數學百子櫃系列（九）

數學中年漢的自述

作者 劉松基

教育局
課程發展處數學教育組

ISBN 978-988-8006-88-5

目錄

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始蒐集和編撰一系列的文章，當中包括大學學者及資深老師的著作和講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《數學中年漢的自述》是這個系列的其中一冊，當中輯錄了劉松基老師的十多篇數學著作，和每篇之前展示作者情懷的新詩。詩中談及他本人的經歷和生活片段，而文中的內容更將列出的時序與數學掛上關係。書中除了講述不同範疇的數學內容之外，作者的際遇更讓我們重溫五十年代至今的一些香港發展歷史，緬懷過去和展望未來。文章除可供教師參考外，亦可作為學生的讀物。本文集內各文章的內容只是作者的個人意見，與教育局無關。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
(傳真：3426 9265　電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

作者簡介

劉松基老師，1980 年畢業於香港中文大學數學系，並於翌年在香港中文大學教育學院取得教育文憑。自大學畢業後，劉老師一直從事中學數學教育工作，亦熱心參與籌辦多項培養學生數學興趣的活動，其中包括香港數學競賽、香港數學競賽數學營及中學數學專題習作比賽。劉老師對寫作甚感興趣，他經常發表趣味數學小品，以提升學生學習數學的動機及興趣；其中的「數學聊齋」更是燴炙人口之作。劉老師一貫熱心教育，對培養學生數學興趣不遺餘力，貢獻良多。

倏忽人生經半百，浮槎教海廿六年；

回首細述前塵事，聊撰數題試算然。

1.

1956 － 呱呱墮地，初到世上

人生於世， 勞碌伊始；

襁褓孩童， 父母呵護。

家中四孩， 獨存么子；

惟恐難育， 只喚乳名。

若函數 $f(x)$ 對一切實數 x 和 y ，滿足

$$f(x + y) = f(x) \times f(y)，$$

且 $f(1) = 1956$

求證： 對一切實數 x，$f(x) > 0$ 。

證明： 利用反證法，

由於當 $x = 0$ 時，

$$f(0) = [f(0)]^2$$

$\therefore$ $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$

若 $f(0) = 0$，則

$$f(1) = f(1+0) = f(1)f(0) = 0$$

與 $f(1) = 1956$ 矛盾，

$\therefore \quad f(0) = 1$。

又 $\quad f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2 \geq 0$

下面只需証明對一切實數 x ，$f(x) \neq 0$。

假設存在一個實數 a，使 $f(a) = 0$，

因 $f(0) = f(a + (-a))$

$= f(a) \cdot f(-a)$

$= 0$

與 $f(0) = 1$ 矛盾。

所以，對一切實數 x，$f(x) > 0$ 。

2.

1960 － 醫院五天，慘歷折磨

高燒不退， 雙親惶恐；
急轉博愛， 留醫診治。
院期雖短， 度日如年；
日刺五針， 驚喊拆天。
慈親不休， 床帷照顧；
幸遇名醫， 危疾轉安。

甲乙兩只相同的量杯，分別裝着酒精和水，各裝到其容量的 $\frac{2}{3}$。現用甲杯酒精將乙杯注滿，然後再用乙杯中的混合液將甲杯注滿（這算是一次完整的操作），

(註： 每次操作完成後，甲杯注滿而乙杯只有 $\frac{1}{3}$ 杯液體。)

問： 經過多少次這樣的操作，甲、乙兩杯酒精濃度之差小于 $\frac{1}{1960}$?

解： 不妨設每只量杯的容量為 3 個立方單位，

且 x_k ， y_k $(k = 1，2，3，\cdots)$ 分別表示操作了 k 次後甲、乙兩杯溶液的酒精濃度，

則

$$y_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_1 = \frac{1 + 2 \times \frac{1}{3}}{3} = \frac{5}{9} \quad ;$$

$$y_2 = \frac{\frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9}}{3} = \frac{13}{27} \quad ,$$

$$x_2 = \frac{\frac{5}{9} + 2 \times \frac{13}{27}}{3} = \frac{41}{81}$$

$$y_3 = \frac{\frac{13}{27} + 2 \times \frac{41}{81}}{3} = \frac{121}{243} \quad ,$$

$$x_3 = \frac{\frac{41}{81} + 2 \times \frac{121}{243}}{3} = \frac{365}{729}$$

其實，

$$y_{k+1} = \frac{y_k + 2x_k}{3}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k + 2y_{k+1}}{3}$$

此處不難發現

$$x_1 = \frac{3+2}{3^2}\ ,\quad x_2 = \frac{3^3+3^2+3+2}{3^4}\ ,$$

$$x_3 = \frac{3^5+3^4+3^3+3^2+3+2}{3^6}$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\ ,\ y_2 = \frac{3^2+3+1}{3^3}\ ,$$

$$y_3 = \frac{3^4+3^3+3^2+3+1}{3^5}$$

進而我們猜想

$$x_n = \frac{3^{2n-1}+3^{2n-2}+\cdots+3+2}{3^{2n}} = \frac{9^n+1}{2\times 9^n}$$

$$y_n = \frac{3^{2n-2}+3^{2n-3}+\cdots+3+1}{3^{2n-1}} = \frac{9^n-3}{2\times 9^n}$$

上述猜想不難用數學歸納法証明。

事實上，當 $n = 1$ 時，由上面等式知正確。

假設 $x_k = \dfrac{9^k+1}{2\times 9^k}\ ,\quad y_k = \dfrac{9^k-3}{2\times 9^k}$

則

$$y_{k+1} = \frac{y_k+2x_k}{3} = \frac{\frac{9^k-3}{2\times 9^k}+2\times\frac{9^k+1}{2\times 9^k}}{3}$$

$$= \frac{9^{k+1}-3}{2\times 9^{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k+2y_{k+1}}{3} = \frac{\frac{9^k+1}{2\times 9^k}+2\times\frac{9^{k+1}-3}{2\times 9^{k+1}}}{3}$$

$$= \frac{9^{k+1}+1}{2\times 9^{k+1}}$$

由歸納法原理，猜想正確。

設第 k 次操作後，

$$x_k - y_k = \frac{2}{9^k} < \frac{1}{1960}$$

則　　$9^k > 3920$ ，

所以　$k \geq 4$ 。

即操作到第 4 次以後，甲、乙兩量杯溶液濃度之差就開始小于 $\frac{1}{1960}$。

3.

1961 － 鐘聲小學，童年夢始

鐘聲鐘聲， 發聾振聵；

讀書識字， 啟蒙有師。

小二年級， 西文始學；

A B C D， A man A pen。

求證： 若 n 與 1961 互素，

存在整數 λ $(0 < \lambda \le 1961)$，使得 $1961 \mid (n^{\lambda} - 1)$

（"$x \mid y$" 表示 x 可整除 y)。

證明： 考慮 1 ， n ， n^2 ， ⋯ ， n^{1961} 這 1962 個數，

若它們被 1961 除，可得出 1962 個餘數。

餘數可以是 0 ， 1 ， 2 ， ⋯ ， 1960

(共有 1961 個)。

由抽屜原理，至少有兩個數 n^r ， n^s ，

$$0 \le s < r \le 1961$$

它們被 1961 除之後所得的餘數相同，從而

$$1961 \mid (n^r - n^s) = n^s (n^{r-s} - 1)$$

但　n 與 1961 互素，

所以　$1961 \mid (n^{r-s} - 1)$

令　$\lambda = r - s$，

則　$1961 \mid (n^\lambda - 1)$，且 $0 < \lambda \le 1961$。

4.

1961 － 趣怪年份，顛倒如一

年份趣怪， 1961；
左右逆轉， 顛倒如一。
人生難遇， 百載奇逢；
莫嫌平凡， 煉題妙方。

已知：

$$(*)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{1961}^{1} = 1961 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1961}^2 = 1961 \\ \dots \\ x_1^{1961} + x_2^{1961} + \dots + x_{1961}^{1961} = 1961 \end{cases}$$

求證：

$$x_1^{2009} + x_2^{2009} + \dots + x_{1961}^{2009} = 1961$$

證明： 先證

(1) $x_1^{1962} + x_2^{1962} + \ldots + x_{1961}^{1962} = 1961$

事實上，若 x_1 ，x_2 ，…， x_{1961} 為方程

(2) $x^{1961} + a_1x^{1960} + \ldots + a_{1960}x + a_{1961} = 0$

的根，

則它們亦是方程

$$x^{1962} + a_1x^{1961} + \ldots + a_{1960}x^2 + a_{1961}x = 0$$

的根。

因此 有

$$x_k^{1962} + a_1x_k^{1961} + \ldots + a_{1960}x_k^2 + a_{1961}x_k = 0$$

將這 1961 個方程相加，得

$$\sum_{k=1}^{1961} x_k^{1962} + a_1\sum_{k=1}^{1961} x_k^{1961} + \ldots + a_{1960}\sum_{k=1}^{1961} x_k^2 + a_{1961}\sum_{k=1}^{1961} x_k = 0$$

利用 (*)，即

$$\sum_{k=1}^{1961} x_k^{1962} + 1961a_1 + \ldots + 1961a_{1960} + 1961a_{1961} = 0$$

或

(3) $$\sum_{k=1}^{1961} x_k^{1962} + 1961(a_1 + \ldots + a_{1960} + a_{1961}) = 0$$

同樣將 (2) 所得的 1961 個方程相加，得

$$\sum_{k=1}^{1961} x_k^{1961} + a_1 \sum_{k=1}^{1961} x_k^{1960} + \ldots + a_{1960} \sum_{k=1}^{1961} x_k + 1961a_{1961} = 0$$

利用 (*)，即

$$1961 + 1961a_1 + \ldots + 1961a_{1960} + 1961a_{1961} = 0$$

或 $$1961(1 + a_1 + \ldots + a_{1960} + a_{1961}) = 0$$

所以 $$a_1 + \ldots + a_{1960} + a_{1961} = -1$$

將這等式代入 (3)，可得

$$\sum_{k=1}^{1961} x_k^{1962} = 1961$$

反覆利用此法，可證得

$$\sum_{k=1}^{1961} x_k^{2009} = 1961$$

5.

