

劉徽與割圓術

教育局數學教育組
2025年

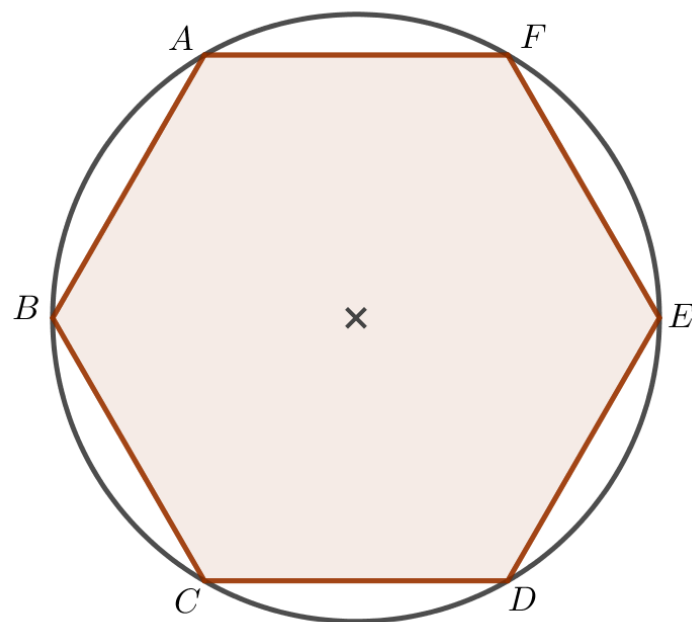
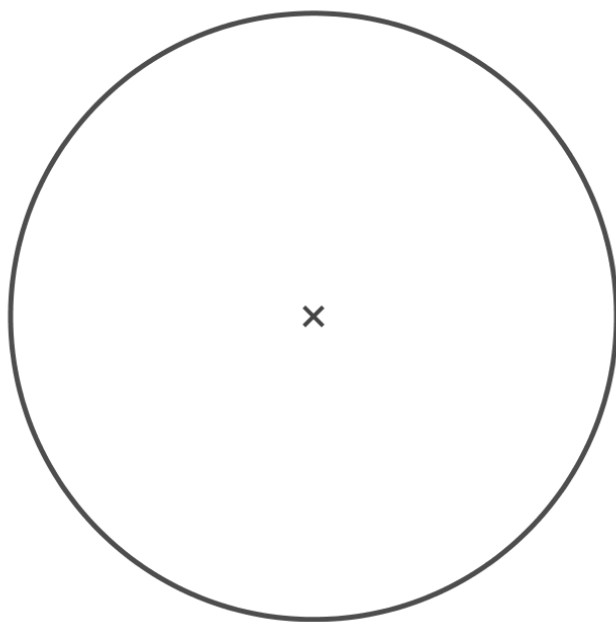
劉徽與割圓術

- ▶ 劉徽（約公元263年），中國魏晉時期數學家，生平不詳，為《九章算術》作注，並為《九章算術》的公式、解法提供證明，彌補了《九章算術》的不足。他運用「割圓術」，由正六邊形開始，演算到正九十六邊形，求得圓周率的值為**3.14**，後世稱之為「徽率」。

