

## 抽奖游戏的数学模型

**学习阶段：** 4

**学习单位：** 探索与研究  
[此建模活动主要涉及：续概率]

**目标：**

- (i) 加强学生认识如何通过数学建模处理现实问题
- (ii) 提升学生在收集、组织和分析数据的能力
- (iii) 提升学生在建模中作出假设和识别限制的能力
- (iv) 丰富学生在现实情境中应用概率概念的经验

**先备知识：**

- (i) 理解概率加法定律及互斥事件和互补事件的概念
- (ii) 理解概率乘法定律和独立事件的概念
- (iii) 认识期望值的概念

**教学资源：** 配有网络联机的计算机或平板计算机

### **背景资料：**

研究事件的概率在日常生活中十分重要，尤其是在投资和风险管理方面。以下建模活动的主要目标是让学生经历应用概率的概念进行数学建模。活动的焦点在于通过数学建模探究在抽奖游戏中赢得奖品的概率。这经验让学生能够运用数学作出明智的决策。

这一系列活动展现了概率建模的本质。具体而言，学生的任务是根据已有数据估算赢得奖品的概率。这活动能够让学生运用数学知识，尝试解决生活中与概率有关的问题，并鼓励学生讨论当中的建模过程。更重要的是，他们需要考虑到可能影响建模结果的现实因素，以及他们所制定的模型中既有的假设和限制。

### 活动详情：

本示例共有三个主要活动：

- 活动 1：（热身活动，按需要选用）重温相关概率知识
- 活动 2：根据所提供的数据建立抽奖游戏的数学模型
- 活动 3：根据更多的数据及较复杂的情景来建立数学模型

备注：为提高学生在学习中的参与，教师亦可要求学生在课堂前收集个别游戏中获得稀有奖品所需的抽奖次数的数据。这样，活动 3 便可建基于他们收集到的数据进行。

下表总结了教师可以在相应活动中与学生讨论的建模步骤及元素。

建模步骤	元素	工作纸 2	工作纸 3
分析现实世界问题	<ul style="list-style-type: none"><li>• 理解现实世界情境</li><li>• 厘清问题中的关键因素</li><li>• 识别与问题相关的数据 / 数据及问题中的数学元素</li></ul>		
建立数学模型	<ul style="list-style-type: none"><li>• 提出假设以简化现实世界问题</li><li>• 以数学方式表述问题</li><li>• 确定关键量/变量之间的关系</li></ul>	1, 2	1
求解模型以得出数学的解	<ul style="list-style-type: none"><li>• 应用数学知识与技能，以及不同的工具求出模型的解</li></ul>	3, 4ac, 5	2a
解释数学的解以获得现实世界的解	<ul style="list-style-type: none"><li>• 考虑数学的解在现实世界问题下的意义</li></ul>	4bc	4
评估数学模型	<ul style="list-style-type: none"><li>• 按现实世界情境验证模型</li><li>• 反思模型的优点和限制</li><li>• 比较不同模型</li><li>• 提出优化模型的建议</li></ul>	6, 7	2bc, 3, 5

### 活动 1 (请参阅工作纸 1)

此活动为热身活动，教师可按学生需要选用此活动，与学生重温活动 2 和 3 所需的概率知识。

#### 教学建议：

1. 在问题 1 中，教师可以让学生了解抽奖游戏的背景，这涉及投掷一枚六面骰子。

建议答案：

(a)  $\frac{1}{6}$

(b)  $\frac{5}{6}$

2. 问题 2 介绍游戏的规则。学生可以运用问题 1 的答案和概率乘法定律来计算三种情况的概率。

建议答案：

(a)  $P(\text{只需 1 次}) = \frac{1}{6}$

(b)  $P(\text{恰好 2 次}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

(c)  $P(\text{恰好 3 次}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

3. 问题 3 承接问题 2，求一般情况下的概率，即恰好需要  $n$  次投掷骰子才掷出「6」的概率，其中  $n$  为正整数。

建议答案：

$$P(\text{恰好 } n \text{ 次}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

4. 问题 4 让学生应用他们所制定的模型估算所要求的概率。

建议答案：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} \\ &= \frac{625}{7776} \\ &= 0.0804 \end{aligned}$$

## 活动 2 (请参阅工作纸 2)

此活动的问题聚焦于运用真实数据来建立抽奖游戏的数学模型，以描述在有关抽奖的情境中，分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。工作纸亦提供模拟工具，让学生模拟游戏的抽奖情况，藉此收集数据，并利用更多的数据来改进他们的模型。