1967 － 告別小學，入讀初中

中小英中， 鴻溝突現；
能力遜弱， 求學荊途。
父母欲助， 有心無力；
克己苦讀， 解難唯師。

求： 所有形如

$$x^2 - ax - b = 0 \text{ (其中 } a，b \text{ 為正整數)}$$

的方程個數，使其正根小于 1967。

解： 引理：

方程 $x^2 - ax - b = 0$ (其中 a，b 為正整數) 正根小于 1967 的充要條件是

(1) $a < 1967$，且

(2) $1967^2 - 1967a - b > 0$

"$\Rightarrow$" 設 $x_1\ (>0)$ ，x_2 為方程

$$x^2 - ax - b = 0 \text{ (其中 } a\text{，}b \text{ 為正整數)}$$

的兩根。

則它們滿足

(3) $0 < x_1 < 1967$

和

(4) $x_2 < 0$

(兩根的積 $= x_1x_2 = -b < 0$，而 $x_1 > 0$)

由 (3) + (4) 及兩根的和得

$$a = x_1 + x_2 < 1967$$

同時，由 (3)、(4) 及兩根的和得

(5) $0 < -x_2 = x_1 - a < 1967 - a$

由 (3) × (5) 得

$\therefore$ $0 < x_1(x_1 - a) < 1967(1967 - a)$

從而有

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 - ax_1 - b \\ &= (x_1^2 - ax_1) - b \\ &= x_1(x_1 - a) - b \end{aligned}$$

$$< 1967(1967 - a) - b$$

$$= 1967^2 - 1967a - b$$

" $\Leftarrow$ "　反之，若

(1)　$a < 1967$，

(2)　$1967^2 - 1967a - b > 0$

則由 (2)

$$b < 1967^2 - 1967a$$

設 x_1 為正根。

$$\therefore \quad x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \underline{a+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$< \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1967^2 - 1967a}$$

$$= \frac{a}{2} + \left|1967 - \frac{a}{2}\right|$$

而因 $a < 1967$，

所以 $x_1 < \frac{a}{2} + 1967 - \frac{a}{2} = 1967$。

由引理得，所求方程的個數等于滿足

(1)　$a < 1967$，且

(2) $1967^2 - 1967a - b > 0$

的數組 (a ， b) 的組數。

對於 a 的一個值，由 (2)

$$1967^2 - 1967a - b - 1 \geq 0$$

即 $1967^2 - 1967a - 1 \geq b$

只要 $b = 1，2，\cdots，1967^2 - 1967a - 1$ ，

便可滿足 $1967^2 - 1967a - 1 \geq b$ ，

所以對於 a 的一個值，有 $1967^2 - 1967a - 1$ 個 b，

滿足 $1967^2 - 1967a - b > 0$

遍取 $a = 1，2，3，\cdots，1966$ (< 1967，由 (1))

則所得方程的個數為

$$\sum_{a=1}^{1966}(1967^2 - 1967a - 1)$$

$$= 1966 \times 1967^2 - 1966 \times 1967^2 \times \frac{1}{2} - 1966$$

$$= \frac{(1967 - 1)(1967^2 - 2)}{2}$$

6.

1972 — 中學會考，戰戰兢兢

五年中學， 畢業在即；
會考當前， 戰戰兢兢。
成績公佈， 孫山名後；
心內如焚， 尋校四方。
惶恐七日， 幸覓學位；
續學港島， 高主教中。

求： 下列方程組的正實數解

$$\begin{cases} x^2 - 1972x + 1 = y^2 \\ y^2 - 1972y + 1 = z^2 \\ z^2 - 1972z + 1 = x^2 \end{cases}$$

解： 原方程組可化為

$$\frac{x^2+1-y^2}{x} = \frac{y^2+1-z^2}{y} = \frac{z^2+1-x^2}{z}$$

$$= 1972$$

$$\therefore \quad x^2y + y - y^3 - xy^2 - x + xz^2 = 0$$

$$y^2z + z - z^3 - yz^2 - y + yx^2 = 0$$

$$z^2x + x - x^3 - zx^2 - z + zy^2 = 0$$

三式相加得

$$x(x-y)^2 + y(y-z)^2 + z(z-x)^2 = 0$$

又 x，y，z 是正實數，所以只能有

$$x = y = z$$

代入原方程組，得

$$x = y = z = \frac{1}{1972}$$

7.

1974 － 大學門檻，初度跨入

投考港大，　患得患失；

試前沾恙，　遺缺考場。

性向文科，　不黯理學；

尚幸中大，　兼蓄並容。

紫金亭上，　聯合校園，

電飯煲內，　厠身四年。

問題：　設　$x_i \geq 1$　$(i = 1，2，\cdots，1974)$　。

求證：

$$2^{1973}\left(\prod_{i=1}^{1974} x_i + 1\right) \geq \prod_{i=1}^{1974} (1 + x_i) \quad ,$$

並對一般情況給予證明。

證明：　題目中的一般結果為

$$2^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i + 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \quad ,$$

其中　$x_i \geq 1$　$(i = 1，2，\cdots，n)$

$n = 1$ 時不證自明。

假設 $n = k$ 時，不等式成立。

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1}(1 + x_i) &= \left(\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i)\right)(1 + x_{k+1}) \\
&\le 2^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{k}x_i + 1\right)(1 + x_{k+1}) \\
&= 2^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{k}x_i + 1 + x_{k+1}\prod_{i=1}^{k}x_i + x_{k+1}\right) \\
&= 2^{k-1}(x + 1 + x_{k+1}x + x_{k+1})\text{，這裡 } x = \prod_{i=1}^{k}x_i
\end{aligned}$$

所以，只要證明

$$2^{k-1}(x + 1 + xx_{k+1} + x_{k+1}) \le 2^k(xx_{k+1} + 1)$$

即 $(x + 1 + xx_{k+1} + x_{k+1}) \le 2(xx_{k+1} + 1)$

即 $0 \le xx_{k+1} + 1 - x - x_{k+1}$

即 $0 \le (1 - x_{k+1}) + (xx_{k+1} - x)$

即 $0 \le (1 - x_{k+1}) - x(1 - x_{k+1})$

$= (1 - x_{k+1})(1 - x)$

原不等式便成立。

但最後的不等式是顯然的，因 $x_{k+1} \ge 1$ 和 $x \ge 1$ ，

所以，不等式得證。

8.

1974 － 撤手塵寰，痛失慈父

慈父患病， 藥石無靈；
開學之日， 撤手塵寰。
經濟拮据， 孤寡相依；
親友援助， 再續書緣。

題目： 正三稜錐的總表面面積不少於 $1974\sqrt{3}$，側稜長的最小值為 y，求最接近 y 的整數。

解： 設稜錐底面邊長為 x ， 則

$$S_{底} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S_{側} = \frac{x}{2}\sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}x\sqrt{4y^2 - x^2}$$

$$\therefore \quad S_{總} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3 \times \frac{1}{4}x\sqrt{4y^2 - x^2}$$

令 $a = \dfrac{4\,S_{總}}{\sqrt{3}}$

則 $a = x^2 + \sqrt{3(4y^2 - x^2)\,x^2}$

$\therefore$ $4x^4 - 2(6y^2 + a)\,x^2 + a^2 = 0$

因為 x^2 是實數，所以，判別式

$$4(6y^2 + a)^2 - 16\,a^2 \geq 0$$

解得 $-2y^2 \leq a \leq 6y^2$

即 $0 < a \leq 6y^2$ (因 $a > 0$)

從而

(1) $\dfrac{4\,S_{總}}{\sqrt{3}} \leq 6y^2$

同時由已知

(2) $1974\sqrt{3} \leq S_{總}$

$\therefore$ 由 (1) 和 (2) 得

$$1316 \leq y^2$$

又 $36^2 = 1296 < 1316 < 1369 = 37^2$

且 $37 - \sqrt{1316} > \sqrt{1316} - 36$

$\therefore$ 最接近 y 的整數為 36 。

9.

