抽獎遊戲的數學模型

你是否想過在遊戲中獲得獎品的機會有多大？歡迎來到有關概率的數學建模活動！你將通過數學模型了解遊戲的獲獎概率，以裝備自己能夠運用數學作出明智的決策。

想像一下，你是一位玩家，希望了解在抽獎遊戲中獲得獎品的概率，你需要根據可用的數據來建立相關數學模型，當中便涉及應用概率的概念。此外，因應現實世界的複雜性，你將深入了解數學建模的相關假設和限制。

<u>抽獎遊戲的數學模型</u>

工作紙 1

<u>活動 1</u>

重溫概率的相關知識。

1. 考慮一個投擲六面骰子的活動。可能的結果是數字「1」、「2」、「3」、「4」、「5」和「6」。假設骰子是勻稱的，這意味著擲得每個數字出現的概率是相等的。寫出以下事件的概率。

   (a) 擲出「6」的概率。

   (b) 擲出不是「6」的數字的概率。

2. 你正在參加一個抽獎遊戲，這個遊戲涉及投擲在問題 1 中所描述的骰子，遊戲的玩法如下：

   - 若你擲出「6」，遊戲結束，並且你將會獲得獎品；
   - 若你擲出其他數字，你必須繼續投擲骰子，直到擲出「6」為止。

   求需要以下投擲骰子次數而獲獎的概率。

   (a) 只需 1 次。

   (b) 恰好 2 次。

   (c) 恰好 3 次。

3. 求在恰好需要 n 次投擲骰子才擲出「6」的概率，其中 n 為正整數。

4. 利用問題 3 的結果，計算在恰好需要投擲骰子 5 次才獲得獎品的概率。

<u>抽獎遊戲的數學模型</u>

工作紙 2

<u>活動 2</u>

根據所提供的數據建立抽獎遊戲的數學模型

在一個遊戲中，玩家有機會隨機抽取一個稀有的滿星角色。遊戲開發者表示若玩家一直未能抽到該滿星角色，「保證中獎機制」會確保玩家在第 6 次抽獎時必定會獲得該滿星角色。

我們從 40 名獲得該滿星角色的玩家收集了數據。下表總結了每位玩家為獲得該滿星角色所進行的抽獎次數。

抽獎次數	劃記	頻數
1	~~////~~	5
2	////	4
3	////	4
4	///	3
5	///	3
6	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	21

表一：40 名玩家以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的頻數

我們的目標是建立一個數學模型以描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。為了簡化問題，假設在第 6 次抽獎之前，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同。

1. 若以上表的數據建立所需要的數學模型，除了上述假設，你還會作出什麼假設以簡化問題？

____

____

____

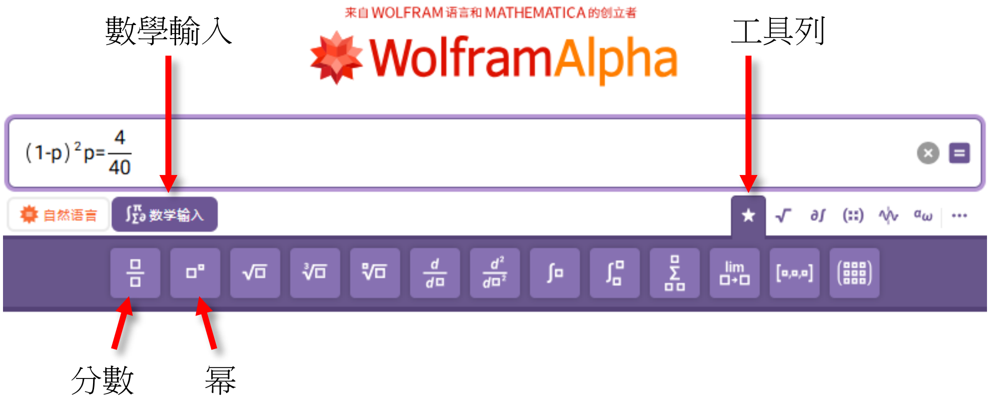
____

2. 在問題 1 前，我們假設了在第 1 至 5 次的抽獎中，每次獲得該滿星角色的概率相同，設此概率為 p 。試運用 p 及根據你在問題 1 制定的假設，建立一個數學模型，描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。

