个月的粉丝数目。但教师应强调，在这一系列活动中，主要的影响因素只聚焦于之前的粉丝数目；同时，在现实中并不一定找到稳定和明显的规律。

建议答案：

(a) 假设：

1. 主要的影响因素是之前的粉丝数目。
2. 稳定的增长模式。
3. 歌手 A 是线性增长，而歌手 B 是指数增长。

(b) 对于歌手 A，每个月的粉丝数目比前一个月多 25。

$$\begin{aligned}\text{歌手 A 在 6 月的社交媒体粉丝数目} &= 130 + 25 \\ &= 155\end{aligned}$$

对于歌手 B，每个月的粉丝数目是前一个月的 2 倍。

$$\begin{aligned}\text{歌手 B 在 6 月的社交媒体粉丝数目} &= 320 \times 2 \\ &= 640\end{aligned}$$

活动 2 (请参阅工作纸 2)

此活动旨在建立学生在线性趋势情境下的建模能力，聚焦于探索如何通过不同方法运用每月的变化值作为模型的主要参数，从而制定数学模型。

教学建议：

1. 问题 1 展示了歌手 H 的社交媒体粉丝数目的折线图。教师可以带领学生讨论如何预测 2023 年 12 月的粉丝数目。以下是一些可能的讨论结果。

1. 考虑最近两个月的变化，然后使用这个变化来预测 12 月的粉丝数目。
2. 考虑每个月之间的变化并计算平均值，然后使用该平均值来预测 12 月的粉丝数目。

2. 在问题 2 中，学生计算每个月之间粉丝数目的变化。

建议答案：

月份	变化
1 月到 2 月	<u>139</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>

月份	变化
6 月到 7 月	<u>158</u>
7 月到 8 月	<u>161</u>
8 月到 9 月	<u>166</u>
9 月到 10 月	<u>193</u>
10 月到 11 月	<u>138</u>

教师可以向学生介绍使用试算表计算这些变化的信息科技技巧，工作纸 2 中以 MS Excel 为例子。

在问题 3 至 5 和 8 中，教师将引导学生探索四种预测歌手 H 在未来的粉丝数目的可能方法。

3. 建模方法 1 只考虑最近两个月之间的变化来进行预测。在问题 3(a) 中，教师可以通过要求学生圈出用于预测的数据来检查他们对这种建模方法的理解。

建议答案：

月份	变化	月份	变化
1 月到 2 月	<u>139</u>	6 月到 7 月	<u>158</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>	7 月到 8 月	<u>161</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>	8 月到 9 月	<u>166</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>	9 月到 10 月	<u>193</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>	10 月到 11 月	<u>138</u>

在问题 3(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉丝数目。

建议答案：

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2653 + 138 = 2791$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2653 + 138 \times 2 = 2929$$

有了回答问题 3(b) 的经验，问题 3(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案：

$$2653 + 138n$$

作为这种建模方法的总结，教师可以在问题 3(d) 中带领学生讨论其优点和缺点。以下是一些可能的讨论结果。

- 优点：
 1. 这个模型易于理解。
 2. 这个模型可以反映歌手当前的受欢迎程度。
- 缺点：
 1. 这个模型忽视了包含较早月份的整体趋势。
 2. 最近两个月之间的变化可能因特殊事件而异常高或低，这可能导致高估或低估。
 3. 这个模型假设了粉丝数目是以单一规律变化。

4. 建模方法 2 考虑每个月之间的所有变化来进行预测。在问题 4(a) 中，教师可以通过要求学生圈出用于预测的数据来检查他们对这种建模方法的理解。

建议答案：

月份	变化
1 月到 2 月	<u>139</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>

月份	变化
6 月到 7 月	<u>158</u>
7 月到 8 月	<u>161</u>
8 月到 9 月	<u>166</u>
9 月到 10 月	<u>193</u>
10 月到 11 月	<u>138</u>

