



## 抽奖游戏的数学模型

你是否想过在游戏中获得奖品的机会有多大？欢迎来到有关概率的数学建模活动！你将通过数学模型了解游戏的获奖概率，以装备自己能够运用数学作出明智的决策。

想象一下，你是一位玩家，希望了解在抽奖游戏中获得奖品的概率，你需要根据可用的数据来建立相关数学模型，当中便涉及应用概率的概念。此外，因应现实世界的复杂性，你将深入了解数学建模的相关假设和限制。

## 抽奖游戏的数学模型

### 工作纸 1

#### 活动 1

重温概率的相关知识。

1. 考虑一个投掷六面骰子的活动。可能的结果是数字「1」、「2」、「3」、「4」、「5」和「6」。假设骰子是匀称的，这意味着掷得每个数字出现的概率是相等的。写出以下事件的概率。
  - (a) 掷出「6」的概率。
  - (b) 掷出不是「6」的的概率。

---

---

2. 你正在参加一个抽奖游戏，这个游戏涉及投掷在问题 1 中所描述的骰子，游戏的玩法如下：
  - 若你掷出「6」，游戏结束，并且你将会获得奖品；
  - 若你掷出其他数字，你必须继续投掷骰子，直到掷出「6」为止。求需要以下投掷骰子次数而获奖的概率。
  - (a) 只需 1 次。
  - (b) 恰好 2 次。
  - (c) 恰好 3 次。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

3. 求在恰好需要  $n$  次投掷骰子才掷出「6」的概率，其中  $n$  为正整数。

---

---

---

4. 利用问题 3 的结果, 计算在恰好需要投掷骰子 5 次才获得奖品的概率。

---

---

---

---

## 抽奖游戏的数学模型

### 工作纸 2

#### 活动 2

##### 根据所提供的数据建立抽奖游戏的数学模型

在一个游戏中，玩家有机会随机抽取一个稀有的满星角色。游戏开发者表示若玩家一直未能抽到该满星角色，「保证中奖机制」会确保玩家在第 6 次抽奖时必定会获得该满星角色。

我们从 40 名获得该满星角色的玩家收集了数据。下表总结了每位玩家为获得该满星角色所进行的抽奖次数。

抽奖次数	划记	频数
1	###	5
2	////	4
3	////	4
4	///	3
5	///	3
6	### ### ### ### /	21

表一：40 名玩家以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的频数

我们的目标是建立一个数学模型以描述分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。为了简化问题，假设在第 6 次抽奖之前，每次抽奖获得该满星角色的概率相同。

1. 若以上表的数据建立所需要的数学模型，除了上述假设，你还会作出什么假设以简化问题？

---

---

---

---



4. (a) 若考虑抽奖次数较多的情况，我们会得出较高阶的方程。遇到这情况，我们可以使用网上的计算工具，例如 <https://www.wolframalpha.com/> 来解方程。

以「恰好抽奖 3 次才获得该满星角色」的情况作为例子，我们可按以下步骤

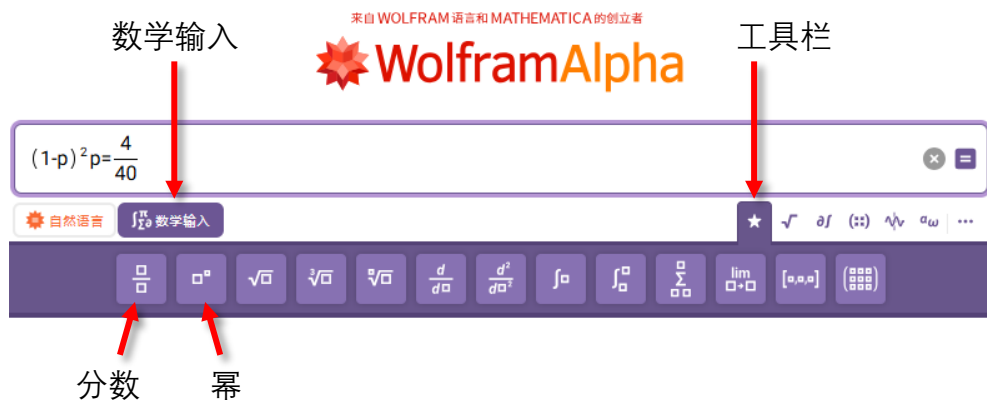
解相应的三次方程  $(1-p)^2 p = \frac{4}{40}$ ：

步骤	描述
----	----

- i. 点选「数学输入」和「★」工具栏

- ii. 输入方程

(分别以「幂」和「分数」工具来输入  $(1-p)^2$  和  $\frac{4}{40}$ )



