

預測歌手社交媒體粉絲數目

學習階段： 3 或 4

學習單位： 探索與研究

〔此建模活動主要涉及：

- 代數式
- 百分法
- 等差數列與等比數列及其求和法（第四學習階段）
- 指數函數與對數函數（第四學習階段）〕

目標：

- (i) 加強學生認識如何通過數學建模處理現實問題
- (ii) 提升學生在建模中評價建模方法，作出假設和識別限制的能力
- (iii) 提升學生分析數據的能力
- (iv) 豐富學生在現實情境中應用數列、百分變化、指數函數和對數函數等概念的經驗

先備知識：

- (i) 認識數列的概念
- (ii) 理解百分變化的概念
- (iii) 理解等差數列和等比數列的概念（第四學習階段）
- (iv) 理解指數函數的性質及認識其圖像的特徵（第四學習階段）

教學資源： 配有試算表應用程式及網路連線的電腦或平板電腦

背景資料：

基於數據來研究趨勢在日常生活中十分重要，例如在財務和社交媒體領域。識別這些趨勢有助個人和機構根據歷史數據和預測結果作出明智的決定。本示例的主要目標是豐富學生的建模經驗並讓學生運用數學概念解決生活問題。於第三學習階段中進行此活動，將能幫助學生理解代數式和百分變化相關概念的實際應用。如在第四學習階段中進行此活動，則能加強學生認識等差及等比數列和指數函數相關概念的實際應用。

本示例的活動展現了如何建基數據進行數學建模。具體而言，學生需根據所提供的數據，以數學方式表達社交媒體粉絲數目趨勢（即建立模型），從而預測不同歌手的社交媒體粉絲數目，以及通過探討不同的建模方法，分析這些方法的

優點和缺點。此外，學生還會考慮所制定的模型中既有的假設和限制，促進對建模過程的深入理解。

活動詳情：

這資源套件共有四個主要的活動：

- 活動 1：初步分析建模情境並進行簡單的預測。
- 活動 2：探索適用於線性趨勢的建模方法。
- 活動 3：（適合高中學生）探索適用於指數趨勢的建模方法。
- 活動 4：進一步探索較複雜的趨勢。

備註：

1. 因應本示例主要是加強學生對線性趨勢和指數趨勢之建模方法的認識，因此活動 1 至 3 並未有使用現實數據。而在活動 4，教師可按學生能力，考慮以現實數據取代所提供的數據。
2. 教師可按學生能力，把活動 1 作為課前活動。

下表總結了教師可以在相應活動中與學生討論的建模步驟及元素。

建模步驟	元素	工作紙 1	工作紙 2	工作紙 3	工作紙 4
分析現實世界問題	<ul style="list-style-type: none"> • 理解現實世界情境 • 釐清問題中的關鍵因素 • 識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素 	1	1, 2, 3a, 4a, 5a, 8a	1, 2, 3a, 4a, 5a, 6a	1a, 2a
建立數學模型	<ul style="list-style-type: none"> • 提出假設以簡化現實世界問題 • 以數學方式表述問題 • 確定關鍵量/變數之間的關係 	2ab			
求解模型以得出數學的解	<ul style="list-style-type: none"> • 應用數學知識與技能，以及不同的工具來求出模型的解 	2b	3bc, 4bc, 5bc, 8bc	3bc, 4bc, 5bc, 6bc	1b, 2b
解釋數學的解以獲得現實世界的解	<ul style="list-style-type: none"> • 考慮數學的解在現實世界問題情境下的意義 				
評估數學模型	<ul style="list-style-type: none"> • 按現實世界情境驗證模型 • 反思模型的優點和限制 • 比較不同模型 • 提出優化模型的建議 		3d, 4d, 5d, 6, 7	3d, 4d, 5d, 7	

活動 1 (請參閱工作紙 1)