3. 若要求解問題 2 的數學模型，我們需要估算 p 的值。試根據以下情況及表一的數據，估算 p 的值。
   (a) 只需 1 次抽獎便獲得該滿星角色；
   (b) 恰好 2 次抽獎才獲得該滿星角色。

4. (a) 若考慮抽獎次數較多的情況，我們會得出較高階的方程。遇到這情況，我們可以使用網上的計算工具，例如 https://www.wolframalpha.com/ 來解方程。
以「恰好抽獎 3 次才獲得該滿星角色」的情況作為例子，我們可按以下步驟解相應的三次方程 $(1-p)^2 p = \frac{4}{40}$：

步驟	描述
i.	點選「數學輸入」和「★」工具列
ii.	輸入方程 （分別以「冪」和「分數」工具來輸入 $(1-p)^2$ 和 $\frac{4}{40}$）



步驟	描述
iii.	按鍵盤上的「輸入」鍵，可得出方程的解

(b) 就 4(a) 所得的 3 個方程的解，請按 p 在模型中的定義和表一的數據，判斷它們是否配合問題情境。

(c) 參考 4(a)的方法，根據以下獲得該滿星角色所需的抽獎次數，找出 p 的估算值。

(i) 恰好 4 次。　　(ii) 恰好 5 次。

5. (a) 我們在問題 3 和 4 中得到 5 個 p 的估算值，試建議一個綜合所有估算值的方法。

(b) 利用 (a) 的結果，更新問題 2 的模型。

6. 這模型有什麼限制。

7.　試利用模擬抽獎遊戲的連結：https://www.geogebra.org/m/pcjcybqb，收集 20 次獲得滿星角色所需抽獎次數的數據，加至下表中原有的 40 名玩家的數據，組成共 60 名玩家的抽獎數據。

抽獎次數	劃記	頻數
1	卌	
2	////	
3	////	
4	///	
5	///	
6	卌　卌　卌　卌　/	

根據以上的數據再次計算 p 的估算值及更新數學模型，描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。

<u>抽獎遊戲的數學模型</u>

工作紙 3

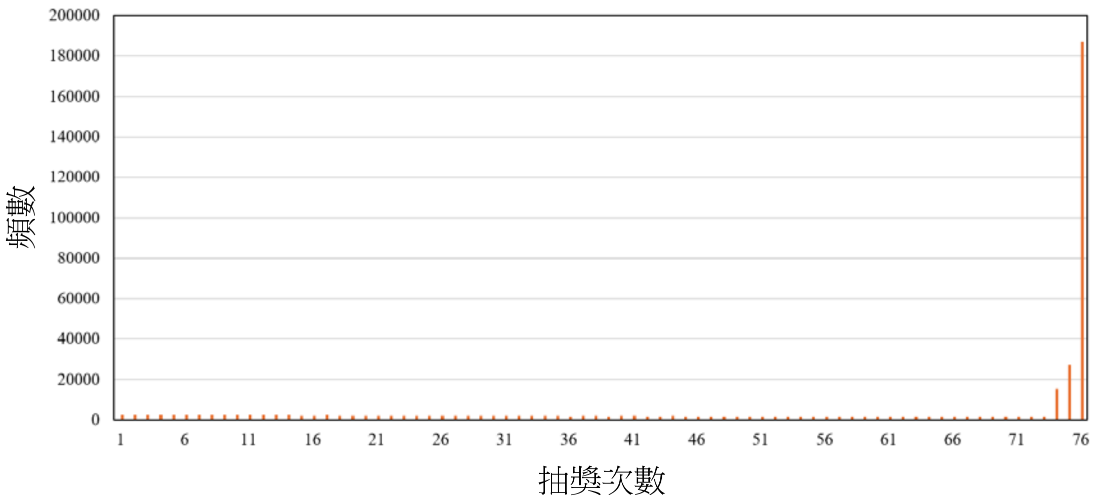
<u>活動 3</u>

根據更多的數據及較複雜的情景來建立數學模型

在另一款遊戲中，玩家有機會隨機抽取一個稀有的滿星角色。遊戲開發者表示若玩家一直未能抽到該滿星角色，「保證中獎機制」會確保玩家在第 76 次抽獎時必定會獲得該滿星角色。