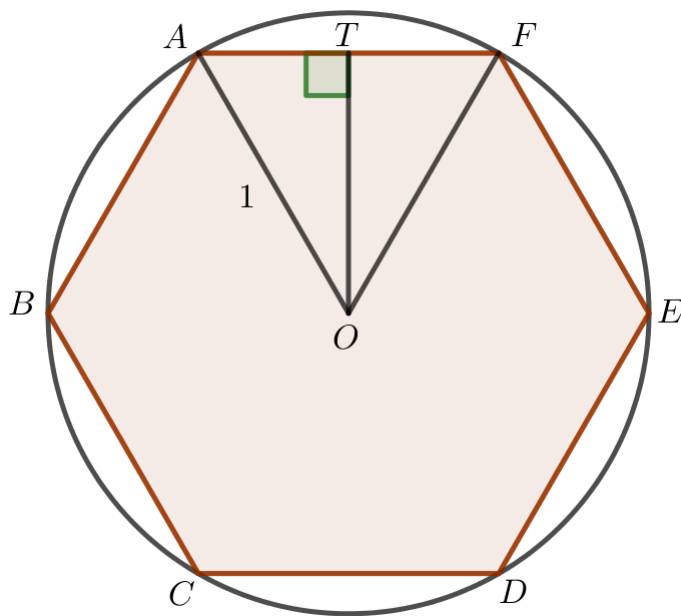


劉徽（約公元 263年）

「割圓術」，從圓內接正六邊形開始



「割圓術」，從圓內接正六邊形開始



設圓的半徑為 1。求圓內接正六邊形的面積。

$$OA = 1, AT = \frac{1}{2}, OT = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{三角形} OAF \text{ 的面積} = \frac{(1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{圓內接正六邊形的面積} = \frac{(6) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

由於圓面積 $= \pi(1)^2 = \pi$ ，若以圓內接正六邊形的面積作為圓面積的近似值，可求得 π 的近似值。

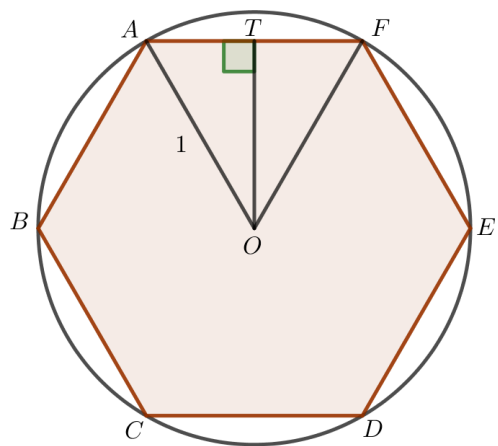
圓面積 $\approx$ 圓內接正六邊形的面積

$$\therefore \pi(1)^2 \approx \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

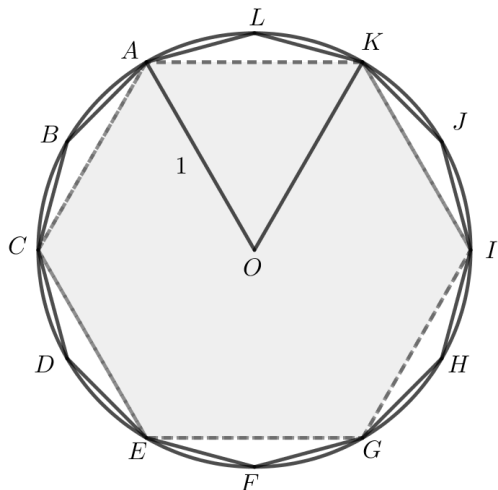
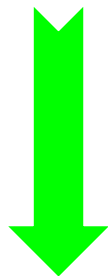
$$\pi \approx 2.59$$