- iii. 按键盘上的「输入」键，可得出方程的解

解	更多位数	精确形式	<input checked="" type="checkbox"/> 分步解答
$p \approx 0.13305$			
$p \approx 0.58739$			
$p \approx 1.2796$			

- (b) 就 4(a) 所得的 3 个方程的解，请按  $p$  在模型中的定义和表一的数据，判断它们是否配合问题情境。

---



---



---



7. 试利用模拟抽奖游戏的连结：<https://www.geogebra.org/m/pcjcybqb>，收集 20 次获得满星角色所需抽奖次数的数据，加至下表中原有的 40 名玩家的数据，组成共 60 名玩家的抽奖数据。

抽奖次数	划记	频数
1	###	
2	////	
3	////	
4	///	
5	///	
6	### ### ### ### /	

根据以上的数据再次计算  $p$  的估算值及更新数学模型，描述分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

## 抽奖游戏的数学模型

### 工作纸 3

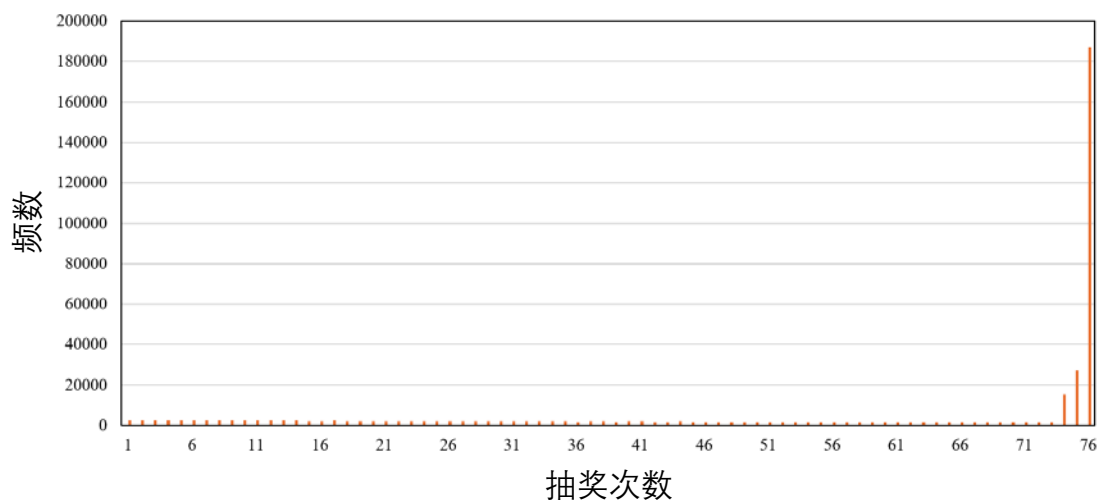
#### 活动 3

##### 根据更多的数据及较复杂的情景来建立数学模型

在另一款游戏中，玩家有机会随机抽取一个稀有的满星角色。游戏开发者表示若玩家一直未能抽到该满星角色，「保证中奖机制」会确保玩家在第 76 次抽奖时必定会获得该满星角色。

在一个在线平台上，一些玩家报告了他们获得该满星角色所需的抽奖次数。下表和下图显示了共 374,018 名玩家所需的抽奖次数（详细数据见附录）。

抽奖次数	1	2	...	51	...	74	75	76
频数	2,605	2,566	...	1,797	...	15,312	27,084	187,158



我们参考活动 2，先作出以下假设：

- 每次抽奖为独立事件
- 在第 1 至 75 次，每次抽奖获得该满星角色的概率相同
- 该 374,018 名玩家是随机抽样的

- 设  $p$  为第 1 至 75 次抽奖时，每次抽奖获得该满星角色的概率。  
参考活动 2，建立一个数学模型，描述分别以 1 至 76 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。







## 附录

抽奖次数	频数
1	2605
2	2566
3	2476
4	2564
5	2437
6	2432
7	2359
8	2331
9	2347
10	2343
11	2330
12	2290
13	2262
14	2283
15	2125
16	2232
17	2269
18	2122
19	2246
20	2239
21	2185
22	2101
23	2069
24	2074
25	2010
26	2073
27	2044
28	2038
29	2014
30	1991