此活動初步分析建模背景，然後幫助學生通過數列的概念進行簡單的預測。

教學建議：

1. 在問題 1 中，教師可以向學生介紹社交媒體的背景，並促進學生討論影響歌手粉絲數目的因素。以下是一些可能的討論結果。
 - 與歌手本身相關的因素，例如歌手的年齡、個人魅力、公開露面次數。
 - 與社交媒體相關的因素，例如帖文質素、發帖頻率、與粉絲在社交媒體上的互動、社交媒體的演算法。
 - 其他因素，例如歌手主演的電影上畫期間對粉絲數目的影響。
2. 問題 2 展示了歌手 A 和歌手 B 的社交媒體粉絲數目，並要求學生按這些數據來預測歌手 A 和歌手 B 在往後月份的社交媒體粉絲數目。學生需觀察到歌手 A 的粉絲數目遵循等差數列，而歌手 B 的粉絲數目則遵循等比數列。在問題 2(a) 中，學生將討論他們在預測時所涉及的假設。在問題 2(b) 中，學生將按歌手 A 和歌手 B 粉絲數目的規律預測下一個月的粉絲數目。但教師應強調，在這一系列活動中，主要的影響因素只聚焦於之前的粉絲數目；同時，在現實中並不一定找到穩定和明顯的規律。

建議答案：

(a) 假設：

1. 主要的影響因素是之前的粉絲數目。
2. 穩定的增長模式。
3. 歌手 A 是線性增長，而歌手 B 是指數增長。

(b) 對於歌手 A，每個月的粉絲數目比前一個月多 25。

$$\begin{aligned}\text{歌手 A 在 6 月的社交媒體粉絲數目} &= 130 + 25 \\ &= 155\end{aligned}$$

對於歌手 B，每個月的粉絲數目是前一個月的 2 倍。

$$\begin{aligned}\text{歌手 B 在 6 月的社交媒體粉絲數目} &= 320 \times 2 \\ &= 640\end{aligned}$$

活動 2 (請參閱工作紙 2)

此活動旨在建立學生在線性趨勢情境下的建模能力，聚焦於探索如何通過不同方法運用每月的變化值作為模型的主要參數，從而制定數學模型。

教學建議：

- 問題 1 展示了歌手 H 的社交媒體粉絲數目的折線圖。教師可以帶領學生討論如何預測 2023 年 12 月的粉絲數目。以下是一些可能的討論結果。
 - 考慮最近兩個月的變化，然後使用這個變化來預測 12 月的粉絲數目。
 - 考慮每個月之間的變化並計算平均值，然後使用該平均值來預測 12 月的粉絲數目。
- 在問題 2 中，學生計算每個月之間粉絲數目的變化。

建議答案：

月份	變化
1 月到 2 月	<u>139</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>

月份	變化
6 月到 7 月	<u>158</u>
7 月到 8 月	<u>161</u>
8 月到 9 月	<u>166</u>
9 月到 10 月	<u>193</u>
10 月到 11 月	<u>138</u>

教師可以向學生介紹使用試算表計算這些變化的資訊科技技巧，工作紙 2 中以 MS Excel 為例子。

在問題 3 至 5 和 8 中，教師將引導學生探索四種預測歌手 H 在未來的粉絲數目的可能方法。

3. 建模方法 1 只考慮最近兩個月之間的變化來進行預測。在問題 3(a) 中，教師可以通過要求學生圈出用於預測的數據來檢查他們對這種建模方法的理解。

建議答案：

月份	變化
1 月到 2 月	<u>139</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>

月份	變化
6 月到 7 月	<u>158</u>
7 月到 8 月	<u>161</u>
8 月到 9 月	<u>166</u>
9 月到 10 月	<u>193</u>
10 月到 11 月	<u>138</u>

在問題 3(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉絲數目。

建議答案：

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2653 + 138 = 2791$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2653 + 138 \times 2 = 2929$$

有了回答問題 3(b) 的經驗，問題 3(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案：

$$2653 + 138n$$

作為這種建模方法的總結，教師可以在問題 3(d) 中帶領學生討論其優點和缺點。以下是一些可能的討論結果。

- 優點：
 1. 這個模型易於理解。
 2. 這個模型可以反映歌手當前的受歡迎程度。
- 缺點：
 1. 這個模型忽視了包含較早月份的整體趨勢。
 2. 最近兩個月之間的變化可能因特殊事件而異常高或低，這可能導致高估或低估。
 3. 這個模型假設了粉絲數目是以單一規律變化。