不過誤差很大！

如何更準確估計 π 的值？



從圓內接正六邊形 $ABCDEF$ 開始，



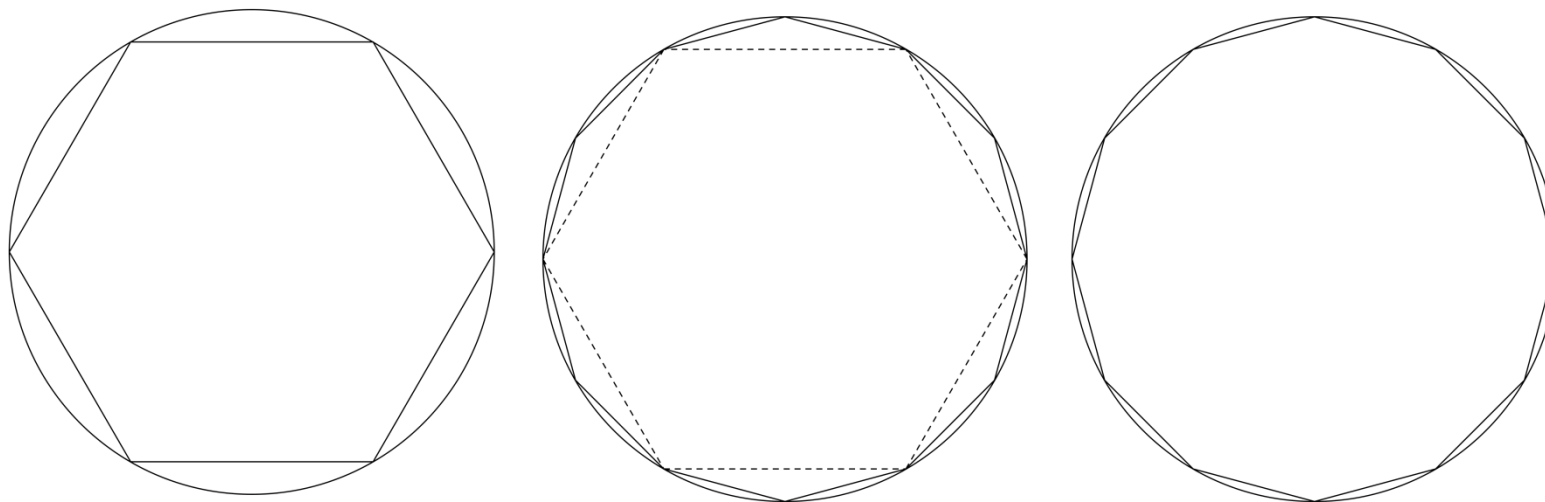
可作圓內接正十二邊形 $ABCDEFGHIJKL$ 。[參工作紙](#)

計算圓內接正十二邊形 $ABCDEFGHIJKL$ 的面積，
便可更準確估計 π 的值。

若要更準確，可繼續
計算圓內接正二十四
邊形面積
 $6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow \dots$