在问题 4(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉丝数目。

建议答案：

$$\text{平均变化} = \frac{139 + 150 + \dots + 138}{10} = 158$$

$$\text{2023 年 12 月: } 2653 + 158 = 2811$$

$$\text{2024 年 1 月: } 2653 + 158 \times 2 = 2969$$

有了回答问题 4(b) 的经验，问题 4(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案：

$$2653 + 158n$$

作为这种建模方法的总结，教师可以在问题 4(d) 中带领学生讨论其优点和缺点。以下是一些可能的讨论结果。

- 优点：
 1. 这个模型考虑了较长时间的每个月之间的变化，提供了一个对于整体趋势的更全面分析。
 2. 考虑较长的时间范围可以减低短期异常变化的影响。
- 缺点：
 1. 因为这个模型依赖较长时间的历史数据，所以可能无法完全反映歌手当前的受欢迎程度。
 2. 这个模型假设了粉丝数目是以单一规律变化。

5. 建模方法 3 只考虑月份之间的最近三个变化来进行预测。在问题 5(a) 中，教师可以通过要求学生圈出用于预测的数据来检查他们对这种建模方法的理解。

建议答案：

月份	变化
1 月到 2 月	<u>139</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>

月份	变化
6 月到 7 月	<u>158</u>
7 月到 8 月	<u>161</u>
8 月到 9 月	<u>166</u>
9 月到 10 月	<u>193</u>
10 月到 11 月	<u>138</u>

在问题 5(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉丝数目。

建议答案：

$$\text{平均变化} = \frac{166+193+138}{3} = 166$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2653 + 166 = 2819$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2653 + 166 \times 2 = 2985$$

有了回答问题 5(b) 的经验，问题 5(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案：

$$2653 + 166n$$

作为这种建模方法的总结，教师可以在问题 5(d) 中带领学生讨论其优点和缺点。以下是一些可能的讨论结果。

- 优点：
 1. 考虑最近的变化可以反映歌手当前的受欢迎程度。
 2. 考虑四个月时间范围的平均变化可以减低短期异常变化的影响。
- 缺点：
 1. 考虑最近三个变化的理由不明确。
 2. 这个模型假设了粉丝数目是以单一规律变化。

6. 在讨论以上三种建模方法后，教师可以带领学生讨论所制定模型的共同假设和限制。以下是一些可能的讨论结果。
- 假设：这些模型假设粉丝数目以单一规律变化并遵循线性模式。
 - 限制：这些模型未考虑一些重要因素，例如歌手的发帖频率和公开露面情况。

在问题 7 和 8 中，教师将引导学生在建模过程中纳入「权」的概念。

7. 教师可以从「权」的角度回顾建模方法 1 和 2。
- 模型 1 只考虑最近两个月（即 2023 年 10 月和 11 月）之间的变化。因此，这一个变化的权设定为 1，而其他所有变化的权则定为 0。
 - 模型 2 考虑了每个月之间的所有变化（即从 1 月到 2 月、2 月到 3 月、...以及从 10 月到 11 月）。因此，所有变化的权都定为 1。

教师可以通过要求学生为建模方法 3 的情况设定权来检查他们对这方法的理解，当中的模型 3 只考虑月份之间的最近三个变化（即从 8 月到 9 月、9 月到 10 月，以及 10 月到 11 月）。

建议答案：

月份	变化	权
1 月到 2 月	139	<u>0</u>
2 月到 3 月	150	<u>0</u>
3 月到 4 月	143	<u>0</u>
4 月到 5 月	168	<u>0</u>
5 月到 6 月	166	<u>0</u>

月份	变化	权
6 月到 7 月	158	<u>0</u>
7 月到 8 月	161	<u>0</u>
8 月到 9 月	166	<u>1</u>
9 月到 10 月	193	<u>1</u>
10 月到 11 月	138	<u>1</u>

8. 建模方法 4 考虑各个月份之间变化的权。它计算这些变化的加权平均值，以获得每月的加权平均变化。在问题 8(a) 中，教师可以带领学生讨论这些变化的权和他们的解释。以下是一些可能的讨论结果。