抽奖次数	频数
31	1990
32	1973
33	1928
34	1992
35	1929
36	1899
37	1981
38	1920
39	1876
40	1908
41	1936
42	1884
43	1867
44	1942
45	1860
46	1790
47	1766
48	1823
49	1790
50	1720
51	1797
52	1764
53	1654
54	1724
55	1815
56	1693
57	1768
58	1718
59	1678
60	1692

抽奖次数	频数
61	1733
62	1656
63	1676
64	1756
65	1659
66	1777
67	1672
68	1663
69	1681
70	1653
71	1649
72	1667
73	1688
74	15312
75	27084
76	187158



## 抽奖游戏的数学模型

你是否想过在游戏中获得奖品的机会有多大？欢迎来到有关概率的数学建模活动！你将通过数学模型了解游戏的获奖概率，以装备自己能够运用数学作出明智的决策。

想象一下，你是一位玩家，希望了解在抽奖游戏中获得奖品的概率，你需要根据可用的数据来建立相关数学模型，当中便涉及应用概率的概念。此外，因应现实世界的复杂性，你将深入了解数学建模的相关假设和限制。

## 抽奖游戏的数学模型

### 工作纸 1

#### 活动 1

重温概率的相关知识。

1. 考虑一个投掷六面骰子的活动。可能的结果是数字「1」、「2」、「3」、「4」、「5」和「6」。假设骰子是匀称的，这意味着掷得每个数字出现的概率是相等的。写出以下事件的概率。  
(a) 掷出「6」的概率。                      (b) 掷出不是「6」的的概率。

$$(a) \frac{1}{6} \qquad (b) \frac{5}{6}$$

2. 你正在参加一个抽奖游戏，这个游戏涉及投掷在问题 1 中所描述的骰子，游戏的玩法如下：
  - 若你掷出「6」，游戏结束，并且你将会获得奖品；
  - 若你掷出其他数字，你必须继续投掷骰子，直到掷出「6」为止。求需要以下投掷骰子次数而获奖的概率。  
(a) 只需 1 次。                      (b) 恰好 2 次。  
(c) 恰好 3 次。

$$(a) P(\text{只需 1 次}) = \frac{1}{6}$$
$$(b) P(\text{恰好 2 次}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$
$$(c) P(\text{恰好 3 次}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

3. 求在恰好需要  $n$  次投掷骰子才掷出「6」的概率，其中  $n$  为正整数。

$$P(\text{恰好 } n \text{ 次}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

4. 利用问题 3 的结果, 计算在恰好需要投掷骰子 5 次才获得奖品的概率。

$$\begin{aligned} & P(\text{恰好 } 5 \text{ 次}) \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} \\ &= \frac{625}{7776} \\ &= 0.0804 \end{aligned}$$

## 抽奖游戏的数学模型

### 工作纸 2

#### 活动 2

##### 根据所提供的数据建立抽奖游戏的数学模型

在一个游戏中，玩家有机会随机抽取一个稀有的满星角色。游戏开发者表示若玩家一直未能抽到该满星角色，「保证中奖机制」会确保玩家在第 6 次抽奖时必定会获得该满星角色。

我们从 40 名获得该满星角色的玩家收集了数据。下表总结了每位玩家为获得该满星角色所进行的抽奖次数。

抽奖次数	划记	频数
1	###	5
2	////	4
3	////	4
4	///	3
5	///	3
6	### ### ### ### /	21

表一：40 名玩家以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的频数

我们的目标是建立一个数学模型以描述分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。为了简化问题，假设在第 6 次抽奖之前，每次抽奖获得该满星角色的概率相同。

1. 若以上表的数据建立所需要的数学模型，除了上述假设，你还会作出什么假设以简化问题？

[参考答案]

假设

1. 每次抽奖为独立事件
2. 该 40 名玩家是随机抽样的

2. 在问题 1 前, 我们假设了在第 1 至 5 次的抽奖中, 每次获得该满星角色的概率相同, 设此概率为  $p$ 。试运用  $p$  及根据你在问题 1 制定的假设, 建立一个数学模型, 描述分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。