「劉徽與割圓術」

▶ 劉徽「割圓術」

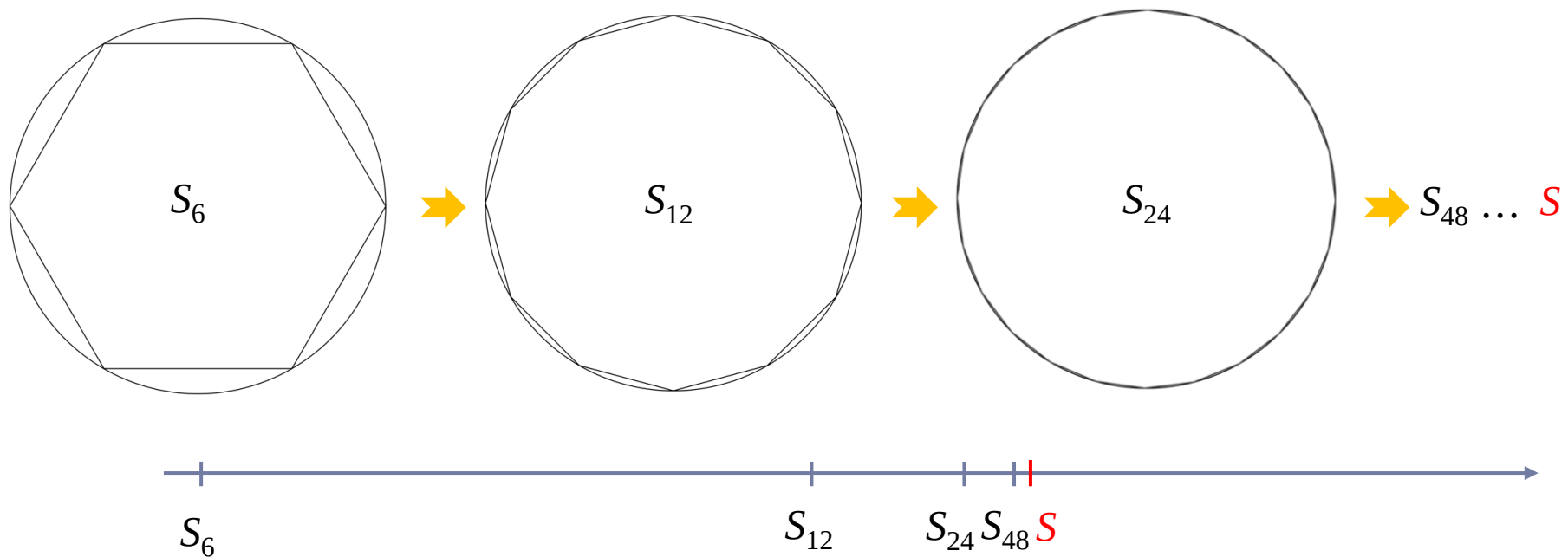


「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」

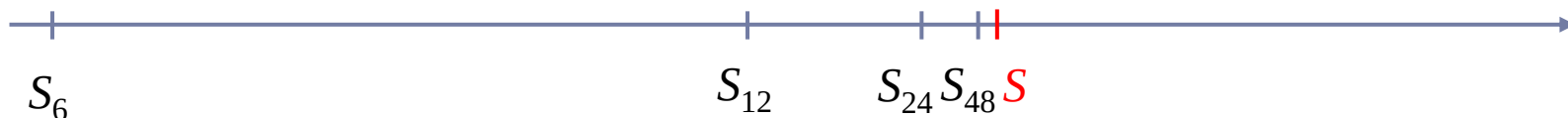
劉徽《九章算術》注

「劉徽與割圓術」

考慮半徑為 1 的圓，設 S 為圓面積（留意 $S = \pi$ ）， S_6 為圓內接正 6 邊形面積， S_{12} 為圓內接正 12 邊形面積，餘此類推。



「劉徽與割圓術」



$$S_6 = 2.598\dots$$

$$S_{12} = 3$$

$$S_{24} = 3.1058\dots$$

$$S_{48} = 3.1326\dots$$

$\dots$

$\dots$

在未曾知道 $\pi = 3.1415\dots$ 前，
怎知 S_6 、 S_{12} 、 S_{24} 、 S_{48} 增加下
去，會否增加至 $3.15\dots$ 或 $3.2\dots$ ？

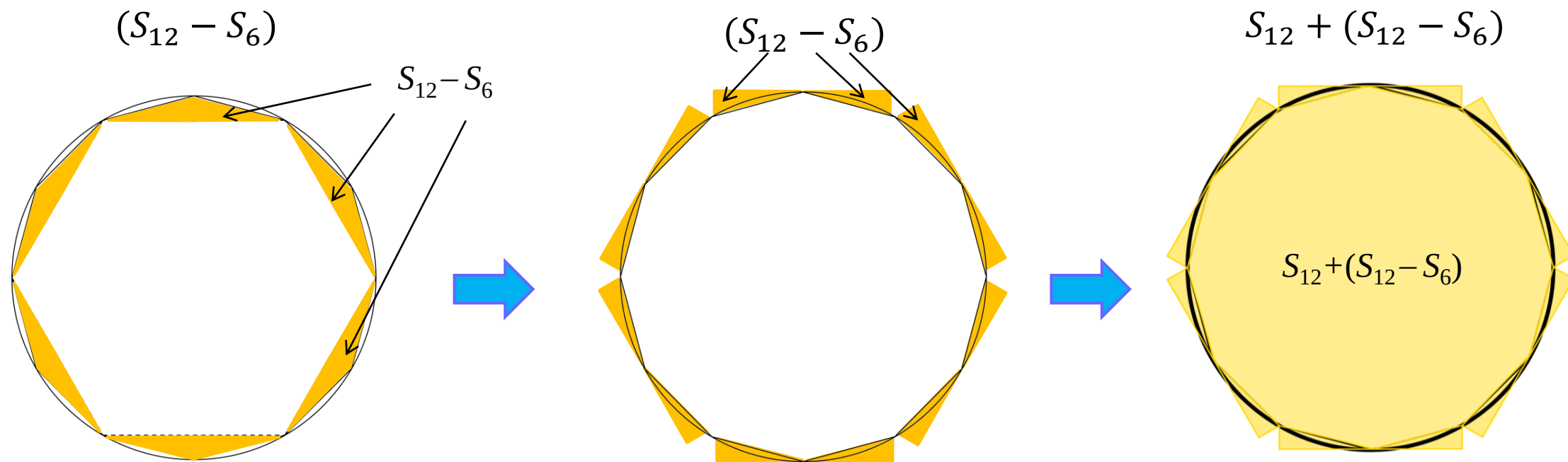
又怎知十分位是否準確？
計算至何時才準確至百分位？
計算至正九十六邊形可以嗎？

?