在一個在線平台上，一些玩家報告了他們獲得該滿星角色所需的抽獎次數。下表和下圖顯示了共 374,018 名玩家所需的抽獎次數（詳細數據見附錄）。

抽獎次數	**1**	**2**	**…**	**51**	**…**	**74**	**75**	**76**
頻數	2,605	2,566	…	1,797	…	15,312	27,084	187,158



我們參考活動 2，先作出以下假設：

i.	每次抽獎為獨立事件
ii.	在第 1 至 75 次，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同
iii.	該 374,018 名玩家是隨機抽樣的

1. 設 p 為第 1 至 75 次抽獎時，每次抽獎獲得該滿星角色的概率。
   參考活動 2，建立一個數學模型，描述分別以 1 至 76 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。

___

___

___

2. 利用玩家於第 1 次抽獎便獲得該滿星角色的相對頻數，作為 p 的估算值。

   (a) 計算 p 的估算值並把該數值代入問題 1 的數學模型。

   (b) (i) 運用 (a) 所建立的模型，估算需要恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的概率。

   (ii) 通過比較玩家需要恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數，試以百分誤差來評估該模型的表現。

   (c) (i) 運用 (a) 所建立的模型，估算需要恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的概率。

   (ii) 通過比較玩家需要恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數，試以百分誤差來評估該模型的表現。

3. 試根據 2(b) 和 2(c) 的結果，評價該數學模型，並作出解釋。

4. 遊戲開發者隨後表示，若玩家一直未能抽到該滿星角色，在第 74 次抽獎時，獲得該滿星角色的概率會提高至 q ，而且在第 75 次抽獎時，其概率會進一步提高至 r。
試估算 q 和 r 的值。

5. 問題 2 中的模型有什麼限制？

6. 不少電玩遊戲都會以道具或角色抽獎吸引玩家投入大量時間，請反思沉迷電玩的負面影響和如何建立健康的生活方式。

抽獎次數	頻數	抽獎次數	頻數	抽獎次數	頻數
1	2605	31	1990	61	1733
2	2566	32	1973	62	1656
3	2476	33	1928	63	1676
4	2564	34	1992	64	1756
5	2437	35	1929	65	1659
6	2432	36	1899	66	1777
7	2359	37	1981	67	1672
8	2331	38	1920	68	1663
9	2347	39	1876	69	1681
10	2343	40	1908	70	1653
11	2330	41	1936	71	1649
12	2290	42	1884	72	1667
13	2262	43	1867	73	1688
14	2283	44	1942	74	15312
15	2125	45	1860	75	27084
16	2232	46	1790	76	187158
17	2269	47	1766		
18	2122	48	1823		
19	2246	49	1790		
20	2239	50	1720		
21	2185	51	1797		
22	2101	52	1764		
23	2069	53	1654		
24	2074	54	1724		
25	2010	55	1815		
26	2073	56	1693		
27	2044	57	1768		
28	2038	58	1718		
29	2014	59	1678		
30	1991	60	1692		

抽獎遊戲的數學模型

你是否想過在遊戲中獲得獎品的機會有多大？歡迎來到有關概率的數學建模活動！你將通過數學模型了解遊戲的獲獎概率，以裝備自己能夠運用數學作出明智的決策。

想像一下，你是一位玩家，希望了解在抽獎遊戲中獲得獎品的概率，你需要根據可用的數據來建立相關數學模型，當中便涉及應用概率的概念。此外，因應現實世界的複雜性，你將深入了解數學建模的相關假設和限制。

<u>抽獎遊戲的數學模型</u>

工作紙 1

<u>活動 1</u>

重溫概率的相關知識。

1. 考慮一個投擲六面骰子的活動。可能的結果是數字「1」、「2」、「3」、「4」、「5」和「6」。假設骰子是勻稱的，這意味著擲得每個數字出現的概率是相等的。寫出以下事件的概率。