设  $P_n$  为在第  $n$  次才获得该满星角色的概率, 所需的数学模型为:

$$P_n = (1-p)^{n-1} \cdot p, n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{及} \quad P_6 = 1$$

3. 若要求解问题 2 的数学模型, 我们需要估算  $p$  的值。试根据以下情况及表一的数据, 估算  $p$  的值。
- (a) 只需 1 次抽奖便获得该满星角色;
- (b) 恰好 2 次抽奖才获得该满星角色。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad p &= \frac{5}{40} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad (1-p)p = \frac{4}{40}$$

$$-p^2 + p - \frac{1}{10} = 0$$

$$p = 0.113 \quad \text{或} \quad p = 0.887 \quad (\text{不符合表一数据, 不配合问题情境})$$

4. (a) 若考虑抽奖次数较多的情况，我们会得出较高阶的方程。遇到这情况，我们可以使用网上的计算工具，例如 <https://www.wolframalpha.com/> 来解方程。

以「恰好抽奖 3 次才获得该满星角色」的情况作为例子，我们可按以下步骤

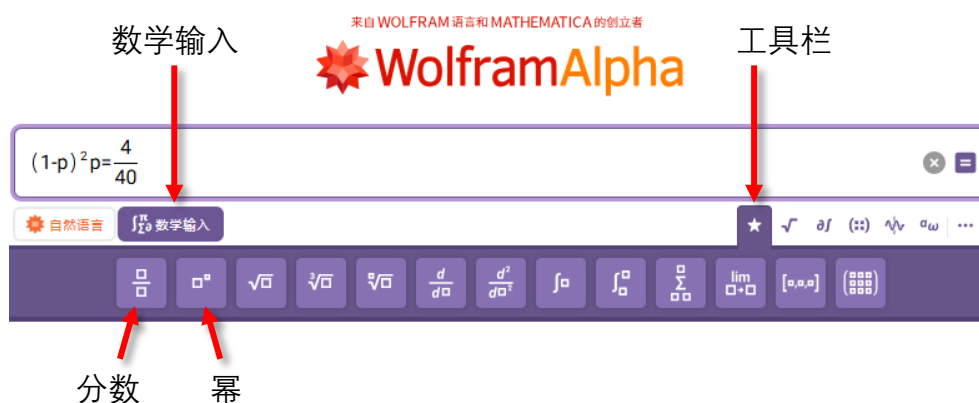
骤解相应的三次方程  $(1-p)^2 p = \frac{4}{40}$ ：

步骤	描述
----	----

- i. 点选「数学输入」和「★」工具栏

- ii. 输入方程

(分别以「幂」和「分数」工具来输入  $(1-p)^2$  和  $\frac{4}{40}$ )



- iii. 按键盘上的「输入」键，可得出方程的解

解	更多位数	精确形式	<input checked="" type="checkbox"/> 分步解答
$p \approx 0.13305$			
$p \approx 0.58739$			
$p \approx 1.2796$			

(b) 就 4(a) 所得的 3 个方程的解，请按  $p$  在模型中的定义和表一的数据，判断它们是否配合问题情境。

由于  $p$  是概率，因此  $p \approx 1.2796 > 1$  并不合理。  
 若  $p \approx 0.58739$ ，表一的频数理应更大，因此以此作估算值并不配合问题情境。  
 考虑  $p \approx 0.13305$ ，由于  $40 \times 0.13305 = 5.322$ ，这个数值与表一的数据相若，因此  $p \approx 0.13305$  可视为配合问题情境的估算值。



7. 试利用模拟抽奖游戏的连结：<https://www.geogebra.org/m/pcjcybqb>，收集 20 次获得满星角色所需抽奖次数的数据，加至下表中原有的 40 名玩家的数据，组成共 60 名玩家的抽奖数据。

抽奖次数	划记	频数
1	###	
2	////	
3	////	
4	///	
5	///	
6	### ### ### ### /	

根据以上的数据再次计算  $p$  的估算值及更新数学模型，描述分别以 1 至 6 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。