月份	变化	权
1 月到 2 月	139	<u>0</u>
2 月到 3 月	150	<u>0</u>
3 月到 4 月	143	<u>0</u>
4 月到 5 月	168	<u>0</u>
5 月到 6 月	166	<u>0</u>

月份	变化	权
6 月到 7 月	158	<u>0</u>
7 月到 8 月	161	<u>0</u>
8 月到 9 月	166	<u>1</u>
9 月到 10 月	193	<u>2</u>
10 月到 11 月	138	<u>3</u>

解释：

- 为了反映较近期数据对预测的影响程度，最近的变化设定为最高的权 3。
- 第二和第三最近的变化分别设定为权 2 和 1，这表明它们的影响程度较低。
- 这些月份以外的变化设定为权 0，因为它们被视作不再相关。

在问题 8(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉丝数目。
建议答案（基于以上的结果）：

$$\text{平均变化} = \frac{166 \times 1 + 193 \times 2 + 138 \times 3}{1 + 2 + 3} = 161$$

$$\text{2023 年 12 月： } 2653 + 161 = 2814$$

$$\text{2024 年 1 月： } 2653 + 161 \times 2 = 2975$$

有了回答问题 8(b) 的经验，问题 8(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案（基于以上的结果）：

$$2653 + 161n$$

活动 3 (请参阅工作纸 3)

此活动与活动 2 相似，但这涉及分析指数趋势。问题聚焦于探索如何通过不同方法运用每月的百分变化来判定模型主要参数的值，从而制定数学模型。

考虑到学生可运用的数学工具，教学建议中使用算术平均数。然而，需要注意的是从数学角度来看，几何平均数比算术平均数可取，尽管在这活动中它们的差异不大。根据校情和学生能力，教师可以决定在建模中使用哪个平均数。

$$\text{算术平均数} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\text{加权算术平均数} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

$$\text{几何平均数} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \quad (\text{注})$$

$$\text{加权几何平均数} = \sqrt{(w_1+w_2+\cdots+w_n)}{x_1^{w_1} \times x_2^{w_2} \times \cdots \times x_n^{w_n}} \quad (\text{注})$$

(注：增润内容，非高中数学课程学习内容)

教学建议：

1. 问题 1 展示了歌手 K 的社交媒体粉丝数目的折线图。教师可以带领学生讨论在活动 2 中制定的模型是否适用在这里进行预测。以下是一些可能的讨论结果。
 - 有别于活动 2 的数据，歌手 K 的粉丝数目的每月变化值明显不一。而且，该图显示粉丝数目的增长呈加速趋势。考虑到这一个非线性的趋势，模型 1 至 3 可能不适合用以进行预测。
2. 在问题 2 中，学生计算每个月之间粉丝数目的百分变化。

建议答案：

月份	百分变化
1 月到 2 月	<u>20.13%</u>
2 月到 3 月	<u>21.20%</u>
3 月到 4 月	<u>20.95%</u>
4 月到 5 月	<u>21.43%</u>
5 月到 6 月	<u>20.88%</u>

月份	百分变化
6 月到 7 月	<u>21.29%</u>
7 月到 8 月	<u>21.66%</u>
8 月到 9 月	<u>21.52%</u>
9 月到 10 月	<u>21.57%</u>
10 月到 11 月	<u>21.93%</u>

教师可以向学生介绍使用试算表计算这些百分变化的信息科技技巧，工作纸 3 中以 MS Excel 为例子。

在问题 3 至 6 中，教师将引导学生探索四种预测歌手 K 在未来的粉丝数目的可能方法。

3. 与建模方法 1 相似，建模方法 5 只考虑最近两个月之间的百分变化来进行预测。在问题 3(a) 中，教师可以通过要求学生圈出用于预测的数据来检查他们对这种建模方法的理解。