4. 建模方法 2 考慮每個月之間的所有變化來進行預測。在問題 4(a) 中，教師可以通過要求學生圈出用於預測的數據來檢查他們對這種建模方法的理解。

建議答案：

月份	變化
1 月到 2 月	139
2 月到 3 月	150
3 月到 4 月	143
4 月到 5 月	168
5 月到 6 月	166

月份	變化
6 月到 7 月	158
7 月到 8 月	161
8 月到 9 月	166
9 月到 10 月	193
10 月到 11 月	138

在問題 4(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉絲數目。

建議答案：

$$\text{平均變化} = \frac{139 + 150 + \dots + 138}{10} = 158$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2653 + 158 = 2811$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2653 + 158 \times 2 = 2969$$

有了回答問題 4(b) 的經驗，問題 4(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案：

$$2653 + 158n$$

作為這種建模方法的總結，教師可以在問題 4(d) 中帶領學生討論其優點和缺點。以下是一些可能的討論結果。

- 優點：
 1. 這個模型考慮了較長時間的每個月之間的變化，提供了一個對於整體趨勢的更全面分析。
 2. 考慮較長的時間範圍可以減低短期異常變化的影響。
- 缺點：
 1. 因為這個模型依賴較長時間的歷史數據，所以可能無法完全反映歌手當前的受歡迎程度。
 2. 這個模型假設了粉絲數目是以單一規律變化。

5. 建模方法 3 只考慮月份之間的最近三個變化來進行預測。在問題 5(a) 中，教師可以通過要求學生圈出用於預測的數據來檢查他們對這種建模方法的理解。

建議答案：

月份	變化
1 月到 2 月	<u>139</u>
2 月到 3 月	<u>150</u>
3 月到 4 月	<u>143</u>
4 月到 5 月	<u>168</u>
5 月到 6 月	<u>166</u>

月份	變化
6 月到 7 月	<u>158</u>
7 月到 8 月	<u>161</u>
8 月到 9 月	<u>166</u>
9 月到 10 月	<u>193</u>
10 月到 11 月	<u>138</u>

在問題 5(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉絲數目。

建議答案：

$$\text{平均變化} = \frac{166 + 193 + 138}{3} = 166$$

$$\text{2023 年 12 月： } 2653 + 166 = 2819$$

$$\text{2024 年 1 月： } 2653 + 166 \times 2 = 2985$$

有了回答問題 5(b) 的經驗，問題 5(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案：

$$2653 + 166n$$

作為這種建模方法的總結，教師可以在問題 5(d) 中帶領學生討論其優點和缺點。以下是一些可能的討論結果。

- 優點：
 1. 考慮最近的變化可以反映歌手當前的受歡迎程度。
 2. 考慮四個月時間範圍的平均變化可以減低短期異常變化的影響。
- 缺點：
 1. 考慮最近三個變化的理由不明確。
 2. 這個模型假設了粉絲數目是以單一規律變化。

6. 在討論以上三種建模方法後，教師可以帶領學生討論所制定模型的共同假設和限制。以下是一些可能的討論結果。
- 假設：這些模型假設粉絲數目以單一規律變化並遵循線性模式。
 - 限制：這些模型未考慮一些重要因素，例如歌手的發帖頻率和公開露面情況。

在問題 7 和 8 中，教師將引導學生在建模過程中納入「權」的概念。

7. 教師可以從「權」的角度回顧建模方法 1 和 2。
- 模型 1 只考慮最近兩個月（即 2023 年 10 月和 11 月）之間的變化。因此，這一個變化的權設定為 1，而其他所有變化的權則定為 0。
 - 模型 2 考慮了每個月之間的所有變化（即從 1 月到 2 月、2 月到 3 月、…以及從 10 月到 11 月）。因此，所有變化的權都定為 1。

教師可以通過要求學生為建模方法 3 的情況設定權來檢查他們對這方法的理解，當中的模型 3 只考慮月份之間的最近三個變化（即從 8 月到 9 月、9 月到 10 月，以及 10 月到 11 月）。