### 教学建议：

1. 教师先与学生讨论，若要建立简单的数学模型以描述分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的概率，除了提供的假设「在第 6 次抽奖之前，每次抽奖获得该满星角色的概率相同」外，还需要作出什么假设。以下为建议答案以供参考：

建议答案：

假设

1. 每次抽奖为独立事件
  2. 该 40 名玩家是随机抽样的
2. 由于游戏的规则相似，活动 2 的数学模型可运用活动 1 问题 3 的方式建立，只是学生需要按照假设「在第 1 至 5 次，每次抽奖获得该满星角色的概率相同」，设定  $p$  为此概率以建立模型。教师应提醒学生由于第 6 次抽奖时必定会获得该满星角色，故需要另作考虑。

建议答案：

设  $P_n$  为在第  $n$  次才获得该满星角色的概率。

$$P_n = (1 - p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{及}$$

$$P_6 = 1$$

3. 在问题 3 中，学生需要利用所提供两个不同情况的数据，估算  $p$  的值以求解问题 2 的数学模型：
  - (a) 只需 1 次抽奖便获得该满星角色；
  - (b) 恰好 2 次抽奖才获得该满星角色。

建议答案：

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad p &= \frac{5}{40} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$(b) \quad (1-p)p = \frac{4}{40}$$

$$-p^2 + p - \frac{1}{10} = 0$$

$$p = 0.113 \quad \text{或} \quad p = 0.887 \quad (\text{不符合表一数据, 不配合问题情境})$$

4. 问题 4(a) 要求学生运用其他情况来估计  $p$  的值, 此过程将会得出较高阶的方程, 例如  $(1-p)^2p = \frac{4}{40}$ 。以这方程作为例子, 教师可以向学生介绍如何使用网上的计算工具 WolframAlpha 来解这些方程。

网址: <https://www.wolframalpha.com/>

问题 4(b) 要求学生从所得的解, 判断它们是否符合问题情境。

建议答案:

$p$  是概率, 因此  $p \approx 1.2796 > 1$  并不合理。

若  $p \approx 0.58739$ , 表一的频数理应更大, 因此以此作估算值并不配合问题情境。

考虑  $p \approx 0.13305$ , 由于  $40 \times 0.13305 = 5.322$ , 这个数值与表一的数据相若, 因此  $p \approx 0.13305$  可视为配合问题情境的估算值。

然后, 在问题 4(c) 学生需要利用在两个不同的情况中 ((i) 恰好 4 次抽奖和 (ii) 恰好 5 次抽奖), 来估计  $p$  的值。

建议答案:

(i)  $p = 0.104$  或  $p = 0.449$  (不符合表一数据, 不配合问题情境)

(ii)  $p = 0.132$ ,  $p = 0.282$  (不符合表一数据, 不配合问题情境) 或  
 $p = 1.47$  ( $>1$ , 不符合概率定义)

5. 学生在问题 3 和 4 中得到 5 个  $p$  的估算值, 问题 5(a) 要求学生建议一个综合所有估算值的方法。教师可引导学生讨论应该使用哪个值, 还是考虑运用其他数学工具来协助估算, 例如计算所有或部分  $p$  的值的平均数或中位数。由此, 问题 5(b) 要求学生更新他们在问题 2 所制定的模型。

建议答案:

(a) 在以上的结果中, 其中较配合问题情境的 5 个  $p$  的估算值为:

$$0.104, 0.113, \frac{1}{8}, 0.132, 0.133$$

我们可以取它们的中位数  $\frac{1}{8}$  作为  $p$  值的估算; 亦可以它们的平均

值,  $(0.104407 + 0.112702 + 0.125 + 0.132318 + 0.133049) \div 5 = 0.121$   
作为  $p$  的估算值。

(b) 若取  $p = \frac{1}{8}$ , 问题 2 的模型变为

$$P_n = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{及}$$

$$P_6 = 1$$

若取  $p = 0.121$   $P_n = (0.121)(0.879)^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  及

$$P_6 = 1$$

6. 在问题 6 中, 教师可与学生讨论此模型的限制, 并特别针对模型中  $p$  的估算方法进行深入探讨。具体而言, 教师应与学生讨论是否存在不同的估算方法, 并评估各种方法是否合理。这可提升学生在建模过程中作出假设和识别局限性的能力。以下是一些可能的讨论结果。

建议答案:

1. 由于没有提供确实的获奖概率, 我们只能假设每次抽奖的概率相同, 及从表一的数据估算  $p$  的值以建立模型。而且在问题 5 所运用的综合方法并非唯一的方法。
  2. 模型的建立只依赖 40 位玩家的数据, 若有更多随机抽样数据可更准确反映抽奖的概率。
  3. 模型未考虑玩家中途放弃抽奖而没有中奖的情况。
7. 基于只依赖 40 位玩家的数据的限制 (见问题 6), 学生可以使用以下的模拟抽奖游戏来收集更多的数据, 并更新频数表以优化模型。估算  $p$  的值的数学步骤与问题 3 至 5 相似。