建议答案：

月份	百分变化	月份	百分变化
1 月到 2 月	<u>20.13%</u>	6 月到 7 月	<u>21.29%</u>
2 月到 3 月	<u>21.20%</u>	7 月到 8 月	<u>21.66%</u>
3 月到 4 月	<u>20.95%</u>	8 月到 9 月	<u>21.52%</u>
4 月到 5 月	<u>21.43%</u>	9 月到 10 月	<u>21.57%</u>
5 月到 6 月	<u>20.88%</u>	10 月到 11 月	<u>21.93%</u>

在问题 3(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉丝数目。

建议答案：

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.93\%) = 2664$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.93\%)^2 = 3248$$

有了回答问题 3(b) 的经验，问题 3(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案：

$$2185(1 + 21.93\%)^n$$

作为这种建模方法的总结，教师可以在问题 3(d) 中带领学生讨论其优点和缺点。以下是一些可能的讨论结果。

- 优点：
 1. 这个模型易于理解。
 2. 这个模型可以反映歌手当前的受欢迎程度。
- 缺点：
 1. 这个模型忽视了包含较早月份的整体趋势。
 2. 最近两个月之间的百分变化可能因特殊事件而异常高或低，这可能导致高估或低估。
 3. 这个模型假设了粉丝数目是以单一规律变化。

4. 与建模方法 2 相似，建模方法 6 考虑每个月之间的所有百分变化来进行预测。在问题 4(a) 中，教师可以通过要求学生圈出用于预测的数据来检查他们对这种建模方法的理解。

建议答案：

月份	百分变化	月份	百分变化
1 月到 2 月	20.13%	6 月到 7 月	21.29%
2 月到 3 月	21.20%	7 月到 8 月	21.66%
3 月到 4 月	20.95%	8 月到 9 月	21.52%
4 月到 5 月	21.43%	9 月到 10 月	21.57%
5 月到 6 月	20.88%	10 月到 11 月	21.93%

在问题 4(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉丝数目。

建议答案：

$$\text{平均百分变化} = \frac{20.13\% + 21.20\% + \dots + 21.93\%}{10} = 21.26\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.26\%) = 2650$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.26\%)^2 = 3213$$

有了回答问题 4(b) 的经验，问题 4(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案：

$$2185(1 + 21.26\%)^n$$

作为这种建模方法的总结，教师可以在问题 4(d) 中带领学生讨论其优点和缺点。以下是一些可能的讨论结果。

- 优点：
 1. 这个模型考虑了较长时间的每个月之间的百分变化，提供了一个对于整体趋势的更全面的分析。
 2. 考虑较长的时间范围可以减低短期异常变化的影响。
- 缺点：
 1. 因为这个模型依赖较长时间的历史数据，所以可能无法完全反映歌手当前的受欢迎程度。
 2. 这个模型假设了粉丝数目是以单一规律变化。

5. 与建模方法 3 相似，建模方法 7 只考虑月份之间的最近三个百分变化来进行预测。在问题 5(a) 中，教师可以通过要求学生圈出用于预测的数据来检查他们对这种建模方法的理解。

建议答案：

月份	百分变化	月份	百分变化
1 月到 2 月	<u>20.13%</u>	6 月到 7 月	<u>21.29%</u>
2 月到 3 月	<u>21.20%</u>	7 月到 8 月	<u>21.66%</u>
3 月到 4 月	<u>20.95%</u>	8 月到 9 月	<u>21.52%</u>
4 月到 5 月	<u>21.43%</u>	9 月到 10 月	<u>21.57%</u>
5 月到 6 月	<u>20.88%</u>	10 月到 11 月	<u>21.93%</u>

在问题 5(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉丝数目。

建议答案：

$$\text{平均百分变化} = \frac{21.52\% + 21.57\% + 21.93\%}{3} = 21.67\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.67\%) = 2658$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.67\%)^2 = 3235$$