「劉徽與割圓術」

劉徽進一步利用**差幂**來計算 π 的準確值。

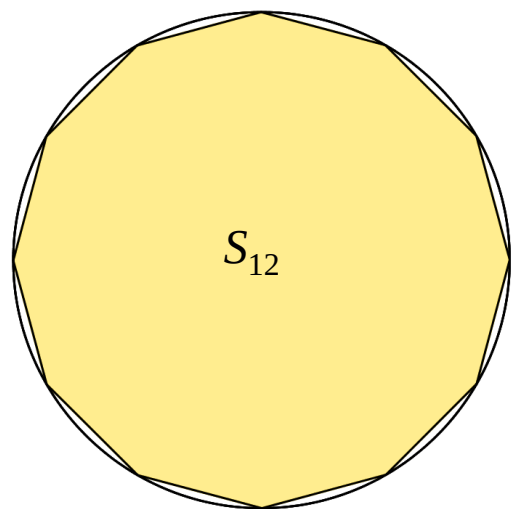
例如，差幂 $(S_{12} - S_6)$ [即下圖橙色小三角形]：



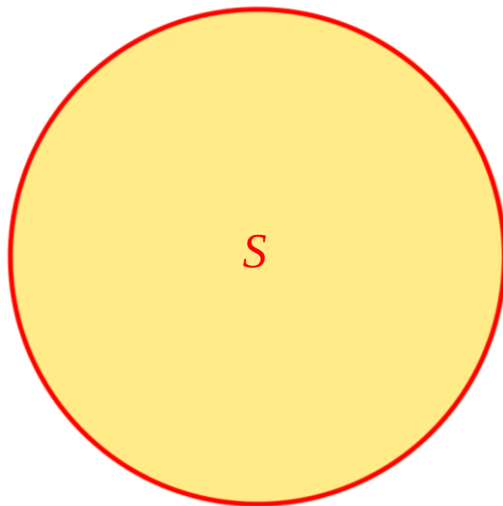
圓內接正十二邊形減去
圓內接正六邊形

「劉徽與割圓術」

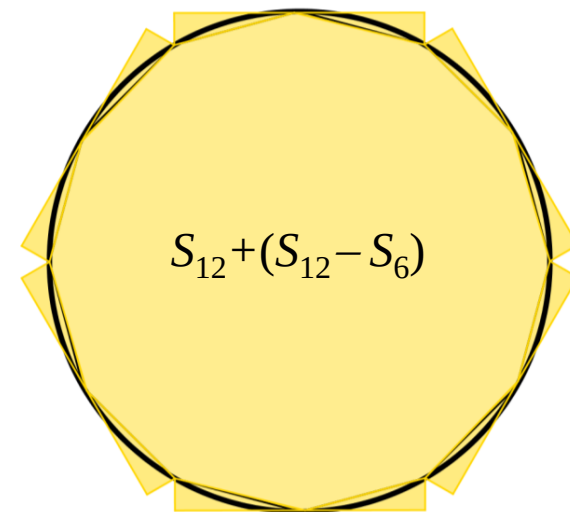
劉徽發現 $S_{12} + \underbrace{(S_{12} - S_6)}_{\text{差幂}}$ 比圓面積大，即