模拟游戏的连结: <https://www.geogebra.org/m/pcjcybqb>

**注:** 在这模拟游戏中, 除了第 6 次抽奖外, 每次抽奖获得该满星角色的概率设定为 11.5%。

### 活动 3 (请参阅工作纸 3)

继活动 2 之后，此活动的目的是透过较复杂的情境和根据更多的数据来建立数学模型，以进一步丰富学生的建模经验。教师亦可以先准备来自互联网的真实数据，或要求学生在课前按自己感兴趣的问题收集数据。这样，活动 3 便可基于他们收集到的数据进行。活动 3 主要期望学生能从所提供的情境和数据来评价所建立的模型，并藉此了解其限制。

#### 教学建议：

1. 教师可带领学生参考活动 2 的经验，沿用假设「每次抽奖为独立事件」以及「在第 1 至 75 次，每次抽奖获得该满星角色的概率相同」等，先建立一个类似的数学模型。

建议答案：

设  $P_n$  为在第  $n$  次才获得该满星角色的概率。

$$P_n = (1-p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, 3 \dots 73, 74, 75 \quad \text{及}$$

$$P_{76} = 1$$

2. 学生需要利用玩家于第 1 次抽奖便获得该满星角色的相对频数，来估算  $p$  的值，以进一步建立他们的模型。然后，透过模型估算「恰好 51 次抽奖才获得该满星角色的概率」和「恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的概率」，再与其相对频数作出比较，从中发现模型所提供的估算在描述「恰好 74 次抽奖才获得该满星角色」的情况时与数据有着明显的偏差。对于这个评估，考虑相对于真实数据的百分误差是其中一种方法。

建议答案：

- (a) 以  $p = \frac{2605}{374018}$  作为其估值，数学模型为：

设  $P_n$  为在第  $n$  次才获得该满星角色的概率。

$$P_n = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{n-1} \times \frac{2605}{374018} \quad n = 1, 2, 3 \dots 73, 74, 75$$

$$= \frac{2605}{374018} \left(\frac{371413}{374018}\right)^{n-1}$$

$$P_{76} = 1$$

- (b) (i)

$$P_{51} = \frac{2605}{374018} \left(\frac{371413}{374018}\right)^{51-1} \approx 0.00491$$

(ii) 恰好 51 次抽奖才获得该满星角色的相对频数  $\frac{1797}{374018} \approx 0.00480$ 。

$$\begin{aligned} & \text{两者之间的百分误差} \\ &= \frac{0.00491 - 0.00480}{0.00480} \times 100\% \\ &= 2.29\% \end{aligned}$$

由于两者之间的百分误差值较少，所以模型对此情况作出了不错的描述。

(c) (i)

$$P_{74} = \frac{2605}{374018} \left( \frac{371413}{374018} \right)^{74-1} \approx 0.00418$$

(ii) 恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为

$$\frac{15312}{374018} \approx 0.0409。$$

$$\begin{aligned} & \text{两者之间的百分误差为：} \\ &= \frac{0.00418 - 0.0409}{0.0409} \times 100\% \\ &\approx -89.9\% \end{aligned}$$

由于两者之间的百分误差值明显较大，所以模型对此情况作出的预测并不准确。

3. 在问题 3 中，教师可以带领学生按问题 2 的结果，讨论模型的表现，并对模型作出评价。教师可与学生通过观察数据的分布，为模型的评价作出解释。

建议答案：

由 2(b) 和 2(c) 的结果可见，模型对于以 1 至 73 次抽奖获得该满星角色的情况有较准确的估算，但对于需要以 74 和 75 次抽奖获得该满星角色的情况则并不准确。

主要原因是模型假设了「在第 1 至 75 次，每次抽奖获得该满星角色的概率相同」，但数据显示玩家于第 74 和 75 次抽奖才成功获得该满星角色的频数明显高于第 1 至 73 次的频数，故模型对于描述玩家于第 74 次和第 75 次才成功获得该满星角色的抽奖情况并不准确。

4. 问题 4 旨在透过情境的复杂度激发学生思考如何探究第 74 和 75 次抽奖的特殊情况。教师可引导学生运用问题 2 中的模型，以估算  $q$  和  $r$  的值。

建议答案：

采用玩家于第 74 和 75 次抽奖才成功获得该满星角色的相对频数，作为  $P_{74}$  和  $P_{75}$  的估算值，从而求得  $q$  和  $r$ 。