有了回答问题 5(b) 的经验，问题 5(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案：

$$2185(1 + 21.67\%)^n$$

作为这种建模方法的总结，教师可以在问题 5(d) 中带领学生讨论其优点和缺点。以下是一些可能的讨论结果。

- 优点：
 1. 考虑最近的百分变化可以反映歌手当前的受欢迎程度。
 2. 考虑四个月时间范围的平均百分变化可以减低短期异常变化的影响。
- 缺点：
 1. 考虑最近三个月的百分变化的理由不明确。
 2. 这个模型假设了粉丝数目是以单一规律变化。

6. 与建模方法 4 相似，建模方法 8 考虑了各个月份之间百分变化的权。它计算这些百分变化的加权平均值，以获得每月的加权平均百分变化。在问题 6(a) 中，教师可以带领学生讨论这些百分变化的权和他们的解释。以下是一些可能的讨论结果。

月份	百分变化	权
1 月到 2 月	20.13%	<u>0</u>
2 月到 3 月	21.20%	<u>0</u>
3 月到 4 月	20.95%	<u>0</u>
4 月到 5 月	21.43%	<u>0</u>
5 月到 6 月	20.88%	<u>0</u>

月份	百分变化	权
6 月到 7 月	21.29%	<u>0</u>
7 月到 8 月	21.66%	<u>0</u>
8 月到 9 月	21.52%	<u>1</u>
9 月到 10 月	21.57%	<u>2</u>
10 月到 11 月	21.93%	<u>3</u>

解释：

- 为了反映较近期数据对预测的影响程度，最近的百分变化设定为最高的权 3。
- 第二和第三最近的百分变化分别设定为权 2 和 1，这表明它们的影响程度较低。
- 这些月份以外的百分变化设定为权 0，因为它们被视作不再相关。

在问题 6(b) 中，学生预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉丝数目。
建议答案（基于以上的结果）：

$$\text{平均百分变化} = \frac{21.52\% \times 1 + 21.57\% \times 2 + 21.93\% \times 3}{1 + 2 + 3} = 21.74\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月： } 2185(1 + 21.74\%) = 2660$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月： } 2185(1 + 21.74\%)^2 = 3238$$

有了回答问题 6(b) 的经验，问题 6(c) 进一步要求学生制定数学模型，以数学方式表达 2023 年 11 月之后第 n 个月的粉丝预测数目。

建议答案（基于以上的结果）：

$$2185(1 + 21.74\%)^n$$

7. 在活动 3 的尾声，教师可以带领学生讨论所制定模型的共同假设和限制。以下是一些可能的讨论结果。
- 假设：这些模型假设粉丝数目以单一规律变化并遵循指数趋势。
 - 限制：这些模型未考虑一些重要因素，例如歌手的发帖频率和公开露面。

活动 4 (请参阅工作纸 4)

此活动涉及分析较复杂的趋势，让学生有机会应用在先前活动中所学得的知识。教师应鼓励学生以不同的策略进行建模及预测结果。由于建模问题并没有标准答案，活动重点应落在学生能否观察出规律，进而按其观察提出相应的假设及模型，并分析建模过程是否合理。

教学建议：

1. 问题 1 展示了歌手 G 的社交媒体粉丝数目的折线图。在问题 1(a) 中，教师可以鼓励学生提出他们对该趋势的观察。由此，教师可以在问题 1(b) 中带领学生讨论建模的假设，以及预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 G 的粉丝数目。以下是一些可能的讨论结果。

- (a) 观察：歌手 G 的粉丝数目每经历三个月差异不大的小幅增长后，便会出现一次显著增长。
- (b) 假设：这个趋势遵循过去所观察到的规律，以及较近期的数据有较高的重要性（权）。

考虑：

$$3 \text{ 月到 } 4 \text{ 月的变化} = 1469 - 933 = 536$$

$$6 \text{ 月到 } 7 \text{ 月的变化} = 2289 - 1521 = 768$$

$$9 \text{ 月到 } 10 \text{ 月的变化} = 3089 - 2449 = 640$$

$$10 \text{ 月到 } 11 \text{ 月的变化} = 3185 - 3089 = 96$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月} : 3185 + 96 = 3281$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月} : 3281 + \frac{536 \times 1 + 768 \times 2 + 640 \times 3}{1 + 2 + 3} = 3946$$

