抽獎遊戲的數學模型

學習階段： 4

學習單位： 探索與研究
〔此建模活動主要涉及：續概率〕

目標：
(i) 加強學生認識如何通過數學建模處理現實問題
(ii) 提升學生在收集、組織和分析數據的能力
(iii) 提升學生在建模中作出假設和識別限制的能力
(iv) 豐富學生在現實情境中應用概率概念的經驗

先備知識：
(i) 理解概率加法定律及互斥事件和互補事件的概念
(ii) 理解概率乘法定律和獨立事件的概念
(iii) 認識期望值的概念

教學資源： 配有網路連線的電腦或平板電腦

背景資料：
研究事件的概率在日常生活中十分重要，尤其是在投資和風險管理方面。以下建模活動的主要目標是讓學生經歷應用概率的概念進行數學建模。活動的焦點在於通過數學建模探究在抽獎遊戲中贏得獎品的概率。這經驗讓學生能夠運用數學作出明智的決策。

這一系列活動展現了概率建模的本質。具體而言，學生的任務是根據已有數據估算贏得獎品的概率。這活動能夠讓學生運用數學知識，嘗試解決生活中與概率有關的問題，並鼓勵學生討論當中的建模過程。更重要的是，他們需要考慮可能影響建模結果的現實因素，以及他們所制定的模型中既有的假設和限制。

活動詳情：

本示例共有三個主要活動：

- 活動 1：（熱身活動，按需要選用）重溫相關概率知識
- 活動 2：根據所提供的數據建立抽獎遊戲的數學模型
- 活動 3：根據更多的數據及較複雜的情景來建立數學模型

備註：為提高學生在學習中的參與，教師亦可要求學生在課堂前收集個別遊戲中獲得稀有獎品所需的抽獎次數的數據。這樣，活動 3 便可建基於他們收集到的數據進行。

下表總結了教師可以在相應活動中與學生討論的建模步驟及元素。

建模步驟	元素	工作紙 2	工作紙 3
分析現實世界問題	• 理解現實世界情境 • 釐清問題中的關鍵因素 • 識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素		
建立數學模型	• 提出假設以簡化現實世界問題 • 以數學方式表述問題 • 確定關鍵量/變數之間的關係	1, 2	1
求解模型以得出數學的解	• 應用數學知識與技能，以及不同的工具求出模型的解	3, 4ac, 5	2a
解釋數學的解以獲得現實世界的解	• 考慮數學的解在現實世界問題下的意義	4bc	4
評估數學模型	• 按現實世界情境驗證模型 • 反思模型的優點和限制 • 比較不同模型 • 提出優化模型的建議	6, 7	2bc, 3, 5

活動 1（請參閱工作紙 1）

此活動為熱身活動，教師可按學生需要選用此活動，與學生重溫活動 2 和 3 所需的概率知識。

教學建議：

1. 在問題 1 中，教師可以讓學生了解抽獎遊戲的背景，這涉及投擲一枚六面骰子。

   建議答案：

   (a) $\frac{1}{6}$

   (b) $\frac{5}{6}$

2. 問題 2 介紹遊戲的規則。學生可以運用問題 1 的答案和概率乘法定律來計算三種情況的概率。

   建議答案：

   (a) P (只需 1 次) = $\frac{1}{6}$

   (b) P (恰好 2 次) = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

   (c) P (恰好 3 次) = $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

3. 問題 3 承接問題 2，求一般情況下的概率，即恰好需要 n 次投擲骰子才擲出「6」的概率，其中 n 為正整數。

   建議答案：

   P (恰好 n 次) = $(\frac{5}{6})^{n-1}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$

4. 問題 4 讓學生應用他們所制定的模型估算所要求的概率。

   建議答案：

   $\frac{1}{6}\times(\frac{5}{6})^{5-1}$

   $= \frac{625}{7776}$

   = 0.0804

活動 2（請參閱工作紙 2）

此活動的問題聚焦於運用真實數據來建立抽獎遊戲的數學模型，以描述在有關抽獎的情境中，分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。工作紙亦提供模擬工具，讓學生模擬遊戲的抽獎情況，藉此收集數據，並利用更多的數據來改進他們的模型。

教學建議：

1. 教師先與學生討論，若要建立簡單的數學模型以描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的概率，除了提供的假設「在第 6 次抽獎之前，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同」外，還需要作出什麼假設。以下為建議答案以供參考：