---



---



---



---



---



---



---



---

## 抽奖游戏的数学模型

### 工作纸 3

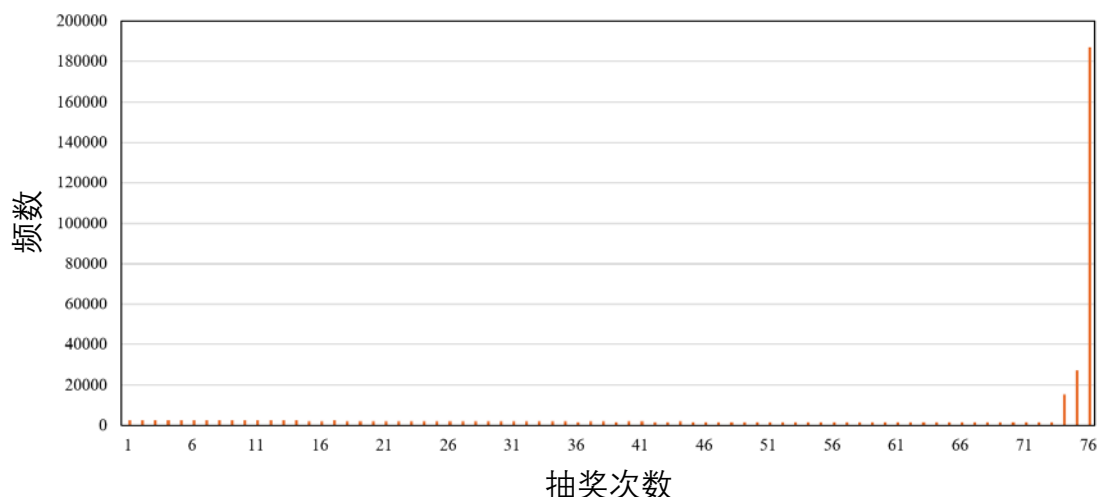
#### 活动 3

##### 根据更多的数据及较复杂的情景来建立数学模型

在另一款游戏中，玩家有机会随机抽取一个稀有的满星角色。游戏开发者表示若玩家一直未能抽到该满星角色，「保证中奖机制」会确保玩家在第 76 次抽奖时必定会获得该满星角色。

在一个在线平台上，一些玩家报告了他们获得该满星角色所需的抽奖次数。下表和下图显示了共 374,018 名玩家所需的抽奖次数（详细数据见附录）。

抽奖次数	1	2	...	51	...	74	75	76
频数	2,605	2,566	...	1,797	...	15,312	27,084	187,158



我们参考活动 2，先作出以下假设：

- 每次抽奖为独立事件
- 在第 1 至 75 次，每次抽奖获得该满星角色的概率相同
- 该 374,018 名玩家是随机抽样的

1. 设  $p$  为第 1 至 75 次抽奖时，每次抽奖获得该满星角色的概率。  
参考活动 2，建立一个数学模型，描述分别以 1 至 76 次抽奖获得该满星角色的机会有多大。

设  $P_n$  为在第  $n$  次才获得满星角色的概率。

$$P_n = (1 - p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 73, 74, 75 \quad \text{及} \quad P_{76} = 1$$

2. 利用玩家于第 1 次抽奖便获得该满星角色的相对频数，作为  $p$  的估算值。
- (a) 计算  $p$  的估算值并把该数值代入问题 1 的数学模型。
- (b) (i) 运用 (a) 所建立的模型，估算需要恰好 51 次抽奖才获得该满星角色的概率。  
(ii) 通过比较玩家需要恰好 51 次抽奖才获得该满星角色的相对频数，试以百分误差来评估该模型的表现。
- (c) (i) 运用 (a) 所建立的模型，估算需要恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的概率。  
(ii) 通过比较玩家需要恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的相对频数，试以百分误差来评估该模型的表现。

(a) 以  $p = \frac{2605}{374018}$  作为其估算值，代入数学模型：

设  $P_n$  为在第  $n$  次才获得该满星角色的概率。

$$P_n = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{n-1} \times \frac{2605}{374018} = \frac{2605}{374018} \left(\frac{371413}{374018}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 73, 74, 75$$

及  $P_{76} = 1$

(b) (i)  $P_{51} = \frac{2605}{374018} \left(\frac{371413}{374018}\right)^{51-1} \approx 0.00491$

(ii) 玩家恰好 51 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为  $\frac{1797}{374018} \approx 0.00480$ 。

两者之间的百分误差为：

$$\begin{aligned} &= \frac{0.00491 - 0.00480}{0.00480} \times 100\% \\ &= 2.29\% \end{aligned}$$