1978 — 學府之門，首次告別

四載求學， 數地雙修；
彈指瞬間， 高唱驪歌。
初戴方帽， 慰謝慈親；
前途擇業， 心中早算。
黌宮教學， 冀完宏願；
撒網謀事， 碰壁連連。
茫然失落， 不知所措；
研院餘額， 再拜師門。

若數列 $\{x_n\}$ 中，

$$x_0 = 1977 \text{ ，} \quad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n = 1，2，\cdots)$$

求證： $[x_{1978}] = 1978$，$[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

解： 因為 $x_0 = 1977 > 0$ 和 $\dfrac{1}{x_k} > 0$，

∴ 對 $k = 0，1，\cdots，x_k > x_{k-1} > \cdots > x_1 > x_0 > 0$

$$
\begin{aligned}
& x_{1978} \\
&= x_{1977} + \frac{1}{x_{1977}} \\
&= \left(x_{1976} + \frac{1}{x_{1976}}\right) + \left(\frac{x_{1976}}{(x_{1976}^2 + 1)}\right) \\
&< \left(x_{1976} + \frac{1}{x_{1976}}\right) + \frac{1}{x_{1976}} \\
&= x_{1976} + \frac{2}{x_{1976}} \\
&< x_{1975} + \frac{3}{x_{1975}} \\
&< x_{1974} + \frac{4}{x_{1974}} \\
&< \cdots \\
&< x_0 + \frac{1978}{x_0} \\
&= 1977 + \frac{1978}{1977} \\
&= 1978 + \frac{1}{1977}
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
& x_{1978} \\
&= x_{1977} + \frac{1}{x_{1977}} \\
&> x_{1977} + \frac{1}{x_{1978}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x_{1976} + \frac{1}{x_{1976}}\right) + \frac{1}{x_{1978}} \\
&> x_{1976} + \frac{1}{x_{1978}} + \frac{1}{x_{1978}} \\
&= x_{1976} + \frac{2}{x_{1978}} \\
&> \ldots \\
&> x_0 + \frac{1978}{x_{1978}} \\
&= 1977 + \frac{1978}{x_{1978}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{1978} &> 1977 + \frac{1978}{x_{1978}} \\
x_{1978}^2 - 1977x_{1978} - 1978 &> 0 \\
(x_{1978} - 1978)(x_{1978} + 1) &> 0 \\
x_{1978} - 1978 &> 0 \\
x_{1978} &> 1978
\end{aligned}
$$

從而 $1978 < x_{1978} < 1978 + \dfrac{1}{1977}$

$\therefore$ $[x_{1978}] = 1978$

10.

1980 － 學府之門，再度告別

純數應數， 初難抉擇；
隨機控制， 最終範疇。
心無旁騖， 埋首棺材；
圖書館內， 皓首窮經。
文章追索， 了無彼岸；
仿傚羅傘， 開合收張。
百遍既覽， 始有緒頭；
三文嘗撰， 已見所抒。
畢業篇章， 綜合而成；
耗時四月， 錯漏仍存。
修繕補缺， 恩師指導；
論文答辯， 告別師門。

設

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{x}{y},$$

其中 x 和 y 是互素的自然數，而等式左邊含有 1980 條分數線，

計算：$x^2 + xy - y^2$ 的值。

解：引理：

若 p，q 為正整數，
如果 p 和 q 互素，則 p 和 $p+q$ 亦互素。

假設 p 和 q 為互素的正整數，但 p 和 $p+q$ 並非互素，則存在 $1 \neq m$ 為正整數
使 $m \mid p$ 和 $m \mid (p+q)$，即 $m \mid q$。即存在 $1 \neq m$ 為正整數，使 $m \mid p$ 和 $m \mid q$，與 p 和 q 為互素的正整數矛盾。
$\therefore$ p 和 $p+q$ 亦互素。

現在，設上述含有 k 條分數綫的連分數為 $\frac{x_k}{y_k}$ (x_k，y_k 為正整數)，且對於所有 k 為正整數，x_k 和 y_k 均為互素的正整數。

則

$$\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} = \frac{1}{1+\frac{x_k}{y_k}} = \frac{y_k}{x_k+y_k}$$

即

(1) $$\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} = \frac{y_k}{x_k+y_k}$$

而由于 x_k 和 y_k 為互素，x_{k+1} ， y_{k+1} 互素，

$k = 1$，2，3，…

由引理得

y_k ， $x_k + y_k$ 亦互素

∴ 由 (1)

(2) $x_{k+1} = y_k$

(3) $y_{k+1} = x_k + y_k$

∴

(4) $y_{k+1} = y_{k-1} + y_k$ (由 (3) 和 (2))

(5) $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$ (由 (4) 和 (2))

∴ $\{ x_k \}$ 和 $\{ y_k \}$ 均為斐波那契數列

但因 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{1}$

$\therefore \quad x_1 = y_1 = 1$ ；

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{y_1}{x_1 + y_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad x_2 = 1$ ， $y_2 = 2$ ；

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{y_2}{x_2 + y_2} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \quad x_3 = 2$ ， $y_2 = 3$ ；

$\therefore \quad x_1 = 1$，$x_2 = 1$，$x_3 = 2$，$x_4 = 3$，$\cdots$，$x_k = F_k$，

其中 F_k 是斐波那契數列的第 k 項，即

$F_1 = 1$，$F_2 = 1$，$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ (k 為正整數)

而 $y_1 = 1$，$y_2 = 2$，$y_3 = 3$，$y_4 = 5$，$\cdots$，

$y_k = F_{k+1}$， (由 (2))

于是，

$x = x_{1980} = F_{1980}$ ， $y = y_{1980} = F_{1981}$

$\therefore \quad x^2 + xy - y^2$

$= F_{1980}^2 + F_{1980} F_{1981} - F_{1981}^2$

$$
\begin{aligned}
&= F_{1980}^2 + F_{1980}(F_{1980} + F_{1979}) \\
&\quad - (F_{1980}^2 + 2F_{1980}F_{1979} + F_{1979}^2) \\
&= \cdots \\
&= F_{1978}^2 + F_{1978}F_{1979} - F_{1979}^2 \\
&= \cdots \\
&= F_2^2 + F_2F_3 - F_3^2 \\
&= 1^2 + (1)(2) - 2^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

11.

1980 － 摯友相識，始於此年

人浮於事， 畢失相連；
師訓尚欠， 教席難謀。
重歸中大， 入讀教院；
摯友相識， 始於此年。
每事點提， 困遇相助；
凡經廿六， 友情如醇。

求： 求適合條件

(*) $xf(x-1) = (x-1980)f(x)$

的實數多項式 $f(x)$ 。

解： 由 (*) ，

$x \mid f(x)$ ， $(x-1980) \mid f(x-1)$

即 $x \mid f(x)$ ， $(x-1979) \mid f(x)$

可設

(1) $f(x) = x(x-1979)g_0(x)$，

這裏 $g_0(x)$ 是實數多項式。

將 (1) 代入 (*)

$$x(x-1)(x-1980)g_0(x-1) =$$

$$(x-1980)x(x-1979)g_0(x)$$

化簡後得等式

(1’) $(x-1)g_0(x-1) = (x-1979)g_0(x)$

∴ $(x-1) \mid g_0(x)$，$(x-1979) \mid g_0(x-1)$

即 $(x-1) \mid g_0(x)$，$(x-1978) \mid g_0(x)$

∴ 又可設

$$g_0(x) = (x-1)(x-1978)g_1(x)$$

這裏 $g_1(x)$ 是實數多項式。

將 $g_0(x)$ 代入 (1) 得等式

(2) $f(x) = x(x-1979) \times (x-1)(x-1978)g_1(x)$

將 (2) 代入 (*)，化簡後得等式

(2') $(x-2)g_1(x-1) = (x-1978)g_1(x)$

$\therefore$ $(x-2) \mid g_1(x)$ ，$(x-1978) \mid g_1(x-1)$

即 $(x-2) \mid g_1(x)$ ，$(x-1977) \mid g_1(x)$

$\therefore$ 又可設

$$g_1(x) = (x-2)(x-1977)g_2(x)$$

這裏 $g_2(x)$ 是實數多項式。

將 $g_1(x)$ 代入 (2) 得等式

(3) $$f(x) = x(x-1979) \times (x-1)(x-1978) \times (x-2)(x-1977)g_2(x)$$

將 (3) 代入 (*)，化簡後得等式

(3') $(x-3)g_2(x-1) = (x-1977)g_2(x)$

$\therefore$ $(x-3) \mid g_2(x)$ ，$(x-1977) \mid g_2(x-1)$

即 $(x-3) \mid g_2(x)$ ，$(x-1976) \mid g_2(x)$

∴ 又可設

$$g_2(x) = (x-3)(x-1976)g_3(x)$$

這裏 $g_3(x)$ 是實數多項式。

將 $g_2(x)$ 代入 (3) 得等式

$$(4) \quad f(x) = x(x-1979) \times (x-1)(x-1978) \times (x-2)(x-1977) \times (x-3)(x-1976)g_3(x)$$