建議答案：

月份	變化	權
1 月到 2 月	139	<u>0</u>
2 月到 3 月	150	<u>0</u>
3 月到 4 月	143	<u>0</u>
4 月到 5 月	168	<u>0</u>
5 月到 6 月	166	<u>0</u>

月份	變化	權
6 月到 7 月	158	<u>0</u>
7 月到 8 月	161	<u>0</u>
8 月到 9 月	166	<u>1</u>
9 月到 10 月	193	<u>1</u>
10 月到 11 月	138	<u>1</u>

8. 建模方法 4 考慮各個月份之間變化的權。它計算這些變化的加權平均值，以獲得每月的加權平均變化。在問題 8(a) 中，教師可以帶領學生討論這些變化的權和他們的解釋。以下是一些可能的討論結果。

月份	變化	權
1 月到 2 月	139	<u>0</u>
2 月到 3 月	150	<u>0</u>
3 月到 4 月	143	<u>0</u>
4 月到 5 月	168	<u>0</u>
5 月到 6 月	166	<u>0</u>

月份	變化	權
6 月到 7 月	158	<u>0</u>
7 月到 8 月	161	<u>0</u>
8 月到 9 月	166	<u>1</u>
9 月到 10 月	193	<u>2</u>
10 月到 11 月	138	<u>3</u>

解釋：

- 為了反映較近期數據對預測的影響程度，最近的變化設定為最高的權 3。
- 第二和第三最近的變化分別設定為權 2 和 1，這表明它們的影響程度較低。
- 這些月份以外的變化設定為權 0，因為它們被視作不再相關。

在問題 8(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 H 的粉絲數目。
建議答案（基於以上的結果）：

$$\text{平均變化} = \frac{166 \times 1 + 193 \times 2 + 138 \times 3}{1 + 2 + 3} = 161$$

$$\text{2023 年 12 月： } 2653 + 161 = 2814$$

$$\text{2024 年 1 月： } 2653 + 161 \times 2 = 2975$$

有了回答問題 8(b) 的經驗，問題 8(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案（基於以上的結果）：

$$2653 + 161n$$

活動 3 (請參閱工作紙 3)

此活動與活動 2 相似，但這涉及分析指數趨勢。問題聚焦於探索如何通過不同方法運用每月的百分變化來判定模型主要參數的值，從而制定數學模型。

考慮到學生可運用的數學工具，教學建議中使用算術平均數。然而，需要注意的是從數學角度來看，幾何平均數比算術平均數可取，儘管在這活動中它們的差異不大。根據校情和學生能力，教師可以決定在建模中使用哪個平均數。

$$\text{算術平均數} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\text{加權算術平均數} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

$$\text{幾何平均數} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \quad (\text{註})$$

$$\text{加權幾何平均數} = \sqrt{(w_1+w_2+\cdots+w_n)}{x_1^{w_1} \times x_2^{w_2} \times \cdots \times x_n^{w_n}} \quad (\text{註})$$

(註：增潤內容，非高中數學課程學習內容)

教學建議：

1. 問題 1 展示了歌手 K 的社交媒體粉絲數目的折線圖。教師可以帶領學生討論在活動 2 中制定的模型是否適用在這裏進行預測。以下是一些可能的討論結果。
 - 有別於活動 2 的數據，歌手 K 的粉絲數目的每月變化值明顯不一。而且，該圖顯示粉絲數目的增長呈加速趨勢。考慮到這一個非線性的趨勢，模型 1 至 3 可能不適合用以進行預測。
2. 在問題 2 中，學生計算每個月之間粉絲數目的百分變化。

建議答案：

月份	百分變化
1 月到 2 月	<u>20.13%</u>
2 月到 3 月	<u>21.20%</u>
3 月到 4 月	<u>20.95%</u>
4 月到 5 月	<u>21.43%</u>
5 月到 6 月	<u>20.88%</u>

月份	百分變化
6 月到 7 月	<u>21.29%</u>
7 月到 8 月	<u>21.66%</u>
8 月到 9 月	<u>21.52%</u>
9 月到 10 月	<u>21.57%</u>
10 月到 11 月	<u>21.93%</u>