2. 与问题 1 相似，问题 2 展示了歌手 Q 的社交媒体粉丝数目的折线图。在问题 2(a) 中，教师可以鼓励学生提出他们对该趋势的观察。由此，教师可以在问题 2(b) 中带领学生讨论建模的假设，以及预测 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 Q 的粉丝数目。以下是一些可能的讨论结果。

- (a) 观察：从 1 月到 8 月之间，歌手 Q 的粉丝数目呈现下跌的趋势，但没有展示明确的规律。但从 8 月开始，粉丝数目以指数趋势下跌。
- (b) 假设：由于从 1 月到 8 月之间的变化没有展示明确的规律，故在制定模型时，先把这些数据剔除，再假设粉丝数目会继续沿 8 月后的规律持续下降。

考虑：

$$8 \text{ 月到 } 9 \text{ 月的百分变化} = \frac{1571-1785}{1785} \times 100\% = -12.0\%$$

$$9 \text{ 月到 } 10 \text{ 月的百分变化} = \frac{1382-1571}{1571} \times 100\% = -12.0\%$$

$$10 \text{ 月到 } 11 \text{ 月百分的变化} = \frac{1216-1382}{1382} \times 100\% = -12.0\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月： } 1216(1 - 12.0\%) = 1070$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月： } 1216(1 - 12.0\%)^2 = 942$$

总结：

整体而言，学生接触了多个的建模方法，它们可以用作预测未来的趋势。在结束这项活动时，教师可以：

- 总结和比较这些建模方法；
- 提醒学生在数学建模中可能存在一些假设和局限；及
- 指出不同的模型可能各有其优点和缺点。我们必须不断评估和改进它们，并使用更多的现实数据进行比较。

建议的教案和教学流程

活动 1 和 2

- 教学时间：约 80 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
15	<ul style="list-style-type: none"> • 引起学生兴趣 • 建立研究趋势的背景 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师透过讨论现实情境来引起学生的兴趣。 2. 教师利用 Q1 向学生介绍预测社交媒体粉丝数目的背景，同时鼓励学生讨论影响这数目的因素。 3. 教师利用 Q2 作为热身练习，让学生回顾关于数列的概念。 4. 教师强调，在这一系列活动中，主要的影响因素只聚焦于之前的粉丝数目。 	WS 封面 WS1 Q1-2
10	<ul style="list-style-type: none"> • 研究线性的趋势 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师利用 Q1 展示线性的趋势。 2. 学生分组讨论作出预测的方法。 3. 学生需要在 Q2 计算每个月之间粉丝数目的变化。 4. 教师可要求学生把数据输入到试算表，然后介绍使用试算表计算这些变化的技巧。 	WS2 Q1-2
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立数学模型 • 评价数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师向学生介绍建模方法 1，并透过 Q3(a) 检视他们的理解。 2. 学生需要在 Q3(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q3(c) 导出以 n 表示的模型 1。 3. 学生分组讨论模型 1 的优点和缺点。 	WS2 Q3(a)–(c) WS2 Q3(d)