將 (4) 代入 (*)，化簡後得等式

$$(4') \quad (x-4)g_3(x-1) = (x-1976)g_3(x)$$

用類似的方法，得等式

(k+1)

$$f(x) = x(x-1979) \times (x-1)(x-1978) \times (x-2)(x-1977) \times (x-3)(x-1976) \times \cdots$$

$$(x-(k-1))\ (x-(1979-(k-1)))\quad\times$$

$$(x-k)\qquad (x-(1979-k))g_k(x)$$

這裏　$g_k(x)$ 是實數多項式。

和等式

((k+1)')

$$(x-(k+1))g_k(x-1) = (x-(1979-k))g_k(x)$$

現考慮等式 (k + 1) 中最後一個因式，

設　$k + 1 = 1979 - k$

即　$k = 989$

即當　$k = 989$ 時，得等式

(990)

$$\begin{aligned} f(x) = x\qquad & (x-1979) \quad\times \\ & (x-1)(x-1978) \quad\times \\ & (x-2)(x-1977) \quad\times \\ & (x-3)(x-1976) \quad\times \\ & \cdots \end{aligned}$$

$$(x-988)\quad(x-991)\qquad\times$$
$$(x-989)\quad(x-990)\ g_{989}(x)$$

如果求得 $g_{989}(x)$，問題便解決了。

因 $g_{989}(x)$ 是實數多項式，
可設 α 為 $g_{989}(x)$ 的一個根。

將 $k = 989$ 代入等式 ((k+1)') 得

$$(x-990)g_{989}(x-1) = (x-990)g_{989}(x)$$

即有等式

(990') $g_{989}(x-1) = g_{989}(x)$

將

$$x = \alpha$$

代入等式 (990') 得

$$g_{989}(\alpha-1) = g_{989}(\alpha) = 0$$

即 $\alpha - 1$

亦是 $g_{989}(x)$ 的一個根

同理，

$$\alpha-2，\alpha-3，\alpha-4，\ldots$$

都是 $g_{989}(x)$ 的根。

即 $g_{989}(x)$ 有無窮多個根。

對於一個多項式，這是沒有可能的。

$\therefore$ $g_{989}(x)$ 是一個常數，β。

$$\therefore \quad f(x) = \beta x(x-1)(x-2)\cdots(x-1979)$$

12.

1981 — 學府之門，三度告別

一年容易，　再別校園；
文憑既獲，　從容覓職。
教院所授，　雖非妙策；
為師之道，　仍屬良方。

求：　　數列

$$\frac{1}{1981^2}\ ,$$

$$\left(1-\frac{1}{1981^2}\right)\frac{1}{1982^2}\ ,$$

$$\left(1-\frac{1}{1981^2}\right)\left(1-\frac{1}{1982^2}\right)\frac{1}{1983^2}\ ,$$

$$\cdots\ ,$$

$$\left(1-\frac{1}{1981^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}\ ,$$

$$\cdots$$

$$(n \geq 1980)$$

所有項的和。

解： 當 $n = 1980，1981，\cdots，$

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{1981^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(1981+1)(1981-1)}{1981^2} \times \frac{1983 \times 1981}{1982^2} \times$$

$$\cdots \times \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1980}{1981n(n+1)}$$

$$= \frac{1980}{1981}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1980}{1981}\left(\frac{1}{1980} - \frac{1}{n+1}\right)$$

從而數列所有項的和

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \frac{1}{1981}$$

13.

1981 － 初為人之患，戰兢上課堂

初為人患，　解惑順聯；
稚子相望，　心有悖然。
三載時光，　苦樂同參；
教學相長，　摸索自求。

實連續函數 $h(x)$ 對一切實數 x，y 滿足

$$h(\sqrt{x^2 + y^2}) = h(x)h(y)$$

且 $h(0) \neq 0$，$h(1) = 1981$，

求證：

$$h(x) = 1981^{x^2}$$

證明： 先證以下引理：對於所有實數 x，

(1) $h(x) = h(-x) = h(|x|)$

(2) $h(x) \geq 0$

(3) $h(\sqrt{n}\ x) = [h(x)]^n$，　$n = 1，2，3，\cdots$

(1)　　對於所有非負實數 x ，

$h(x)h(0)$

$= \quad h(\sqrt{x^2 + 0^2})$

$= \quad h(\sqrt{(-x)^2 + 0^2})$

$= \quad h(-x)\, h(0)$

即　　$h(x)h(0) \quad = \quad h(-x)h(0)$

$\therefore$　　$h(x) \quad = \quad h(-x)$　　　　(因 $h(0) \neq 0$)

所以，對於所有實數 x ，

$h(x) \quad = \quad h(-x) \; = \quad h(|x|)$

(2)　　對於所有非負實數 x ，

$h(x)$

$= \quad h\left(\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)$

$= \quad h\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad \times \quad h\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$\geq \quad 0$

所以　　對於所有實數 x ，

$h(x) \quad \geq \quad 0$　　　　(因 (1))

(3)　　由數學歸納法不難證得

$h(\sqrt{n}\ x) = [h(x)]^n$ ， $n = 1，2，3，\cdots$

現證：

(4) 當 x 是任意整數時，

$h(x) = 1981^{x^2}$

當 $x = 0$ 時

$h(0) = h(\sqrt{2} \times 0) = [h(0)]^2$

$\therefore$ $h(0) = 1$ (因為 $h(0) \neq 0$)

而 $1981^{x^2} = 1980^0 = 1$

$\therefore$ $h(x) = h(0) = 1981^{x^2}$

當 x 為任意整數時，

$h(x) = h(|x|)$

$= 1981^{|x|^2}$

$= 1981^{x^2}$

再證明：

(5) 當 $x = \dfrac{p}{q}$ ($p，q$ 為互素的整數) 時，

$h(x) = 1981^{x^2}$

因 $h(x) \geq 0$ (由 (2))

∴ 只要證明

$$[h(\frac{p}{q})]^{q^2} = 1981^{p^2}$$

(5) 便得證。

$$
\begin{aligned}
\text{左方} &= [h(\frac{p}{q})]^{q^2} \\
&= [h(\left|\frac{p}{q}\right|)]^{q^2} && \text{(因為 (1))} \\
&= h(\sqrt{q^2} \times \left|\frac{p}{q}\right|) && \text{(因為 (3))} \\
&= h(|p|) \\
&= 1981^{p^2} && \text{(因為 (4))} \\
&= \text{右方}
\end{aligned}
$$

因此，由 (4) 和 (5)，對於一切有理數 x，

$$h(x) = 1981^{x^2}\text{。}$$

再根據 $h(x)$ 的連續性，便得對一切實數 x，都有

$$h(x) = 1981^{x^2}\text{。}$$

14.

1984 － 入職教署，借調少警

入職教署， 借調少警；

學校類型， 天壤之別。

鐵皮教室， 酷暑嚴冬；

博弈審美， 無日不為。

1984 盞燈排成一行，用 1，2，3，…，1984 依次編號，每盞燈上有一開關，開始時全部燈都關着。如果有 1984 個人，第 1 人將編號為 1 的倍數的燈制開關全按一下，第 2 人將編號為 2 的倍數的燈制開關全按一下，…，第 k 人將編號為 k 的倍數的燈制開關全按一下，…，直到最後一人將編號為 1984 的燈制開關按一下，

問： 哪些燈還亮着？為什麼？

解： 設

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

為其質因數標準分解式。

則它的約數個數為

$$x = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1) \quad 。$$

若 x 為奇數，則 n 可被奇數個約數整除 (包括 1 和本身)，對應的燈制開關被按了奇數次，此時燈亮着，

而 x 為奇數的充要條件是 n 為平方數，

但在 1 到 1984 之間共有 44 個平方數，因此編號為 1，4，9，…，1936 的燈是亮着的。

15.

1984 － 冥中主宰，邂逅另半

姻緣由天， 強所難求；

冥中主宰， 邂逅另半。

社群小組， 驚艷一瞥；

倩影浮光， 展開追求。

衷情表白， 如鹿撞馬；

精誠所至， 喜獲芳心。

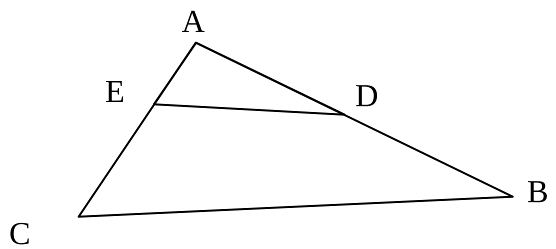
如圖，在 ΔABC 中， $BC = x$ ， $AC = y$ ，

$AB = z$ ，且 x ， y ， z 皆為整數，且在 AB 上存在一點 D，在 AC 上存在一點 E，

使 $AD = DE = EC = n$ ，

n 為正整數。

若 $4 \le y < z \le 6$，



求證： $n^{2+x}(yz+1) = 1984$

證明： 在 ΔABC 與 ΔADE 中，由餘弦定理得

$$\cos\angle A = \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} = \frac{n^2+(y-n)^2-n^2}{2n(y-n)}$$

∴

(1) $x^2 = y^2+z^2+yz-\dfrac{y^2z}{n}$

顯然， $n < y$

又由 $AD + DE > AE$

得 $n > \dfrac{y}{3}$

因此

(2) $\dfrac{y}{3} < n < y$

由 $4 \le y < z \le 6$，

得

$y = 4$ ， $z = 5$

或 $y = 4$ ， $z = 6$

或 $y = 5$ ， $z = 6$

分別代入 (1) 驗證知

只有當

$y = 5$ ， $z = 6$

時，

n 和 x 有正整數解

根據 (2)

$n = 2$ ， $x = 4$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad & n^{2+x}(yz+1) \\
&= 2^6(5 \times 6 + 1) \\
&= 1984
\end{aligned}
$$

16.