教師可以向學生介紹使用試算表計算這些百分變化的資訊科技技巧，工作紙 3 中以 MS Excel 為例子。

在問題 3 至 6 中，教師將引導學生探索四種預測歌手 K 在未來的粉絲數目的可能方法。

3. 與建模方法 1 相似，建模方法 5 只考慮最近兩個月之間的百分變化來進行預測。在問題 3(a) 中，教師可以通過要求學生圈出用於預測的數據來檢查他們對這種建模方法的理解。

建議答案：

月份	百分變化	月份	百分變化
1 月到 2 月	<u>20.13%</u>	6 月到 7 月	<u>21.29%</u>
2 月到 3 月	<u>21.20%</u>	7 月到 8 月	<u>21.66%</u>
3 月到 4 月	<u>20.95%</u>	8 月到 9 月	<u>21.52%</u>
4 月到 5 月	<u>21.43%</u>	9 月到 10 月	<u>21.57%</u>
5 月到 6 月	<u>20.88%</u>	10 月到 11 月	<u>21.93%</u>

在問題 3(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉絲數目。

建議答案：

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.93\%) = 2664$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.93\%)^2 = 3248$$

有了回答問題 3(b) 的經驗，問題 3(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案：

$$2185(1 + 21.93\%)^n$$

作為這種建模方法的總結，教師可以在問題 3(d) 中帶領學生討論其優點和缺點。以下是一些可能的討論結果。

- 優點：
 1. 這個模型易於理解。
 2. 這個模型可以反映歌手當前的受歡迎程度。
- 缺點：
 1. 這個模型忽視了包含較早月份的整體趨勢。
 2. 最近兩個月之間的百分變化可能因特殊事件而異常高或低，這可能導致高估或低估。
 3. 這個模型假設了粉絲數目是以單一規律變化。

4. 與建模方法 2 相似，建模方法 6 考慮每個月之間的所有百分變化來進行預測。在問題 4(a) 中，教師可以通過要求學生圈出用於預測的數據來檢查他們對這種建模方法的理解。

建議答案：

月份	百分變化	月份	百分變化
1 月到 2 月	20.13%	6 月到 7 月	21.29%
2 月到 3 月	21.20%	7 月到 8 月	21.66%
3 月到 4 月	20.95%	8 月到 9 月	21.52%
4 月到 5 月	21.43%	9 月到 10 月	21.57%
5 月到 6 月	20.88%	10 月到 11 月	21.93%

在問題 4(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉絲數目。

建議答案：

$$\text{平均百分變化} = \frac{20.13\% + 21.20\% + \dots + 21.93\%}{10} = 21.26\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.26\%) = 2650$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.26\%)^2 = 3213$$

有了回答問題 4(b) 的經驗，問題 4(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案：

$$2185(1 + 21.26\%)^n$$

作為這種建模方法的總結，教師可以在問題 4(d) 中帶領學生討論其優點和缺點。以下是一些可能的討論結果。

- 優點：
 1. 這個模型考慮了較長時間的每個月之間的百分變化，提供了一個對於整體趨勢的更全面的分析。
 2. 考慮較長的時間範圍可以減低短期異常變化的影響。
- 缺點：
 1. 因為這個模型依賴較長時間的歷史數據，所以可能無法完全反映歌手當前的受歡迎程度。
 2. 這個模型假設了粉絲數目是以單一規律變化。

5. 與建模方法 3 相似，建模方法 7 只考慮月份之間的最近三個百分變化來進行預測。在問題 5(a) 中，教師可以通過要求學生圈出用於預測的數據來檢查他們對這種建模方法的理解。

建議答案：

月份	百分變化	月份	百分變化
1 月到 2 月	<u>20.13%</u>	6 月到 7 月	<u>21.29%</u>
2 月到 3 月	<u>21.20%</u>	7 月到 8 月	<u>21.66%</u>
3 月到 4 月	<u>20.95%</u>	8 月到 9 月	<u>21.52%</u>
4 月到 5 月	<u>21.43%</u>	9 月到 10 月	<u>21.57%</u>
5 月到 6 月	<u>20.88%</u>	10 月到 11 月	<u>21.93%</u>