   建議答案：

   假設

   1. 每次抽獎為獨立事件
   2. 該 40 名玩家是隨機抽樣的

2. 由於遊戲的規則相似，活動 2 的數學模型可運用活動 1 問題 3 的方式建立，只是學生需要按照假設「在第 1 至 5 次，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同」，設定 p 為此概率以建立模型。教師應提醒學生由於第 6 次抽獎時必定會獲得該滿星角色，故需要另作考慮。

   建議答案：

   設 P_n 為在第 n 次才獲得該滿星角色的概率。

   $P_n = (1-p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$ 及

   $P_6 = 1$

3. 在問題 3 中，學生需要利用所提供兩個不同情況的數據，估算 p 的值以求解問題 2 的數學模型：

   (a) 只需 1 次抽獎便獲得該滿星角色；

   (b) 恰好 2 次抽獎才獲得該滿星角色。

   建議答案：

   (a) $p = \frac{5}{40}$

   $= \frac{1}{8}$

(b) $(1-p)p = \dfrac{4}{40}$

$$-p^2 + p - \frac{1}{10} = 0$$

$p = 0.113$ 或 $p = 0.887$ (不符合表一數據，不配合問題情境)

4. 問題 4(a) 要求學生運用其他情況來估計 p 的值，此過程將會得出較高階的方程，例如 $(1-p)^2 p = \frac{4}{40}$。以這方程作為例子，教師可以向學生介紹如何使用網上的計算工具 WolframAlpha 來解這些方程。
   網址：https://www.wolframalpha.com/

   問題 4(b) 要求學生從所得的解，判斷它們是否符合問題情境。
   建議答案：
   p 是概率，因此 $p \approx 1.2796 > 1$ 並不合理。
   若 $p \approx 0.58739$，表一的頻數理應更大，因此以此作估算值並不配合問題情境。
   考慮 $p \approx 0.13305$，由於 $40 \times 0.13305 = 5.322$，這個數值與表一的數據相若，因此 $p \approx 0.13305$ 可視為配合問題情境的估算值。

   然後，在問題 4(c) 學生需要利用在兩個不同的情況中（(i) 恰好 4 次抽獎和 (ii) 恰好 5 次抽獎），來估計 p 的值。
   建議答案：
   (i) $p = 0.104$ 或 $p = 0.449$ (不符合表一數據，不配合問題情境)
   (ii) $p = 0.132$， $p = 0.282$ (不符合表一數據，不配合問題情境) 或
   $p = 1.47$ (>1，不符合概率定義)

5. 學生在問題 3 和 4 中得到 5 個 p 的估算值，問題 5(a) 要求學生建議一個綜合所有估算值的方法。教師可引導學生討論應該使用哪個值，還是考慮運用其他數學工具來協助估算，例如計算所有或部分 p 的值的平均數或中位數。由此，問題 5(b) 要求學生更新他們在問題 2 所制定的模型。
   建議答案：
   (a) 在以上的結果中，其中較配合問題情境的 5 個 p 的估算值為：

   $$0.104，0.113，\frac{1}{8}，0.132，0.133$$

   我們可以取它們的中位數 $\frac{1}{8}$ 作為 p 值的估算；亦可以它們的平均

值， $(0.104407 + 0.112702 + 0.125 + 0.132318 + 0.133049) \div 5 = 0.121$ 作為 p 的估算值。

(b) 若取 $p = \frac{1}{8}$，問題 2 的模型變為

$P_n = \frac{1}{8}(\frac{7}{8})^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 及

$P_6 = 1$

若取 $p = 0.121$ $P_n = (0.121)(0.879)^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 及

$P_6 = 1$

6. 在問題 6 中，教師可與學生討論此模型的限制，並特別針對模型中 p 的估算方法進行深入探討。具體而言，教師應與學生討論是否存在不同的估算方法，並評估各種方法是否合理。這可提升學生在建模過程中作出假設和識別局限性的能力。以下是一些可能的討論結果。

建議答案：

1. 由於沒有提供確實的獲獎概率，我們只能假設每次抽獎的概率相同，及從表一的數據估算 p 的值以建立模型。而且在問題 5 所運用的綜合方法並非唯一的方法。
2. 模型的建立只依賴 40 位玩家的數據，若有更多隨機抽樣數據可更準確反映抽獎的概率。
3. 模型未考慮玩家中途放棄抽獎而沒有中獎的情況。