1987 － 積微慳儉，自置居所

事職六年，積微慳儉；
紅磡黃埔，首度置業。
陋室蝸居，愛侶不嫌；
安樂巢建，婚事從成。

問： x 個互不相同的正偶數與 y 個互不相同的正奇數總和為 1987，對於所有這樣的 x 和 y，$3x + 4y$ 的最大值是多少？

試証明你的結論。

證明： 設 $S = 3x + 4y$。

S 為正整數。

須作出 x 個互不相同的正偶數與 y 個互不相同的正奇數 (總和為 1987) 使 S 盡可能最大。

x 個互不相同的正偶數之和最小為

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2x = x(x+1)$$

y 個互不相同的正奇數之和最小為

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2y-1) = y^2$$

∴

(1) $$x(x+1) + y^2 \le 1987$$

顯然 (1) 表示 x-y 平面上的圓

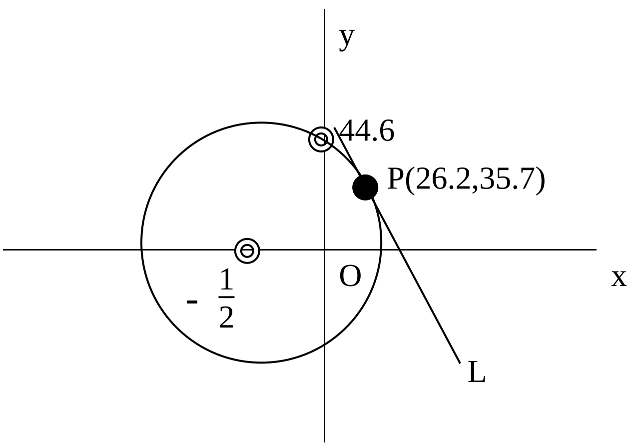
(2) $$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{7949}{4}$$

在第一象限的部分。

所求 S 的最大值則變成是平行直線

(3) $$3x + 4y = S$$

與 (2) 有交點的 S 的最大值。



一般地，S 的最大值在直線與圓在第一象限的切點 P(x，y)，

這時 P 滿足

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{y}{x+\frac{1}{2}}\right) = -1$$

或

(3) $3y = 4x + 2$ 。

和方程

(4) $x(x+1) + y^2 = 1987$

解 (3) 和 (4) 得

(5) $x = \frac{3}{10}\sqrt{7949} - \frac{1}{2} \doteqdot 26.2$

(6) $y = \frac{2}{5}\sqrt{7949} \doteqdot 35.7$

(7) $S = 3x + 4y = \frac{1}{2}(5\sqrt{7949} - 3) \doteqdot 221.4$

其實， $89^2 = 7921 < 7949 < 8100 = 90^2$

$\therefore$ $89 < \sqrt{7949} < 90$

(8) $221 < S < 223.5$

由 (7) 和 (8)

(9) $221 < S < 221.4$

∴ 由 (5)，(6) 和 (9)

在 P 點，x，y，S 都不是整數。

所以，我們將直線 L 向左平移，碰到第一個格點 Q(x，y) (x，y 為正整數) 時，則

$S = 3x + 4y$

便為最大；

而這個格點的橫坐標 y 應盡可能接近 35.7 (由 (6))。

此時取 y = 32，33，34，35，36，37，38

和解不等式

(1) $x(x + 1) + y^2 \leq 1987$

得 (x，y) =

(30，32)，(29，33)，(28，34)，(27，35)，(25，36)，(24，37)，(22，38)

而對應的 S =

218，219，220，221，219，220，218

在 (27，35)，S = 221。

事實上，取互不相同的正偶數

$$2，4，\cdots，50，52，60$$

與正奇數

$$1，3，\cdots，69$$

此時 $x = 27$ ， $y = 35$，

$$(2+4+\cdots+50+52+60)+(1+3+\cdots+69) = 1987$$

且 $S = 3x + 4y = 3\times 27 + 4 \times 35 = 221$

為最大值。

另法：　考察　$S^2 = (3x + 4y)^2$ 。

由柯西不等式得

$$(3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25(x^2 + y^2)$$

等號成立時當且僅當

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \text{ 。}$$

將　$x = \dfrac{3y}{4}$　代入

(1)　$x(x + 1) + y^2 \le 1987$

$$\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + \frac{3y}{4} + y^2 \le 1987$$

解得　$y < 35.7$

∴　$y_{最大} = 35$

而　$x = \dfrac{3y}{4} < 26.8$

∴　$x_{最大} = 27$

取互不相同的正偶數

$$2，4，\cdots，50，52，60$$

與正奇數

$$1，3，\cdots，69$$

此時　$x = 27$，　$y = 35$，

則　$(2+4+\cdots+50+52+60)+(1+3+\cdots+69) = 1987$

且　$S = 3x + 4y = 3\times 27 + 4 \times 35 = 221$　。

17.

1987 － 人世間內，老襯新添

戲謔老襯， 甜孜心坎；
人生路上， 甘苦共嘗。
愛曲譜奏， 新扉共適；
永結同心， 白首相偕。

已知

$$0 < x \le a，b，c，d，e \le y$$

$$x^2 + y^2 = 329xy \quad 。$$

求証： $25 \le (a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 1987$

證明： 先證

在 $0 < x \le e \le y$ 範圍內定義的實函數

$$F(e) = ev + \frac{u}{e} \qquad (u，v > 0)$$

的性質：

(1) F(e) 在

$e = \sqrt{\frac{u}{v}} = e_0$

時取極小值。

(2) 對於所有 $0 < x \leq e \leq y$ ，

F(e) 在 e_0 的右邊上升，而

F(e) 在 e_0 的左邊下降。

證明： F’(e)

$= v - \frac{u}{e^2}$

$= 0$ 時當 $e = \sqrt{\frac{u}{v}} = e_0$

∴ F’(e)

$= v - \frac{u}{e^2}$

$= \frac{v}{e^2}\left(e^2 - \frac{u}{v}\right)$

$= \frac{v}{e^2}(e + e_0)(e - e_0)$

∴ $F'(e) > 0$ 當 $e > e_0$ ，

$F'(e) < 0$ 當 $e < e_0$

∴ 證得 (1) 和 (2) 。

現證明不等式。

左邊不等式由算術－幾何平均不等式或柯西不等式立得。

為證右邊不等式，假定

$a，b，c，d$

給定，要求 $0 < x \le e \le y$ 使

$$
\begin{aligned}
W &= (u + e)\left(v + \frac{1}{e}\right) \\
&= uv + 1 + ev + \frac{u}{e} \\
&= (uv + 1) + \left(ev + \frac{u}{e}\right) \\
&= K + F(e)
\end{aligned}
$$

或 $F(e)$

有最大值，其中

$$
\begin{aligned}
u &= a + b + c + d \\
v &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\
K &= uv + 1 \\
F(e) &= ev + \frac{u}{e}
\end{aligned}
$$

均為正。

（在多個變元中，先固定某些量，再考慮一個或兩個變元，逐步調整）

因為 (1) 和 (2)，

$F(e)$ 在定義範圍的兩端點取最大值。

即在

$$e = x \text{ 或 } y$$

時，　$F(e)$ 從而 W 取最大值。

同理，當 a，b，c，d 取值 x 或 y 時，

W 亦取最大值。

不妨設 a，b，c，d，e 中有 k 個取值 x 和 $(5 - k)$ 個取值 y，

這裏 $k = 1$，2，3，4，5。

$\therefore$　W

$$= (a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)$$

$$= (kx + (5 - k)y)\left(\frac{k}{x} + \frac{(5-k)}{y}\right)$$

$$= k^2 + (5 - k)^2 + k(5 - k)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$= k(5 - k)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 25$$

因而當 $k = 2$ 或 3 時，W 值最大，

$\therefore$ $W_{\text{最大}}$

$$= 2(5-2)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + 25$$

$$= 6(329 - 2) + 25$$

$$= 1987$$

18.

1988 － 化骨小龍，初度面世

時隔一載， 天賜馨寧；
初為人父， 欣喜莫明。
餵奶換片， 甘為孺牛；
稚子孝敬， 斟茶初嚐。

求： 數列

$$1，2，2，3，3，3，\cdots，\underbrace{1988，\cdots，1988}_{1988\text{ 個 }1988}$$

所有項的和。

解：

$$1+2+2+3+3+3+\cdots+\underbrace{1988+\cdots+1988}_{1988\text{ 個 }1988}$$

$$= 1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+1988\times1988$$

$$= 1^2+2^2+3^2+\cdots+1988^2$$

$$= \frac{1}{6}\times1988\times(1988+1)\times(2\times1988+1)$$

19.