在問題 5(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉絲數目。

建議答案：

$$\text{平均百分變化} = \frac{21.52\% + 21.57\% + 21.93\%}{3} = 21.67\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.67\%) = 2658$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.67\%)^2 = 3235$$

有了回答問題 5(b) 的經驗，問題 5(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案：

$$2185(1 + 21.67\%)^n$$

作為這種建模方法的總結，教師可以在問題 5(d) 中帶領學生討論其優點和缺點。以下是一些可能的討論結果。

- 優點：
 1. 考慮最近的百分變化可以反映歌手當前的受歡迎程度。
 2. 考慮四個月時間範圍的平均百分變化可以減低短期異常變化的影響。
- 缺點：
 1. 考慮最近三個月的百分變化的理由不明確。
 2. 這個模型假設了粉絲數目是以單一規律變化。

6. 與建模方法 4 相似，建模方法 8 考慮了各個月份之間百分變化的權。它計算這些百分變化的加權平均值，以獲得每月的加權平均百分變化。在問題 6(a) 中，教師可以帶領學生討論這些百分變化的權和他們的解釋。以下是一些可能的討論結果。

月份	百分變化	權
1 月到 2 月	20.13%	<u>0</u>
2 月到 3 月	21.20%	<u>0</u>
3 月到 4 月	20.95%	<u>0</u>
4 月到 5 月	21.43%	<u>0</u>
5 月到 6 月	20.88%	<u>0</u>

月份	百分變化	權
6 月到 7 月	21.29%	<u>0</u>
7 月到 8 月	21.66%	<u>0</u>
8 月到 9 月	21.52%	<u>1</u>
9 月到 10 月	21.57%	<u>2</u>
10 月到 11 月	21.93%	<u>3</u>

解釋：

- 為了反映較近期數據對預測的影響程度，最近的百分變化設定為最高的權 3。
- 第二和第三最近的百分變化分別設定為權 2 和 1，這表明它們的影響程度較低。
- 這些月份以外的百分變化設定為權 0，因為它們被視作不再相關。

在問題 6(b) 中，學生預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 K 的粉絲數目。
建議答案（基於以上的結果）：

$$\text{平均百分變化} = \frac{21.52\% \times 1 + 21.57\% \times 2 + 21.93\% \times 3}{1 + 2 + 3} = 21.74\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月: } 2185(1 + 21.74\%) = 2660$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月: } 2185(1 + 21.74\%)^2 = 3238$$

有了回答問題 6(b) 的經驗，問題 6(c) 進一步要求學生制定數學模型，以數學方式表達 2023 年 11 月之後第 n 個月的粉絲預測數目。

建議答案（基於以上的結果）：

$$2185(1 + 21.74\%)^n$$

7. 在活動 3 的尾聲，教師可以帶領學生討論所制定模型的共同假設和限制。以下是一些可能的討論結果。
- 假設：這些模型假設粉絲數目以單一規律變化並遵循指數趨勢。
 - 限制：這些模型未考慮一些重要因素，例如歌手的發帖頻率和公開露面。

活動 4 (請參閱工作紙 4)

此活動涉及分析較複雜的趨勢，讓學生有機會應用在先前活動中所學得的知識。教師應鼓勵學生以不同的策略進行建模及預測結果。由於建模問題並沒有標準答案，活動重點應落在學生能否觀察出規律，進而按其觀察提出相應的假設及模型，並分析建模過程是否合理。

教學建議：

1. 問題 1 展示了歌手 G 的社交媒體粉絲數目的折線圖。在問題 1(a) 中，教師可以鼓勵學生提出他們對該趨勢的觀察。由此，教師可以在問題 1(b) 中帶領學生討論建模的假設，以及預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 G 的粉絲數目。以下是一些可能的討論結果。

- (a) 觀察：歌手 G 的粉絲數目每經歷三個月差異不大的小幅增長後，便會出現一次顯著增長。
- (b) 假設：這個趨勢遵循過去所觀察到的規律，以及較近期的數據有較高的重要性（權）。