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	<ul style="list-style-type: none"> 建立数学模型 评价数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 教师向学生介绍建模方法 2，并透过 Q4(a) 检视他们的理解。 学生需要在 Q4(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q4(c) 导出以 n 表示的模型 2。 学生分组讨论模型 2 的优点和缺点。 	<p>WS2 Q4(a)–(c)</p> <p>WS2 Q4(d)</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> 建立数学模型 评价数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 教师向学生介绍建模方法 3，并透过 Q5(a) 检视他们的理解。 学生需要在 Q5(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q5(c) 导出以 n 表示的模型 3。 学生分组讨论模型 3 的优点和缺点。 	<p>WS2 Q5(a)–(c)</p> <p>WS2 Q5(d)</p>
5	<ul style="list-style-type: none"> 提升在建模过程中作出假设和识别局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 学生分组讨论这些模型的共同假设和限制。教师可运用以下问题来激发思考：粉丝数目的变化是否必然固定？这些模型所考虑的因素是否全面？ 	WS2 Q6
15	<ul style="list-style-type: none"> 建立数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 教师从「权」的角度回顾建模方法 1 和 2。 教师通过要求学生为建模方法 3 的情况设定权来检查他们的理解。 教师向学生介绍建模方法 4。学生在 Q8(a) 分组讨论当中所涉及的权和他们的解释。 学生需要在 Q8(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q8(c) 导出以 n 表示的模型 4。 	WS2 Q7–8

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
5	• 总结活动 1 和 2	1. 教师总结活动 1 和 2 所涉及的建模技巧。	

活动 3 和 4

- 教学时间：约 80 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	• 研究指数增长的趋势	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师利用 Q1 展示指数增长的趋势。 2. 学生分组讨论使用模型 1 至 3 作出预测是否合适。 3. 学生需要在 Q2 计算每个月之间粉丝数目的百分变化。 4. 教师可要求学生把数据输入到试算表，然后介绍使用试算表计算这些百分变化的技巧。 	WS3 Q1-2
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立数学模型 • 评价数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师向学生介绍建模方法 5，并透过 Q3(a) 检视他们的理解。 2. 学生需要在 Q3(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q3(c) 导出以 n 表示的模型 5。 3. 学生分组讨论模型 5 的优点和缺点。 	WS3 Q3(a)-(c) WS3 Q3(d)
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立数学模型 • 评价数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师向学生介绍建模方法 6，并透过 Q4(a) 检视他们的理解。 2. 学生需要在 Q4(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q4(c) 导出以 n 表示的模型 6。 3. 学生分组讨论模型 6 的优点和缺点。 	WS3 Q4(a)-(c) WS3 Q4(d)

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	<ul style="list-style-type: none"> 建立数学模型 评价数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 教师向学生介绍建模方法 7，并透过 Q5(a) 检视他们的理解。 学生需要在 Q5(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q5(c) 导出以 n 表示的模型 7。 学生分组讨论模型 7 的优点和缺点。 	<p>WS3 Q5(a)–(c)</p> <p>WS3 Q5(d)</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> 建立数学模型 	<ol style="list-style-type: none"> 教师向学生介绍建模方法 8。学生在 Q6(a) 分组讨论当中所涉及的权和他们的解释。 学生需要在 Q6(b) 预测之后两个月的数目，这帮助他们在 Q6(c) 导出以 n 表示的模型 8。 	WS3 Q6
5	<ul style="list-style-type: none"> 提升在建模过程中作出假设和识别局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 学生分组讨论这些模型的共同假设和限制。教师可运用以下问题来激发思考：粉丝数目的百分变化是否必然固定？这些模型所考虑的因素是否全面？ 	WS3 Q7
20	<ul style="list-style-type: none"> 探索较复杂的趋势 	<ol style="list-style-type: none"> 教师利用 Q1 展示一个非线性的趋势，并鼓励学生提出他们的观察。 教师带领学生讨论建模的假设，以及预测粉丝数目。 同样地，教师利用 Q2 展示一个更复杂的趋势，并鼓励学生提出他们的观察。 教师带领学生讨论建模的假设，以及预测粉丝数目。 	<p>WS4 Q1</p> <p>WS4 Q2</p>

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
5	<ul style="list-style-type: none"> • 总结整个活动 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师回顾数学模型的概念，它可以帮助我们进行预测。 2. 教师总结和比较在这一系列活动中的建模方法。 3. 教师提醒学生在数学建模中可能存在一些假设和局限。 4. 教师进一步指出不同的模型可能各有其优点和缺点。我们必须不断评估和改进它们，并使用更多的现实数据。 	