1988 － 常規中學，重回執教

少警生涯， 歲月如梭；
四年期滿， 調校梅窩。
摯友入職， 舟楫同道；
重回中學， 雀躍非常。
早晚浮海， 朝出暮歸；
六年光景， 白駒過場。

平面上給定 1988 個圓，這些圓覆蓋面積為 $S = 1989$ 的區域。

求證： 一定可以從中去掉若干個圓,使得其餘下的圓互不相交，而且所覆蓋着的面積不小于 221。

證明： 由於只有 1988 個圓，必存在一個直徑最大的圓，設其圓心為 O_1 ，半徑為 r_1 ，

則所有與圓 O_1 相交的圓必在以 O_1 為圓心，$3r_1$ 為半徑的圓內，

換句話說，圓 O_1 和所有與圓 O_1 相交的圓所蓋住的面積 $A_1 \le 9\pi r_1^2$。

在與圓 O_1 不相交的圓中取最大的圓 O_2，設其半徑為 r_2，

於是，圓 O_2 和所有與圓 O_2 相交的圓所蓋住的面積 $A_2 \le 9\pi r_2^2$。

繼續這一過程，可以得到 k 個圓 O_j，其半徑為 r_j，且 $A_j \le 9\pi r_j^2$ $(j = 1，2，\cdots，k)$。

這些圓不相交，且它們所蓋着的面積

$$
\begin{aligned}
&\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots + \pi r_k^2 \\
\ge\ & \frac{1}{9}(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \\
=\ & \frac{1}{9} S \\
=\ & \frac{1}{9}(1989) \\
=\ & 221
\end{aligned}
$$

20.

1991 － 人生世上，幾逢回年

回文之數， 天然渾成；
人生巧遇， 百載奇逢。
海灣局勢， 風雲變色；
弓張劍拔， 掃穴犁庭。
電子科技， 運籌帷幄；
傳統戰術， 從此銷聲。

設

$\{f(m)\}$ 是嚴格遞增的正整數數列， m 為正整數。

且

(1) $f(2) = 2$，

和對於任意的 n ， m 為正整數，有

(2) $f(nm) = f(n)f(m)$

求證： $f(1991) = 1991$ 。

證明： 由 (1)

$$
\begin{aligned}
2 &= f(2) \\
&= f(1 \times 2) \\
&= f(1)f(2) \qquad (\text{由 } (2)) \\
&= 2f(1)
\end{aligned}
$$

得 $f(1) = 1$

而且由 (2)

$$f(2^2) = f(2 \times 2) = f(2)f(2) = 2^2$$

$$f(2^3) = f(2^2 \times 2) = f(2^2)f(2) = 2^3$$

$\cdots$

故一般地由數學歸納法可證得

$$f(2^k) = 2^k \qquad (k = 0，1，2，3，\cdots)$$

因為 $2^{10} < 1991 < 2^{11}$

又因為 f 嚴格遞增，

$\therefore$ $f(2^{10}) < f(1991) < f(2^{11})$

即 $2^{10} < f(1991) < 2^{11}$

又因為 f 嚴格遞增，

有　$2^{10} < f(2^{10}+1) < \cdots < f(2^{11}-1) < 2^{11}$

從而　$f(2^{10}+k)$ ，$k = 1，2，\cdots，2^{10}-1$

是　2^{10} 與 2^{11}

之間　$2^{10}-1$ 個相異的整數

而　2^{10} 與 2^{11}

之間恰好有

$2^{11}-2^{10}-1=$

$2^{10}-1$ 個相異的整數

$\therefore$　$f(2^{10}+k) = 2^{10}+k$，$k = 1，2，\cdots，2^{10}-1$

特別地當 $k = 967$

$f(2^{10}+967) = 2^{10}+967 = 1991$ 。

另法，一般地，用同樣方法可證得

$f(m) = m$　(m 為正整數)

還可用反證法與數學歸納法證明。

$$f(m) = m \qquad (m\text{ 為正整數})$$

方法 1：反證法

先證

(3) $\quad f(m+j) \geq f(m)+j, \quad j=1, 2, \cdots$

因 f 嚴格增加，

$\therefore \quad f(m+j) > f(m+(j-1))$

$$\therefore \quad \begin{aligned} f(m+j) &\geq f(m+j-1)+1 \\ f(m+j-1) &\geq f(m+j-2)+1 \\ f(m+j-2) &\geq f(m+j-3)+1 \\ &\cdots \\ f(m+j-(j-1)) &\geq f(m+j-j)+1 \end{aligned}$$

將以上 j 條不等式相加，

$$f(m+j) \geq f(m)+j$$

證得 (3)。

則對於 $1 \neq m$ 為正整數，

$$
\begin{aligned}
f(m) &= f(1 + (m - 1)) \\
&\geq f(1) + (m - 1) \\
&= 1 + (m - 1) \\
&= m
\end{aligned}
$$

(4) $\quad f(m) \geq m$

因 $f(1) = 1$，所以若存在不等於 1 的正整數 M 使得

(5) $\quad f(M) > M$ 。

則因 $\quad 2^M > M$

$\therefore \quad 2^M - M$ 是正整數

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad f(2^M) &= f(M + (2^M - M)) \\
&\geq f(M) + (2^M - M) \quad \text{(由 (3))} \\
&> M + 2^M - M \quad \text{(由 (5))} \\
&= 2^M
\end{aligned}
$$

$\therefore$

(6) $\quad f(2^M) > 2^M$

但 $f(2^M) = f(2 \times 2^{M-1})$

$= f(2)\ f(2^{M-1})$

$= 2\ f(2^{M-1})$ (已知 $f(2) = 2$)

$= 2^2\ f(2^{M-2})$

$= \cdots$

$= 2^{M-1}\ f(2^{M-(M-1)})$

$= 2^{M-1}\ f(2)$

$= 2^M$ (已知 $f(2) = 2$)

這與 (6) 矛盾

∴ 由 (4) 證得

$$f(m) = m$$

方法 2：數學歸納法。

顯然

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2$$

設 $f(m) = m$

∴ $f(2m) = f(2)f(m) = 2f(m) = 2m$

$$\begin{aligned}\therefore \quad m &= f(m) \\ &< f(2m) \\ &= 2m\end{aligned}$$

即在 m 與 $2m$ 之間存在

$(m-1)$ 個不同大小

形如 $f(m+j)$ $(j = 1，2，\cdots，m-1)$ 個整數

比較存在 m 與 $2m$ 之間的 $m-1$ 個整數

$$m+1 < m+2 < \cdots < 2m-1$$

$\therefore \quad f(m+1) = m+1$

$\therefore$ 證得

$$f(m) = m \text{。}$$

21.

1994 － 慈母仙遊，音容銘記

哺養提攜， 三十八載；

劬勞未報， 昊天罔極。

慈親西歸， 騎鶴仙遊；

音容銘記， 縈繫夢中。

設 x，y 為實數，且方程

(*) $$\left(z^2+\frac{1994^2}{z^2}\right)+x\left(z+\frac{1994}{z}\right)+y=0$$ 有實根。

求： x^2+y^2 的最小值。

解： 設 $k = 1994$

由 (*) 配方得

$$\left(z+\frac{k}{z}\right)^2+x\left(z+\frac{k}{z}\right)+y-2k=0$$

或

(1) $t^2 + xt + y - 2k = 0$ 其中 $t = z + \frac{k}{z}$

因 $t = z + \frac{k}{z}$

∴ $z^2 - tz + k = 0$

因 (*) 有實根 z ，

∴ $z^2 - tz + k = 0$

亦有實根 z 。

∴ 判別式

$t^2 - 4(1)(k) \geq 0$

∴

(2) $t \geq 2\sqrt{k}$ 或 $t \leq -2\sqrt{k}$

設 $f(t) = t^2 + xt + y - 2k$

則 $f(t)$ 的圖像向上開，及由 (2)，它與 t 軸交在

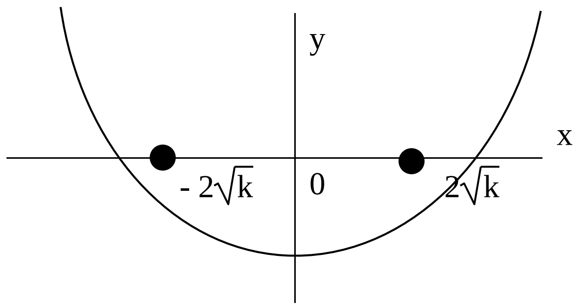
$(-2\sqrt{k}，0)$

的左邊

和

$(2\sqrt{k}，0)$

的右邊 (如圖)。



因此有

$$f(-2\sqrt{k}) \le 0$$

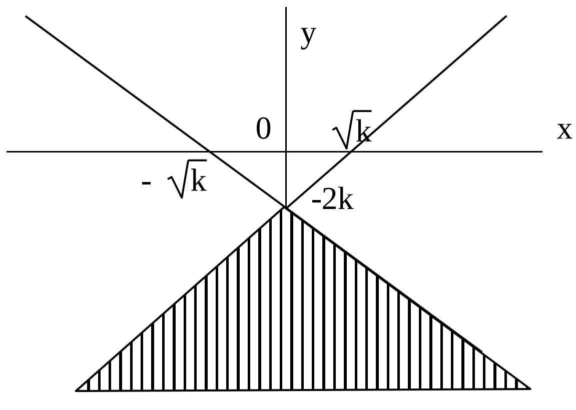
$$f(2\sqrt{k}) \le 0$$

即

(3) $-2x\sqrt{k} + y + 2k \le 0$

(4) $2x\sqrt{k} + y + 2k \le 0$

(3) 和 (4) 表示的區域見圖中的陰影部分，



所以 $x^2 + y^2$ 的最小值等於 $4k^2$ ，

即

$$4 \times 1994^2$$

22.