   (a) 擲出「6」的概率。　　　　(b) 擲出不是「6」的數字的概率。

(a) $\frac{1}{6}$　　　(b) $\frac{5}{6}$

2. 你正在參加一個抽獎遊戲，這個遊戲涉及投擲在問題 1 中所描述的骰子，遊戲的玩法如下：

   - 若你擲出「6」，遊戲結束，並且你將會獲得獎品；
   - 若你擲出其他數字，你必須繼續投擲骰子，直到擲出「6」為止。

   求需要以下投擲骰子次數而獲獎的概率。

   (a) 只需 1 次。　　　　(b) 恰好 2 次。

   (c) 恰好 3 次。

(a) P (只需 1 次) = $\frac{1}{6}$

(b) P (恰好 2 次) = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

(c) P (恰好 3 次) = $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

3. 求在恰好需要 n 次投擲骰子才擲出「6」的概率，其中 n 為正整數。

P (恰好 n 次) = $(\frac{5}{6})^{n-1}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$

4. 利用問題 3 的結果，計算在恰好需要投擲骰子 5 次才獲得獎品的概率。

P (恰好 5 次)

$$= \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{5-1}$$

$$= \frac{625}{7776}$$

$$= 0.0804$$

<u>抽獎遊戲的數學模型</u>

工作紙 2

<u>活動 2</u>

根據所提供的數據建立抽獎遊戲的數學模型

在一個遊戲中，玩家有機會隨機抽取一個稀有的滿星角色。遊戲開發者表示若玩家一直未能抽到該滿星角色，「保證中獎機制」會確保玩家在第 6 次抽獎時必定會獲得該滿星角色。

我們從 40 名獲得該滿星角色的玩家收集了數據。下表總結了每位玩家為獲得該滿星角色所進行的抽獎次數。

抽獎次數	劃記	頻數
1	~~////~~	5
2	////	4
3	////	4
4	///	3
5	///	3
6	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	21

表一：40 名玩家以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的頻數

我們的目標是建立一個數學模型以描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。為了簡化問題，假設在第 6 次抽獎之前，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同。

1. 若以上表的數據建立所需要的數學模型，除了上述假設，你還會作出什麼假設以簡化問題？

〔參考答案〕

假設

1. 每次抽獎為獨立事件
2. 該 40 名玩家是隨機抽樣的

2. 在問題 1 前，我們假設了在第 1 至 5 次的抽獎中，每次獲得該滿星角色的概率相同，設此概率為 p 。試運用 p 及根據你在問題 1 制定的假設，建立一個數學模型，描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。

設 P_n 為在第 n 次才獲得該滿星角色的概率，所需的數學模型為：

$P_n = (1-p)^{n-1} \cdot p$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 及 $P_6 = 1$

3. 若要求解問題 2 的數學模型，我們需要估算 p 的值。試根據以下情況及表一的數據，估算 p 的值。
(a) 只需 1 次抽獎便獲得該滿星角色；
(b) 恰好 2 次抽獎才獲得該滿星角色。

(a) $p = \dfrac{5}{40}$

$= \dfrac{1}{8}$

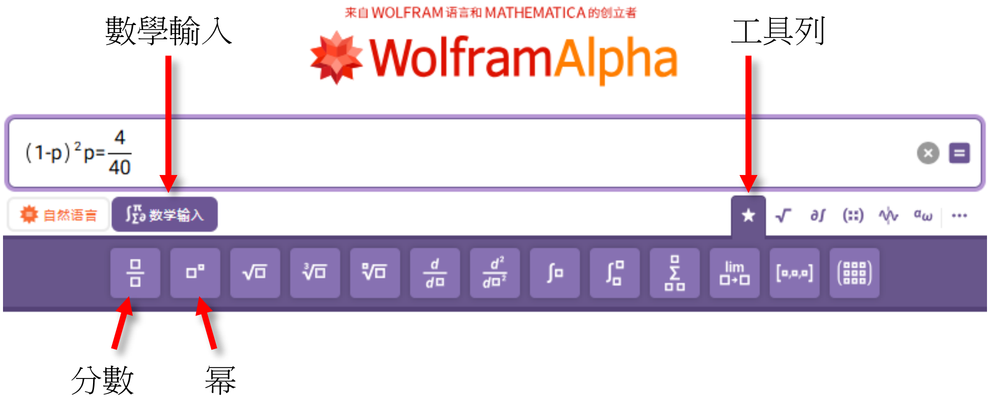
(b) $(1-p)p = \dfrac{4}{40}$

$-p^2 + p - \dfrac{1}{10} = 0$

$p = 0.113$ 或 $p = 0.887$ (不符合表一數據，不配合問題情境)