7. 基於只依賴 40 位玩家的數據的限制（見問題 6），學生可以使用以下的模擬抽獎遊戲來收集更多的數據，並更新頻數表以優化模型。估算 p 的值的數學步驟與問題 3 至 5 相似。

模擬遊戲的連結：https://www.geogebra.org/m/pcjcybqb

注：在這模擬遊戲中，除了第 6 次抽獎外，每次抽獎獲得該滿星角色的概率設定為 11.5%。

活動 3（請參閱工作紙 3）

繼活動 2 之後，此活動的目的是透過較複雜的情境和根據更多的數據來建立數學模型，以進一步豐富學生的建模經驗。教師亦可以先準備來自互聯網的真實數據，或要求學生在課前按自己感興趣的問題收集數據。這樣，活動 3 便可基於他們收集到的數據進行。活動 3 主要期望學生能從所提供的情境和數據來評價所建立的模型，並藉此了解其限制。

教學建議：

1. 教師可帶領學生參考活動 2 的經驗，沿用假設「每次抽獎為獨立事件」以及「在第 1 至 75 次，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同」等，先建立一個類似的數學模型。

   建議答案：

   設 P_n 為在第 n 次才獲得該滿星角色的概率。

   $P_n = (1-p)^{n-1}\cdot p$，　$n = 1, 2, 3\ldots73, 74,75$　及

   $P_{76} = 1$

2. 學生需要利用玩家於第 1 次抽獎便獲得該滿星角色的相對頻數，來估算 p 的值，以進一步建立他們的模型。然後，透過模型估算「恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的概率」和「恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的概率」，再與其相對頻數作出比較，從中發現模型所提供的估算在描述「恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色」的情況時與數據有著明顯的偏差。對於這個評估，考慮相對於真實數據的百分誤差是其中一種方法。

   建議答案：

   (a) 以 $p = \frac{2605}{374018}$ 作為其估值，數學模型為：

   設 P_n 為在第 n 次才獲得該滿星角色的概率。

   $$P_n = (1-\frac{2605}{374018})^{n-1}\times\frac{2605}{374018}\quad n = 1, 2, 3\ldots73, 74,75$$

   $$= \frac{2605}{374018}(\frac{371413}{374018})^{n-1}$$

   $P_{76} = 1$

   (b) (i)

   $$P_{51} = \frac{2605}{374018}(\frac{371413}{374018})^{51-1} \approx 0.00491$$

(ii) 恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數 $\frac{1797}{374018} \approx 0.00480$ 。

兩者之間的百分誤差

$$= \frac{0.00491 - 0.00480}{0.00480} \times 100\%$$

$$= 2.29\%$$

由於兩者之間的百分誤差值較少，所以模型對此情況作出了不錯的描述。

(c) (i)

$$P_{74} = \frac{2605}{374018} (\frac{371413}{374018})^{74-1} \approx 0.00418$$

(ii) 恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為

$\frac{15312}{374018} \approx 0.0409$ 。

兩者之間的百分誤差為：

$$= \frac{0.00418 - 0.0409}{0.0409} \times 100\%$$

$$\approx -89.9\%$$

由於兩者之間的百分誤差值明顯較大，所以模型對此情況作出的預測並不準確。

3. 在問題 3 中，教師可以帶領學生按問題 2 的結果，討論模型的表現，並對模型作出評價。教師可與學生通過觀察數據的分佈，為模型的評價作出解釋。

<u>建議答案：</u>

由 2(b) 和 2(c) 的結果可見，模型對於以 1 至 73 次抽獎獲得該滿星角色的情況有較準確的估算，但對於需要以 74 和 75 次抽獎獲得該滿星角色的情況則並不準確。。

主要原因是模型假設了「在第 1 至 75 次，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同」，但數據顯示玩家於第 74 和 75 次抽獎才成功獲得該滿星角色的頻數明顯高於第 1 至 73 次的頻數，故模型對於描述玩家於第 74 次和第 75 次才成功獲得該滿星角色的抽獎情況並不準確。