1994 － 調職上官，再臨北區

六年既畢， 求調他方；
未黯情由， 南徹北徙。
重臨舊地， 面貌一新；
廣廈遍佈， 序庠林立。
上水官中， 建校三年；
安身教學， 不願再遷。

求證： 在兩個相鄰的正整數的 1993 次冪之間，

不存在成等比數列的 1994 個不同的正整數。

證明： 如果存在正整數 n 和 1994 個正整數

$$x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 1994)$$

滿足

(1) $n^{1993} < x_1 < x_2 < \ldots < x_{1994} < (n+1)^{1993}$ 和

(2) $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_3}{x_2} = \ldots = \dfrac{x_{1994}}{x_{1993}}$

設 $\quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \ldots = \frac{x_{1994}}{x_{1993}} = \frac{r}{s}$ ， (由 (2))

r，s 為互素的正整數。

$\therefore \quad \left(\frac{r}{s}\right)^{1993} = \frac{x_2}{x_1} \times \frac{x_3}{x_2} \times \ldots \times \frac{x_{1994}}{x_{1993}} = \frac{x_{1994}}{x_1}$

(3) $\quad \left(\frac{r}{s}\right)^{1993} = \frac{x_{1994}}{x_1}$

又 $\quad 1 < \frac{r}{s}$ (由 (1))

得 $\quad s < r$

$\therefore$

(4) $\quad s + 1 \leq r$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{s} \leq \frac{r}{s}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{1993} &\leq \left(\frac{r}{s}\right)^{1993} \\ &= \frac{x_{1994}}{x_1} \qquad \text{(由 (3))} \\ &< \frac{(n+1)^{1993}}{n^{1993}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1993} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{1993} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1993}$$

即 $\quad \dfrac{1}{s} < \dfrac{1}{n}$ (因 s，n > 0)

$\therefore \quad n < s$

$\therefore \quad n + 1 < s + 1$

$\therefore \quad \dfrac{n+1}{s+1} < 1$

(5) $\quad \left(\dfrac{n+1}{s+1}\right)^{1993} < 1$

又因 $\quad x_{1994} = x_1\left(\dfrac{r}{s}\right)^{1993}$ (由 (3))

和 $\quad$ r，s 互素，x_{1994} 是正整數，

$\therefore \quad x_1$ 必能被 s^{1993} 整除。

不妨設

(6) $\quad x_1 = t\,s^{1993}$ ，t 為正整數，

$\therefore \quad x_{1994} = t\,r^{1993}$

$\therefore \quad t\,r^{1993} = x_{1994} < (n+1)^{1993}$ (由 (1))

$$t < \left(\frac{n+1}{r}\right)^{1993}$$

$$\le \left(\frac{n+1}{s+1}\right)^{1993} \quad \text{(由 (4))}$$

$$< 1 \quad \text{(由 (5))}$$

這與假設 (6) 的 $t \ge 1$ 矛盾，故命題為真。

23.

1995 － 遷徙居所，進駐沙田

驛馬頻動， 移徙增添；
先前調職， 居停再遷。
紅磡黃埔， 匆匆七載；
沙田廣場， 悠悠十年。
會堂展覽， 館內藏書；
規劃建設， 雖舊俱存。
遠眺吐露， 河畔馬鞍；
寧靜繁囂， 樂土自尋。

一個大多邊形內不重疊地放置 1995 個都與它相似的小多邊形。

求證： 這 1995 個小多邊形的總周長不大於多邊形周長的 $\sqrt{1995}$ 倍。

證明： 設這 1996 個相似多邊形為

M_k (k = 1，2，…，1995) 和

M ，

M 為最大的一個。

對應的面積為

A_k 和 A，

周長為

P_k 和 P，

M_k 與 M 的相似比為

λ_k $(0 < \lambda < 1)$

則

(1) $A_k = \lambda_k^2 A$

(2) $P_k = \lambda_k P$

由題意得

$A_1 + A_2 + \ldots + A_{1995} \leq A$

從而由 (1) 得

(3) $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{1995}^2 \leq 1$

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{1995})^2 \\
= \quad &(\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 1 + \ldots + \lambda_{1995} \times 1)^2 \\
\leq \quad &\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{1995}^2\right) \times (1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2) \\
= \quad &1995\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{1995}^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad &\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{1995} \\
\leq \quad &\sqrt{1995\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{1995}^2\right)} \\
\leq \quad &\sqrt{1995} \qquad\qquad (\text{由 } (3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad &P_1 + P_2 + \ldots + P_{1995} \\
= \quad &(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{1995})\, P \\
\leq \quad &\sqrt{1995}\; P \qquad\qquad (\text{由 } (4))
\end{aligned}$$

24.

1995 － 化骨小龍，再臨劉家

大龍拙長，　再育小龍；
舉家雀躍，　歡欣莫名。
拆字取音，　兄長擬名；
暟字旁邊，　與音相諧。

ΔPQR 三邊　p，q，r

滿足　$p^{1995} + q^{1995} + r^{1995} = 3\,x^{1995}$

求證：　此三角形面積的最大值為 $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$ 。

證明：　由於在給定周長的一切三角形中，

以等邊正三角形面積最大，

即若設

$$p + q + r = 3k$$

和　S_k 表示以 k 為邊長的等邊三角形面積

則

(1) $S_k \geq S_{\Delta PQR}$

由平均值不等式

$$\begin{aligned} & x^{1995} \\ = \ & \frac{1}{3}(p^{1995} + q^{1995} + r^{1995}) \\ \geq \ & \left(\frac{p + q + r}{3}\right)^{1995} \\ = \ & k^{1995} \end{aligned}$$

可得

(2) $x \geq k$

等號當且僅當

$$p = q = r$$

時成立。

設 S_x 表示以 x 為邊長的等邊三角形面積，則

由 (1) 和 (2)，

$\therefore$ $S_x \geq S_k \geq S_{\Delta PQR}$

$\therefore$ $S_{\Delta PQR}$ 的最大值是 $S_x = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$

25.

1997 － 香港回歸

中英八四， 聯合聲明；
香港回歸， 時訂九七。
割讓條約， 租借據文；
英庭統治， 到此告終。
基本法制， 人大釋權；
河隔兩地， 血脈相連。

$g(x)$ 是整係數多項式，

且

$$g(c) = c \qquad (c \text{ 為正整數})$$

$$g(0) = 1997 > c$$

求： c 的值。

解： 因 $g(0) = 1997$

可設 $g(x) = xh(x) + 1997$，

$h(x)$ 是整係數多項式

於是，$g(c) = ch(c) + 1997 = c$

即 $c[1 - h(c)] = 1997$

但 1997 為素數，

且 c 為小於 1997 的正整數，

所以只能有

$$c = 1$$

26.

2000 － 見証千禧

世紀千禧，　雙慶齊臨；

人生巧遇，　百世難逢。

四海騰歡，　全球見証；

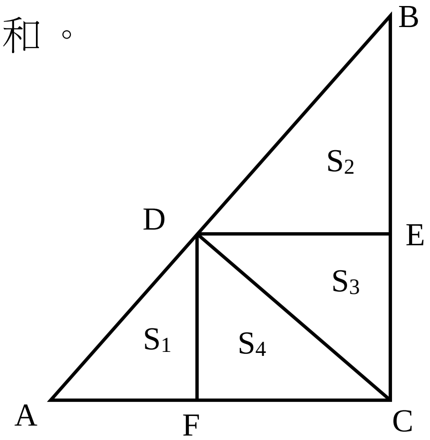
不分種族，　共願和平。

在內切圓面積為 2000 的直角 ΔABC 內作斜邊上的高，由它的垂足再作兩條直角邊的垂綫，將 ΔABC 分割成四個小直角三角形（如圖）。

在每一個小直角三角形中重複上述過程，於是每個小直角三角形又被分為四個更小的直角三角形。

若將此過程重複 2000 次，然後在所得的所有三角形中作內切圓，

試求：　這些內切圓面積的總和。



解：　其實，這些內切圓面積總和等於

已知直角 ΔABC 內切圓面積，

即為　2000　。

事實上，若記

直角 ΔABC 內切圓半徑與面積為

r 與 S，

內切圓其內四個直角三角形內切圓半徑與面積分別記為

r_k 與 S_k　$(k = 1，2，3，4)$，

則由　$\Delta AFD \sim \Delta DEB \sim \Delta CED \sim \Delta ACB$

和相似三角形內切圓面積之比等於相似比的平方，

得

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AD^2}{AB^2}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{BD^2}{AB^2}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{CD^2}{AB^2}$$

$$S_4 = S_3$$

又　$CD^2 = AD \times BD$ ，

$$\therefore \quad \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S}$$

$$= \frac{AD^2 + 2CD^2 + BD^2}{AB^2}$$

$$= \frac{AD^2 + 2AD \times BD + BD^2}{AB^2}$$

$$= \frac{(AD + BD)^2}{AB^2}$$

$$= 1$$

即　$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S$

這一結果意味着，每經一次分割，直角三角形的個數雖然增加了，但其內切圓面積之和保持不變。

因此，經過 2000 次分割以後，所得的所有三角形的內切圓面積總和仍為

2000 。

27.