考慮：

$$3 \text{ 月到 } 4 \text{ 月的變化} = 1469 - 933 = 536$$

$$6 \text{ 月到 } 7 \text{ 月的變化} = 2289 - 1521 = 768$$

$$9 \text{ 月到 } 10 \text{ 月的變化} = 3089 - 2449 = 640$$

$$10 \text{ 月到 } 11 \text{ 月的變化} = 3185 - 3089 = 96$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月} : 3185 + 96 = 3281$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月} : 3281 + \frac{536 \times 1 + 768 \times 2 + 640 \times 3}{1 + 2 + 3} = 3946$$

2. 與問題 1 相似，問題 2 展示了歌手 Q 的社交媒體粉絲數目的折線圖。在問題 2(a) 中，教師可以鼓勵學生提出他們對該趨勢的觀察。由此，教師可以在問題 2(b) 中帶領學生討論建模的假設，以及預測 2023 年 12 月和 2024 年 1 月歌手 Q 的粉絲數目。以下是一些可能的討論結果。

- (a) 觀察：從 1 月到 8 月之間，歌手 Q 的粉絲數目呈現下跌的趨勢，但沒有展示明確的規律。但從 8 月開始，粉絲數目以指數趨勢下跌。
- (b) 假設：由於從 1 月到 8 月之間的變化沒有展示明確的規律，故在制定模型時，先把這些數據剔除，再假設粉絲數目會繼續沿 8 月後的規律持續下降。

考慮：

$$8 \text{ 月到 } 9 \text{ 月的百分變化} = \frac{1571-1785}{1785} \times 100\% = -12.0\%$$

$$9 \text{ 月到 } 10 \text{ 月的百分變化} = \frac{1382-1571}{1571} \times 100\% = -12.0\%$$

$$10 \text{ 月到 } 11 \text{ 月百分的變化} = \frac{1216-1382}{1382} \times 100\% = -12.0\%$$

$$2023 \text{ 年 } 12 \text{ 月： } 1216(1 - 12.0\%) = 1070$$

$$2024 \text{ 年 } 1 \text{ 月： } 1216(1 - 12.0\%)^2 = 942$$

總結：

整體而言，學生接觸了多個的建模方法，它們可以用作預測未來的趨勢。在結束這項活動時，教師可以：

- 總結和比較這些建模方法；
- 提醒學生在數學建模中可能存在一些假設和局限；及
- 指出不同的模型可能各有其優點和缺點。我們必須不斷評估和改進它們，並使用更多的現實數據進行比較。

建議的教案和教學流程

活動 1 和 2

- 教學時間：約 80 分鐘或雙課節

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
15	<ul style="list-style-type: none"> • 引起學生興趣 • 建立研究趨勢的背景 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師透過討論現實情境來引起學生的興趣。 2. 教師利用 Q1 向學生介紹預測社交媒體粉絲數目的背景，同時鼓勵學生討論影響這數目的因素。 3. 教師利用 Q2 作為熱身練習，讓學生回顧關於數列的概念。 4. 教師強調，在這一系活動中，主要的影響因素只聚焦於之前的粉絲數目。 	<p>WS 封面</p> <p>WS1 Q1–2</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> • 研究線性的趨勢 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師利用 Q1 展示線性的趨勢。 2. 學生分組討論作出預測的方法。 3. 學生需要在 Q2 計算每個月之間粉絲數目的變化。 4. 教師可要求學生把數據輸入到試算表，然後介紹使用試算表計算這些變化的技巧。 	WS2 Q1–2
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 • 評價數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 1，並透過 Q3(a) 檢視他們的理解。 2. 學生需要在 Q3(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q3(c) 導出以 n 表示的模型 1。 3. 學生分組討論模型 1 的優點和缺點。 	<p>WS2 Q3(a)–(c)</p> <p>WS2 Q3(d)</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 • 評價數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 2，並透過 Q4(a) 檢視他們的理解。 2. 學生需要在 Q4(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q4(c) 導出以 n 表示的模型 2。 3. 學生分組討論模型 2 的優點和缺點。 	<p>WS2 Q4(a)–(c)</p> <p>WS2 Q4(d)</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 • 評價數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 3，並透過 Q5(a) 檢視他們的理解。 2. 學生需要在 Q5(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q5(c) 導出以 n 表示的模型 3。 3. 學生分組討論模型 3 的優點和缺點。 	<p>WS2 Q5(a)–(c)</p> <p>WS2 Q5(d)</p>
5	<ul style="list-style-type: none"> • 提升在建模過程中作出假設和識別局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生分組討論這些模型的共同假設和限制。教師可運用以下問題來激發思考：粉絲數目的變化是否必然固定？這些模型所考慮的因素是否全面？ 	WS2 Q6
15	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師從「權」的角度回顧建模方法 1 和 2。 2. 教師通過要求學生為建模方法 3 的情況設定權來檢查他們的理解。 3. 教師向學生介紹建模方法 4。學生在 Q8(a) 分組討論當中所涉及的權和他們的解釋。 4. 學生需要在 Q8(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q8(c) 導出以 n 表示的模型 4。 	WS2 Q7–8