4. 問題 4 旨在透過情境的複雜度激發學生思考如何探究第 74 和 75 次抽獎的特殊情況。教師可引導學生運用問題 2 中的模型，以估算 q 和 r 的值。

<u>建議答案：</u>

採用玩家於第 74 和 75 次抽獎才成功獲得該滿星角色的相對頻數，作為 P_{74} 和 P_{75} 的估算值，從而求得 q 和 r。

玩家恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為 $\frac{15312}{374018}$，故

$$\frac{15312}{374018} = (1-\frac{2605}{374018})^{73} \times q$$

$q = 0.0682$

玩家恰好 75 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為 $\frac{27084}{374018}$，故

$$\frac{27084}{374018} = (1-\frac{2605}{374018})^{73} \times (1-q) \times r$$

$r = 0.129$

5. 教師可與學生討論模型的限制。以下是一些可能的討論結果。

   1. 由於沒有提供確實的獲獎概率，模型中的 p 值只是一個估算，而且在問題 2 所運用的方法並非唯一估算 p 值的方法。
   2. 沒法應用於估算第 74 和 75 次的抽獎才成功獲得該滿星角色的情況。
   3. 模型假設了提供數據的 374,018 名玩家是隨機抽樣的，但我們難以確保這假設真確。
   4. 模型未考慮玩家中途放棄抽獎而沒有中獎的情況。

6. 在這系列活動結束時，教師可以創造空間讓學生討論沉迷電玩的負面影響。這可以幫助他們反思如何建立健康的生活方式。以下是一些可能的討論結果。

   沉迷電玩有成癮的潛在可能性，且可能會對生活的各個方面產生負面影響，包括學業、人際關係和身體健康，例如影響視力和長期睡眠不足。

   要建立健康的生活方式，我們應為自己分配合適的時間於學業、興趣、運動、與家人朋友相處、休息等各方面。我們可培養多元化的興趣，例如運動和藝術，從不同的興趣中找到滿足感。

建議的教案和教學流程

教學時間：約 80 分鐘或雙課節

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
15	• 引起學生興趣 • 建立抽獎的背景	1. 教師透過討論現實情境來引起學生的興趣。 2. 教師讓學生了解抽獎遊戲的背景，同時強調所作出的假設。 3. 教師利用 Q1 和 Q2 作為熱身練習，回顧學生關於概率的知識。	WS 封面 WS1 Q1–4
25	• 建立數學模型 • 求解數學模型	1. 教師幫助學生明白遊戲的規則。 2. 教師與學生討論如何以假設簡化問題。 3. 學生建立數學模型（以 p 表示）。 4. 教師帶領學生討論如何運用所提供的數據來初步估算 p 的值。 5. 學生分組進一步以不同方法估算 p 的值，以及判斷所得數值是否配合現實情境。	WS2 Q1–2 WS2 Q3–5
(課外)	• 提升在建模過程中作識別局限性的能力 • 收集、組織和分析數據	6. 學生探討所制定模型的局限，包括模型中 p 的估算方法。教師可運用以下問題來激發思考：模型中的 p 是否存在不同的估算方法？各種方法是否合理？抽樣方法會影響我們的建模結果嗎？你認為樣本大小是否足夠？ 7. 教師指出依賴少量數據的局限性。 8. 學生分組收集模擬遊戲中的數據，使用所提供的表格整理數據，並建立模型。	WS2 Q6 WS2 Q7

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	• 提升數據詮釋的能力 • 求解數學模型	1. 教師透過運用真實的數據來促進學生的數學探究。 2. 教師引導學生先為情境建立簡單的數學模型。 3. 學生需要估算 p 的值，然後把該數值代入問題 1 的數學模型。	 WS3 Q1 WS3 Q2a
25	• 評估模型 • 處理特殊情況，優化模型 • 提升在建模過程中識別局限性的能力	1. 教師要求學生通過與真實數據進行比較來評估建模結果。 2. 學生對所建立的模型作出評價，思考模型為何對於第 74 次和第 75 次的抽獎情況並不能作出準確的預測。 3. 學生分組討論如何處理第 74 和 75 次抽獎的特殊情況。 4. 學生分組討論所制定模型的限制。教師可運用以下問題來激發思考：模型中的 p 是否存在不同的估算方法？抽樣方法會影響我們的建模結果嗎？在建模過程中是否有其他因素被忽略了？	WS3 Q2-Q3 WS3 Q4 WS3 Q5
5	• 總結活動	1. 教師可促進學生反思沉迷電玩的負面影響，，並鼓勵他們培養多元化的興趣，建立健康的生活方式。	WS3 Q6