玩家恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为  $\frac{15312}{374018}$ ，故

$$\frac{15312}{374018} = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{73} \times q$$

$$q = 0.0682$$

玩家恰好 75 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为  $\frac{27084}{374018}$ ，故

$$\frac{27084}{374018} = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{73} \times (1 - q) \times r$$

$$r = 0.129$$

5. 教师可与学生讨论模型的限制。以下是一些可能的讨论结果。
1. 由于没有提供确实的获奖概率，模型中的  $p$  值只是一个估算，而且在问题 2 所运用的方法并非唯一估算  $p$  值的方法。
  2. 没法应用于估算第 74 和 75 次的抽奖才成功获得该满星角色的情况。
  3. 模型假设了提供数据的 374,018 名玩家是随机抽样的，但我们难以确保这假设真确。
  4. 模型未考虑玩家中途放弃抽奖而没有中奖的情况。
6. 在这系列活动结束时，教师可以创造空间让学生讨论沉迷电玩的负面影响。这可以帮助他们反思如何建立健康的生活方式。以下是一些可能的讨论结果。

沉迷电玩有成瘾的潜在可能性，且可能会对生活的各个方面产生负面影响，包括学业、人际关系和身体健康，例如影响视力和长期睡眠不足。

要建立健康的生活方式，我们应为自己分配合适的时间于学业、兴趣、运动、与家人朋友相处、休息等各方面。我们可培养多元化的兴趣，例如运动和艺术，从不同的兴趣中找到满足感。

## 建议的教案和教学流程

教学时间：约 80 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
15	<ul style="list-style-type: none"> <li>引起学生兴趣</li> <li>建立抽奖的背景</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师透过讨论现实情境来引起学生的兴趣。</li> <li>教师让学生了解抽奖游戏的背景，同时强调所作出的假设。</li> <li>教师利用 Q1 和 Q2 作为热身练习，回顾学生关于概率的知识。</li> </ol>	WS 封面  WS1 Q1-4
25	<ul style="list-style-type: none"> <li>建立数学模型</li> <li>求解数学模型</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师帮助学生明白游戏的规则。</li> <li>教师与学生讨论如何以假设简化问题。</li> <li>学生建立数学模型（以 <math>p</math> 表示）。</li> <li>教师带领学生讨论如何运用所提供的数据来初步估算 <math>p</math> 的值。</li> <li>学生分组进一步以不同方法估算 <math>p</math> 的值，以及判断所得数值是否配合现实情境。</li> </ol>	WS2 Q1-2  WS2 Q3-5
(课外)	<ul style="list-style-type: none"> <li>提升在建模过程中作识别局限性的能力</li> <li>收集、组织和分析数据</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>学生探讨所制定模型的局限，包括模型中 <math>p</math> 的估算方法。教师可运用以下问题来激发思考：模型中的 <math>p</math> 是否存在不同的估算方法？各种方法是否合理？抽样方法会影响我们的建模结果吗？你认为样本大小是否足够？</li> <li>教师指出依赖少量数据的局限性。</li> <li>学生分组收集仿真游戏中的数据，使用所提供的表格整理数据，并建立模型。</li> </ol>	WS2 Q6  WS2 Q7

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>提升数据诠释的能力</li> <li>求解数学模型</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师透过运用真实的数据来促进学生的数学探究。</li> <li>教师引导学生先为情境建立简单的数学模型。</li> <li>学生需要估算 <math>p</math> 的值，然后把该数值代入问题 1 的数学模型。</li> </ol>	<p>WS3 Q1</p> <p>WS3 Q2a</p>
25	<ul style="list-style-type: none"> <li>评估模型</li> <li>处理特殊情况，优化模型</li> <li>提升在建模过程中识别局限性的能力</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师要求学生通过与真实数据进行比较来评估建模结果。</li> <li>学生对所建立的模型作出评价，思考模型为何对于第 74 次和第 75 次的抽奖情况并不能作出准确的预测。</li> <li>学生分组讨论如何处理第 74 和 75 次抽奖的特殊情况。</li> <li>学生分组讨论所制定模型的限制。教师可运用以下问题来激发思考：模型中的 <math>p</math> 是否存在不同的估算方法？抽样方法会影响我们的建模结果吗？在建模过程中是否有其他因素被忽略了？</li> </ol>	<p>WS3 Q2-Q3</p> <p>WS3 Q4</p> <p>WS3 Q5</p>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>总结活动</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教师可促进学生反思沉迷电玩的负面影响，并鼓励他们培养多元化的兴趣，建立健康的生活方式。</li> </ol>	<p>WS3 Q6</p>