<



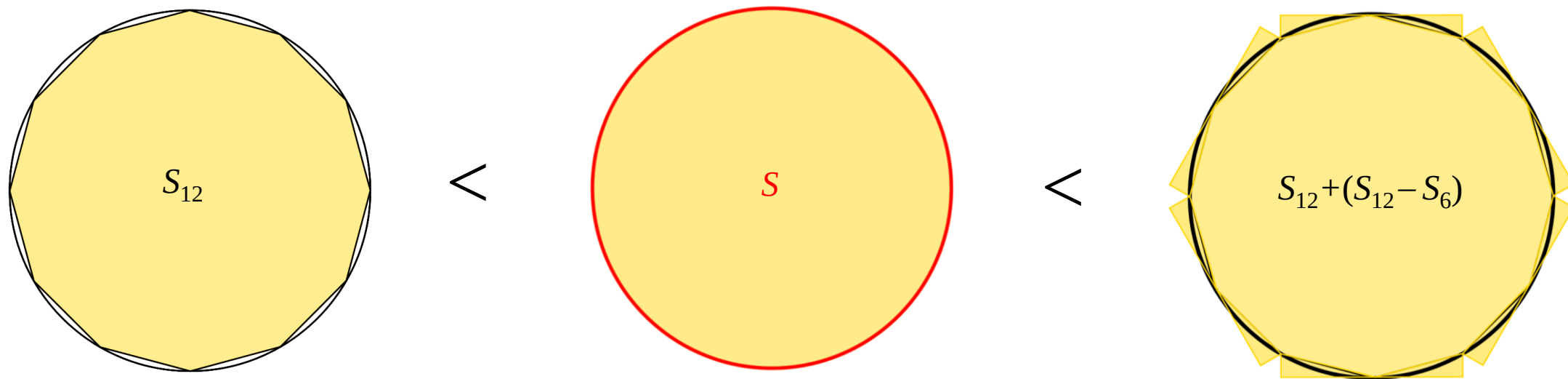
<



面積比圓面積小

面積比圓面積大

「劉徽與割圓術」



S 在 S_{12} 和 $S_{12} + (S_{12} - S_6)$ 之間，即 $S_{12} < \mathbf{S} < S_{12} + (S_{12} - S_6)$

$$S_6 = 2.5981\dots$$

$$S_{12} = 3 \quad (\text{從工作紙})$$

$$S_{12} + (S_{12} - S_6) = 3 + (3 - 2.5981\dots) = 3.4019\dots$$

即 $3 < \mathbf{S} < 3.4019\dots$  可以確定 **S** 的個位是「3」。

「劉徽與割圓術」

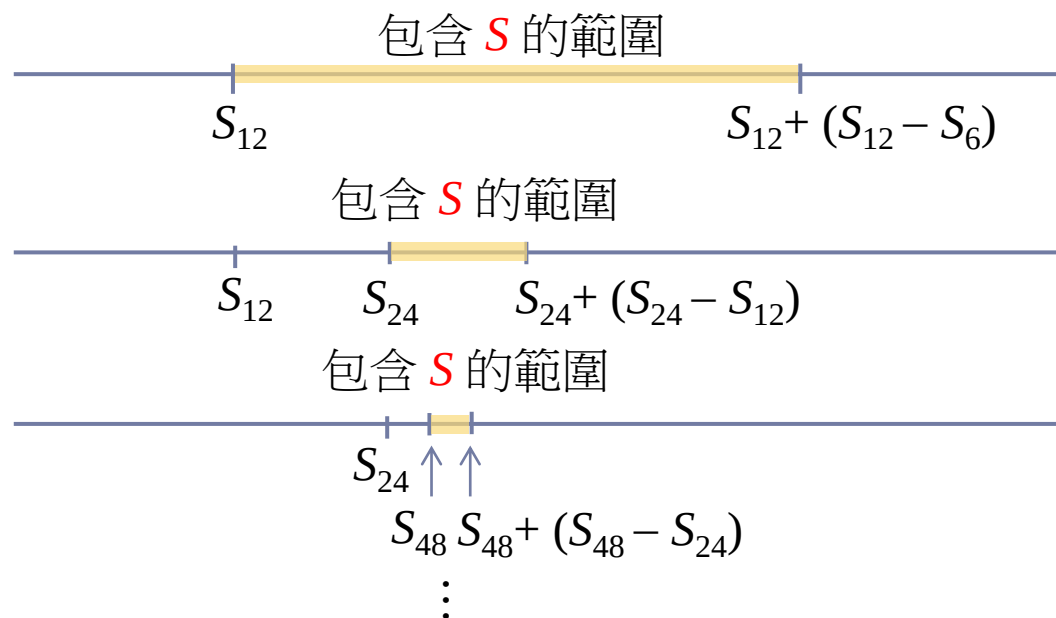
劉徽進一步考慮 S_{24} 和 S_{12} 的差幂、 S_{48} 和 S_{24} 的差幂等來確定 S 的其他位值。