4. (a) 若考慮抽獎次數較多的情況，我們會得出較高階的方程。遇到這情況，我們可以使用網上的計算工具，例如 https://www.wolframalpha.com/ 來解方程。
以「恰好抽獎 3 次才獲得該滿星角色」的情況作為例子，我們可按以下步驟解相應的三次方程 $(1-p)^2p=\frac{4}{40}$：

步驟	描述
i.	點選「數學輸入」和「★」工具列
ii.	輸入方程 （分別以「冪」和「分數」工具來輸入 $(1-p)^2$ 和 $\frac{4}{40}$）



步驟	描述
iii.	按鍵盤上的「輸入」鍵，可得出方程的解

(b) 就 4(a) 所得的 3 個方程的解，請按 p 在模型中的定義和表一的數據，判斷它們是否配合問題情境。

由於 p 是概率，因此 $p\approx1.2796>1$ 並不合理。
若 $p\approx0.58739$，表一的頻數理應更大，因此以此作估算值並不配合問題情境。
考慮 $p\approx0.13305$，由於 $40\times0.13305=5.322$，這個數值與表一的數據相若，因此 $p\approx0.13305$ 可視為配合問題情境的估算值。

(c) 參考 4(a)的方法，根據以下獲得該滿星角色所需的抽獎次數，找出 p 的估算值。

(i) 恰好 4 次。 (ii) 恰好 5 次。

(i) $p = 0.104$ 或 $p = 0.449$ (不符合表一數據，不配合問題情境)

(ii) $p = 0.132$， $p = 0.282$ (不符合表一數據，不配合問題情境) 或 $p = 1.47$ (>1，不符合概率定義)

5. (a) 我們在問題 3 和 4 中得到 5 個 p 的估算值，試建議一個綜合所有估算值的方法。

(b) 利用 (a) 的結果，更新問題 2 的模型。

(a) 在以上的結果中，其中較配合問題情境的 5 個 p 的估算值為：

$$0.104，0.113，\frac{1}{8}，0.132，0.133$$

我們可以取它們的中位數 $\frac{1}{8}$ 作為 p 的估算值；

亦可以它們的平均值，

$(0.104407 + 0.112702 + 0.125 + 0.132318 + 0.133049) \div 5$

$= 0.121$

作為 p 的估算值。

(b) 若取 $p = \frac{1}{8}$，問題 2 的模型可更新為

$$P_n = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad 及 \quad P_6 = 1$$

若取 $p = 0.121$，問題 2 的模型則可更新為

$$P_n = (0.121)(0.879)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad 及 \quad P_6 = 1$$

6. 這模型有什麼限制。

1. 由於沒有提供確實的獲獎概率，我們只能假設每次抽獎的概率相同，及從表一的數據估算 p 的值以建立模型，而且在問題 5 所運用的綜合方法並非唯一的方法。
2. 模型的建立只依賴 40 位玩家的數據，若有更多隨機抽樣數據可更準確反映抽獎的概率。
3. 模型未考慮玩家中途放棄抽獎而沒有中獎的情況。

7. 試利用模擬抽獎遊戲的連結：https://www.geogebra.org/m/pcjcybqb，收集 20 次獲得滿星角色所需抽獎次數的數據，加至下表中原有的 40 名玩家的數據，組成共 60 名玩家的抽獎數據。

抽獎次數	劃記	頻數
1	~~////~~	
2	////	
3	////	
4	///	
5	///	
6	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	

根據以上的數據再次計算 p 的估算值及更新數學模型，描述分別以 1 至 6 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。