由于两者之间的百分误差值较少，所以模型对此情况作出了不错的预测。

(c) (i)  $P_{74} = \frac{2605}{374018} \left(\frac{371413}{374018}\right)^{74-1}$

$$\approx 0.00418$$

(ii) 玩家恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为  $\frac{15312}{374018} \approx 0.0409$ 。

两者之间的百分误差

$$\begin{aligned} &= \frac{0.00418 - 0.0409}{0.0409} \times 100\% \\ &\approx -89.9\% \end{aligned}$$

由于两者之间的百分误差值明显较大，所以模型对此情况作出的描述并不准确。

3. 试根据 2(b) 和 2(c) 的结果, 评价该数学模型, 并作出解释。

由 2(b) 和 2(c) 的结果可见, 模型对于以 1 至 73 次抽奖获得该满星角色的情况有较准确的估算, 但对于需要以 74 和 75 次抽奖获得该满星角色的情况则并不准确。

主要原因是模型假设了「在第 1 至 75 次, 每次抽奖获得该满星角色的概率相同」, 但数据显示玩家于第 74 和 75 次抽奖才成功获得该满星角色的频数明显高于第 1 至 73 次的频数, 故模型对于描述玩家于第 74 次和第 75 次才成功获得该满星角色的抽奖情况并不准确。

4. 游戏开发者随后表示, 若玩家一直未能抽到该满星角色, 在第 74 次抽奖时, 获得该满星角色的概率会提高至  $q$ , 而且在第 75 次抽奖时, 其概率会进一步提高至  $r$ 。

试估算  $q$  和  $r$  的值。

采用玩家于第 74 和 75 次抽奖才成功获得该满星角色的相对频数, 作为  $P_{74}$  和  $P_{75}$  的估算值, 从而求得  $q$  和  $r$ 。

玩家恰好 74 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为  $\frac{15312}{374018}$ , 故

$$\frac{15312}{374018} = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{73} \times q$$

$$q = 0.0682$$

玩家恰好 75 次抽奖才获得该满星角色的相对频数为  $\frac{27084}{374018}$ , 故

$$\frac{27084}{374018} = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{73} \times (1 - q) \times r$$

$$\frac{27084}{374018} = \left(1 - \frac{2605}{374018}\right)^{73} \times (1 - 0.0682) \times r$$

$$r = 0.129$$

5. 问题 2 中的模型有什么限制？

1. 由于没有提供确实的获奖概率，模型中的  $p$  只是一个估算值，而且在问题 2 所运用的方法并非唯一估算  $p$  值的方法。
2. 没法应用于估算第 74 和 75 次的抽奖才成功获得该满星角色的情况。
3. 模型假设了提供数据的 374,018 名玩家是随机抽样的，但我们难以确保这假设真确。
4. 模型未考虑玩家中途放弃抽奖而没有中奖的情况。

6. 不少电玩游戏都会以道具或角色抽奖吸引玩家投入大量时间，请反思沉迷电玩的负面影响和如何建立健康的生活方式。

[参考答案]

沉迷电玩有成瘾的潜在可能性，且可能会对生活的各个方面产生负面影响，包括学业、人际关系和身体健康，例如影响视力和长期睡眠不足。

要建立健康的生活方式，我们应为自己分配合适的时间于学业、兴趣、运动、与家人朋友相处、休息等各方面。我们可培养多元化的兴趣，例如运动和艺术，从不同的兴趣中找到满足感。

## 附录

抽奖次数	频数
1	2605
2	2566
3	2476
4	2564
5	2437
6	2432
7	2359
8	2331
9	2347
10	2343
11	2330
12	2290
13	2262
14	2283
15	2125
16	2232
17	2269
18	2122
19	2246
20	2239
21	2185
22	2101
23	2069
24	2074
25	2010
26	2073
27	2044
28	2038
29	2014
30	1991

抽奖次数	频数
31	1990
32	1973
33	1928
34	1992
35	1929
36	1899
37	1981
38	1920
39	1876
40	1908
41	1936
42	1884
43	1867
44	1942
45	1860
46	1790
47	1766
48	1823
49	1790
50	1720
51	1797
52	1764
53	1654
54	1724
55	1815
56	1693
57	1768
58	1718
59	1678
60	1692

抽奖次数	频数
61	1733
62	1656
63	1676
64	1756
65	1659
66	1777
67	1672
68	1663
69	1681
70	1653
71	1649
72	1667
73	1688
74	15312
75	27084
76	187158