類似於 $S_{12} < S < S_{12} + (S_{12} - S_6)$

可得 $S_{24} < S < S_{24} + (S_{24} - S_{12})$

$S_{48} < S < S_{48} + (S_{48} - S_{24})$

⋮



劉徽相信找出 S_6 、 S_{12} 、 S_{24} 、 S_{48} 、 S_{96} 、 S_{192} 、...，就能夠找到 S 的一個合適的近似值，從而計算 π 的近似值。

例如，藉計算 S_{24} 和 S_{48} ，及考慮 $S_{48} < S < S_{48} + (S_{48} - S_{24})$ ，可得：

$3.139... < S < 3.146...$ ← 可以確定 S 的十分位是「1」，即 $S = 3.1...$ 。

「劉徽與割圓術」

到底劉徽如何找出各圓內接正多邊形的面積？

劉徽是利用圓內接正多邊形的邊長來計算 S_6 、 S_{12} 、 S_{24} 、 S_{48} 、 S_{96} 、 S_{192} 等的值。
有關計算過程在此省略。

下表列出各圓內接正多邊形的面積及對應的 S 的取值範圍（準確至10位小數）：

面積 S_n	值
S_6	2.5980762114
S_{12}	3
S_{24}	3.1058285412
S_{48}	3.1326286133
S_{96}	3.1393502030
S_{192}	3.1410319509

邊數 n	正 n 邊形面積	圓面積	正 n 邊形面積 + 差幂
12	3	$< S <$	3.4019237886
24	3.1058285412	$< S <$	3.2116570825
48	3.1326286133	$< S <$	3.1594286853
96	3.1393502030	$< S <$	3.1460717928
192	3.1410319509	$< S <$	3.1427136987

$$S = \pi (l)^2 = \pi \quad 3.1410... < \pi < 3.1427...$$

$$\pi = 3.14 \text{ (準確至 2 位小數)}$$

「劉徽與割圓術」：徽率

實際上，劉徽以圓半徑 1 尺 = 10 寸

計算出 $S_{96} = 313\frac{584}{625}$ 方寸 和 $S_{192} = 314\frac{64}{625}$ 方寸

而 $S = 100\pi$ 方寸

因為 $S_{192} < S < S_{192} + (S_{192} - S_{96})$

所以 $314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{64}{625} + \left(314\frac{64}{625} - 313\frac{584}{625}\right)$

即， $314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{169}{625}$

劉徽捨去分數部分，取 $100\pi = 314$ ，即 $\pi = 3.14$ （準確至 2 位小數）。

（或 $\frac{157}{50}$ ，後人稱之為「徽率」）



「劉徽與割圓術」

參考資料：

1. 梁宗巨（1998）。《數學歷史典故》。台北：九章出版社。
2. 李儼、杜石然（2000）。《中國古代數學簡史》。台北：九章出版社。
3. 龔昇（2003）。《數學大師講數學：從劉徽割圓談起》。香港：智能教育。
4. 袁少明（1992）《中國古代數學史略》。河北科學技術出版社。
5. 吳讓泉（1992）《中國數學的知慧之光》。浙江人民出版社。
6. 袁小明（1998）。《數學誕生的故事》。台北：九章出版社。
7. 洪萬生（2004）。《三國兀裡袖乾坤——劉徽的數學貢獻》。科學發展，
2004年12月，384期。