抽獎遊戲的數學模型
工作紙 3

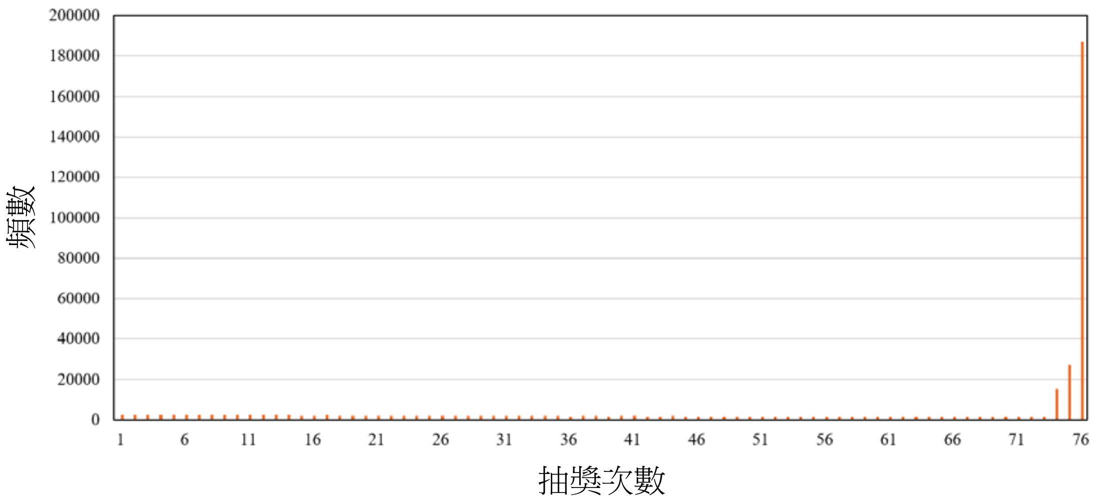
活動 3

根據更多的數據及較複雜的情景來建立數學模型

在另一款遊戲中，玩家有機會隨機抽取一個稀有的滿星角色。遊戲開發者表示若玩家一直未能抽到該滿星角色，「保證中獎機制」會確保玩家在第 76 次抽獎時必定會獲得該滿星角色。

在一個在線平台上，一些玩家報告了他們獲得該滿星角色所需的抽獎次數。下表和下圖顯示了共 374,018 名玩家所需的抽獎次數（詳細數據見附錄）。

抽獎次數	1	2	…	51	…	74	75	76
頻數	2,605	2,566	…	1,797	…	15,312	27,084	187,158



我們參考活動 2，先作出以下假設：

i.	每次抽獎為獨立事件
ii.	在第 1 至 75 次，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同
iii.	該 374,018 名玩家是隨機抽樣的

1. 設 p 為第 1 至 75 次抽獎時，每次抽獎獲得該滿星角色的概率。
參考活動 2，建立一個數學模型，描述分別以 1 至 76 次抽獎獲得該滿星角色的機會有多大。

設 P_n 為在第 n 次才獲得滿星角色的概率。

$$P_n = (1-p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, 3, \ldots 73, 74, 75 \qquad 及 \qquad P_{76} = 1$$

2. 利用玩家於第 1 次抽獎便獲得該滿星角色的相對頻數，作為 p 的估算值。

(a) 計算 p 的估算值並把該數值代入問題 1 的數學模型。

(b) (i) 運用 (a) 所建立的模型，估算需要恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的概率。

(ii) 通過比較玩家需要恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數，試以百分誤差來評估該模型的表現。

(c) (i) 運用 (a) 所建立的模型，估算需要恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的概率。

(ii) 通過比較玩家需要恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數，試以百分誤差來評估該模型的表現。

(a) 以 $p=\frac{2605}{374018}$ 作為其估算值，代入數學模型：

設 P_n 為在第 n 次才獲得該滿星角色的概率。

$$P_n = \left(1-\frac{2605}{374018}\right)^{n-1}\times\frac{2605}{374018}=\frac{2605}{374018}\left(\frac{371413}{374018}\right)^{n-1},\quad n=1, 2, 3, \ldots 73, 74,75$$

及 $P_{76}=1$

(b) (i) $P_{51}=\frac{2605}{374018}\left(\frac{371413}{374018}\right)^{51-1}\approx 0.00491$

(ii) 玩家恰好 51 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為 $\frac{1797}{374018}\approx 0.00480$ 。

兩者之間的百分誤差為：

$$=\frac{0.00491-0.00480}{0.00480}\times 100\%$$

$$=2.29\%$$

由於兩者之間的百分誤差值較少，所以模型對此情況作出了不錯的預測。

(c) (i) $P_{74}=\frac{2605}{374018}\left(\frac{371413}{374018}\right)^{74-1}$

$$\approx 0.00418$$

(ii) 玩家恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為 $\frac{15312}{374018}\approx 0.0409$ 。