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
5	• 總結活動 1 和 2	1. 教師總結活動 1 和 2 所涉及的建模技巧。	

活動 3 和 4

- 教學時間：約 80 分鐘或雙課節

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	• 研究指數增長的趨勢	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師利用 Q1 展示指數增長的趨勢。 2. 學生分組討論使用模型 1 至 3 作出預測是否合適。 3. 學生需要在 Q2 計算每個月之間粉絲數目的百分變化。 4. 教師可要求學生把數據輸入到試算表，然後介紹使用試算表計算這些百分變化的技巧。 	WS3 Q1–2
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 • 評價數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 5，並透過 Q3(a) 檢視他們的理解。 2. 學生需要在 Q3(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q3(c) 導出以 n 表示的模型 5。 3. 學生分組討論模型 5 的優點和缺點。 	WS3 Q3(a)–(c) WS3 Q3(d)
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 • 評價數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 6，並透過 Q4(a) 檢視他們的理解。 2. 學生需要在 Q4(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q4(c) 導出以 n 表示的模型 6。 3. 學生分組討論模型 6 的優點和缺點。 	WS3 Q4(a)–(c) WS3 Q4(d)

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 • 評價數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 7，並透過 Q5(a) 檢視他們的理解。 2. 學生需要在 Q5(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q5(c) 導出以 n 表示的模型 7。 3. 學生分組討論模型 7 的優點和缺點。 	<p>WS3 Q5(a)–(c)</p> <p>WS3 Q5(d)</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> • 建立數學模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師向學生介紹建模方法 8。學生在 Q6(a) 分組討論當中所涉及的權和他們的解釋。 2. 學生需要在 Q6(b) 預測之後兩個月的數目，這幫助他們在 Q6(c) 導出以 n 表示的模型 8。 	WS3 Q6
5	<ul style="list-style-type: none"> • 提升在建模過程中作出假設和識別局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生分組討論這些模型的共同假設和限制。教師可運用以下問題來激發思考：粉絲數目的百分變化是否必然固定？這些模型所考慮的因素是否全面？ 	WS3 Q7
20	<ul style="list-style-type: none"> • 探索較複雜的趨勢 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師利用 Q1 展示一個非線性的趨勢，並鼓勵學生提出他們的觀察。 2. 教師帶領學生討論建模的假設，以及預測粉絲數目。 3. 同樣地，教師利用 Q2 展示一個更複雜的趨勢，並鼓勵學生提出他們的觀察。 4. 教師帶領學生討論建模的假設，以及預測粉絲數目。 	<p>WS4 Q1</p> <p>WS4 Q2</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
5	<ul style="list-style-type: none"> • 總結整個活動 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師回顧數學模型的概念，它可以幫助我們進行預測。 2. 教師總結和比較在這一系列活動中的建模方法。 3. 教師提醒學生在數學建模中可能存在一些假設和局限。 4. 教師進一步指出不同的模型可能各有其優點和缺點。我們必須不斷評估和改進它們，並使用更多的現實數據。 	