兩者之間的百分誤差

$$=\frac{0.00418-0.0409}{0.0409}\times 100\%$$

$$\approx -89.9\%$$

由於兩者之間的百分誤差值明顯較大，所以模型對此情況作出的描述並不準確。

3. 試根據 2(b) 和 2(c) 的結果，評價該數學模型，並作出解釋。

由 2(b) 和 2(c) 的結果可見，模型對於以 1 至 73 次抽獎獲得該滿星角色的情況有較準確的估算，但對於需要以 74 和 75 次抽獎獲得該滿星角色的情況則並不準確。

主要原因是模型假設了「在第 1 至 75 次，每次抽獎獲得該滿星角色的概率相同」，但數據顯示玩家於第 74 和 75 次抽獎才成功獲得該滿星角色的頻數明顯高於第 1 至 73 次的頻數，故模型對於描述玩家於第 74 次和第 75 次才成功獲得該滿星角色的抽獎情況並不準確。

4. 遊戲開發者隨後表示，若玩家一直未能抽到該滿星角色，在第 74 次抽獎時，獲得該滿星角色的概率會提高至 q ，而且在第 75 次抽獎時，其概率會進一步提高至 r。
試估算 q 和 r 的值。

採用玩家於第 74 和 75 次抽獎才成功獲得該滿星角色的相對頻數，作為 P_{74} 和 P_{75} 的估算值，從而求得 q 和 r。

玩家恰好 74 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為 $\frac{15312}{374018}$，故

$$\frac{15312}{374018}=(1-\frac{2605}{374018})^{73}\times q$$

$$q=0.0682$$

玩家恰好 75 次抽獎才獲得該滿星角色的相對頻數為 $\frac{27084}{374018}$，故

$$\frac{27084}{374018}=(1-\frac{2605}{374018})^{73}\times(1-q)\times r$$
$$\frac{27084}{374018}=(1-\frac{2605}{374018})^{73}\times(1-0.0682)\times r$$
$$r=0.129$$

5. 問題 2 中的模型有什麼限制？

1. 由於沒有提供確實的獲獎概率，模型中的 p 只是一個估算值，而且在問題 2 所運用的方法並非唯一估算 p 值的方法。
2. 沒法應用於估算第 74 和 75 次的抽獎才成功獲得該滿星角色的情況。
3. 模型假設了提供數據的 374,018 名玩家是隨機抽樣的，但我們難以確保這假設真確。
4. 模型未考慮玩家中途放棄抽獎而沒有中獎的情況。

6. 不少電玩遊戲都會以道具或角色抽獎吸引玩家投入大量時間，請反思沉迷電玩的負面影響和如何建立健康的生活方式。

〔參考答案〕

沉迷電玩有成癮的潛在可能性，且可能會對生活的各個方面產生負面影響，包括學業、人際關係和身體健康，例如影響視力和長期睡眠不足。

要建立健康的生活方式，我們應為自己分配合適的時間於學業、興趣、運動、與家人朋友相處、休息等各方面。我們可培養多元化的興趣，例如運動和藝術，從不同的興趣中找到滿足感。

抽獎次數	頻數
1	2605
2	2566
3	2476
4	2564
5	2437
6	2432
7	2359
8	2331
9	2347
10	2343
11	2330
12	2290
13	2262
14	2283
15	2125
16	2232
17	2269
18	2122
19	2246
20	2239
21	2185
22	2101
23	2069
24	2074
25	2010
26	2073
27	2044
28	2038
29	2014
30	1991

抽獎次數	頻數
31	1990
32	1973
33	1928
34	1992
35	1929
36	1899
37	1981
38	1920
39	1876
40	1908
41	1936
42	1884
43	1867
44	1942
45	1860
46	1790
47	1766
48	1823
49	1790
50	1720
51	1797
52	1764
53	1654
54	1724
55	1815
56	1693
57	1768
58	1718
59	1678
60	1692

抽獎次數	頻數
61	1733
62	1656
63	1676
64	1756
65	1659
66	1777
67	1672
68	1663
69	1681
70	1653
71	1649
72	1667
73	1688
74	15312
75	27084
76	187158