2002 － 再逢回年

人生奇巧， 再遇回年；
相隔十載， 前事猶新。
聯課活動， 數科統籌；
崗位對易， 挑戰己能。
課程發展， 摸石過河；
策略方針， 共識難謀。
教學方法， 各施其技；
溝通分享， 紙上留痕。

已知 $x \geq 2002$ ， $y \geq 2002$，

求證： $\sqrt{2002(x-2002)} + \sqrt{2002(y-2002)} \leq \sqrt{xy}$

證明： 如圖，在長度 $2\sqrt{2002}$ 的綫段 BC 上，
作直角 ΔABE 和直角 ΔCDE，
E 為 BC 中點，

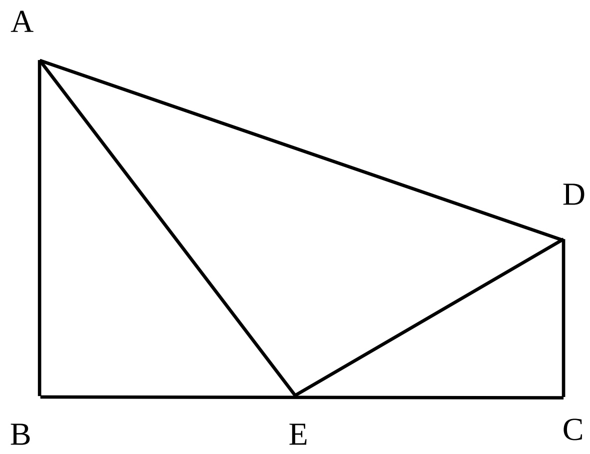
$\angle B = \angle C$ 為直角

$AB = \sqrt{y - 2002}$

$CD = \sqrt{x - 2002}$

$\therefore \quad AE = \sqrt{y}$

$DE = \sqrt{x}$



連 AD。

則 $S_{\text{梯形 } ABCD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CDE} + S_{\Delta ADE}$

即 $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x - 2002} + \sqrt{y - 2002}\right) \times 2\sqrt{2002}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2002}\sqrt{y - 2002} + \frac{1}{2}\sqrt{2002}\sqrt{x - 2002}$

$+ \frac{1}{2}\sqrt{xy}\ \sin\angle AED$

$\therefore \quad \sqrt{2002(x - 2002)} + \sqrt{2002(y - 2002)}$

$= \sqrt{xy}\ \sin\angle AED$

$\leq \sqrt{xy}$

28.

2004 － 初領上官老人牌

上官教學， 倏忽十年；

時光荏苒， 晶座誌憑。

循環甲子， 餘歲十二；

平穩雖願， 老驥繫心。

平面上給定 $\Delta A_1A_2A_3$ 及點 P_0，

定義

(1) $A_s = A_{s-3}$ ， $s \geq 4$。

構造點列 P_0，P_1，P_2，…，使得

P_{k+1} 為繞中心 A_{k+1} 順時針旋轉 120° 時

P_k 所達到的位置，$k = 0$，1，2，…。

若

(2) $P_{2004} = P_0$ ，

求證： $\Delta A_1A_2A_3$ 是等邊三角形。

證明： 在複平面內約定點 A 對應的複數為 A 。

記 $\alpha = \dfrac{2\pi i}{3}$ 。

∴

(3) $e^{-\alpha} \neq 1$

(4) $e^{-2004\alpha} = 1$

(5) $e^{(3j+1)\alpha} = e^{\alpha}$，$e^{(3j+2)\alpha} = e^{2\alpha}$，$e^{(3j+3)\alpha} = e^{3\alpha} = 1$

由題設有

$$P_k = A_k + e^{-\alpha} (P_{k-1} - A_k)$$

即

(6) $P_k - e^{-\alpha} P_{k-1} = A_k (1 - e^{-\alpha})$

在上式 (6) 中分別令

$$k = 2004，2003，\cdots，2，1$$

並將所得各式分別乘以

$$1，e^{-\alpha}，\cdots，e^{-2002\alpha}，e^{-2003\alpha}$$

再將所得各式相加，得

$$P_{2004} - e^{-2004\alpha} P_0 = (1 - e^{-\alpha}) \sum_{k=1}^{2004} A_k e^{-\alpha(2004-k)}$$

$\therefore \quad 0 = (1 - e^{-\alpha}) \sum_{k=1}^{2004} A_k\, e^{k\alpha}$ (由 (4) 和 (2))

$\therefore \quad \sum_{k=1}^{2004} A_k\, e^{k\alpha} = 0$ (由 (3))

即

$$\text{(7)} \quad \sum_{j=0}^{667} A_{3j+1}\, e^{(3j+1)\alpha} + \sum_{j=0}^{667} A_{3j+2}\, e^{(3j+2)\alpha} + \sum_{j=0}^{667} A_{3j+3}\, e^{(3j+3)\alpha} = 0$$

由題設 (1)

$$A_{3j+1} = A_1,\ A_{3j+2} = A_2,\ A_{3j+3} = A_3$$

又由 (5)

$$e^{(3j+1)\alpha} = e^{\alpha},\ e^{(3j+2)\alpha} = e^{2\alpha},\ e^{(3j+3)\alpha} = 1$$

(7) 變為

$$A_1 e^{\alpha} + A_2 e^{2\alpha} + A_3 = 0$$

由此，

$$A_3 - A_1 = -A_1(1 + e^{\alpha}) - A_2 e^{2\alpha}$$

即 $A_3 - A_1 = e^{\rho}(A_2 - A_1)$

這裏 $\rho = \dfrac{\pi i}{3}$

∴ $\Delta A_1A_2A_3$ 是等邊三角形。

29.

2005 － 上海觀課，眼界大開；上司照顧，由衷訴謝

九月金秋， 上海專訪；
課改聖地， 取經叩臨。
尚文楊浦， 初高學校；
觀課文化， 認受不同。
同工教學， 備課用心；
電化傳統， 相輔相承。
經驗分享， 全賴主動；
短聚交流， 見聞有增。
五日四夜， 離家獨往；
關山隔阻， 倍念妻兒。
眼疾纏擾， 黑暗迷濛；
生疏之地， 舉步維艱。
上司仁厚， 提點關心；
儼如長輩， 照顧有加。
由衷謝意， 筆墨難描；
銘謝之情， 惟存心中。

若

(1) $x^{2005}\sin(Y-Z)+y^{2005}\sin(Z-X)+$

$z^{2005}\sin(X-Y)=0$，

問 ΔXYZ 是什麼三角形？試証明你的結論。

解： ΔXYZ 是一個等腰三角形。

證明： 對任意的角 Y 和 Z，有

(2) $\sin^2 Y - \sin^2 Z = \sin(Y+Z)\sin(Y-Z)$

同時，在 ΔXYZ，

(3) $\dfrac{x}{\sin X} = \dfrac{y}{\sin Y} = \dfrac{z}{\sin Z} = k$

(4) $\sin^2 Y - \sin^2 Z = \sin X \sin(Y-Z)$ (由 (2))

$\therefore$ 由 (3)，

$$x^{2004}(y^2-z^2)+y^{2004}(z^2-x^2)+z^{2004}(x^2-y^2)$$

$$= x^{2004}k^2(\sin^2 Y-\sin^2 Z)$$

$$+ y^{2004}k^2(\sin^2 Z-\sin^2 X)$$

$$+ z^{2004}k^2(\sin^2 X-\sin^2 Y)$$

$$= x^{2004} k^2 \sin X \sin (Y - Z)$$
$$+ y^{2004} k^2 \sin Y \sin (Z - X)$$
$$+ z^{2004} k^2 \sin Z \sin (X - Y) \qquad (由\ (4))$$
$$= x^{2005} k \sin (Y - Z)$$
$$+ y^{2005} k \sin (Z - X)$$
$$+ z^{2005} k \sin (X - Y)$$
$$= 0 \qquad (由\ (1))$$

而 $\quad x^{2004}(y^2 - z^2) + y^{2004}(z^2 - x^2) + z^{2004}(x^2 - y^2)$

$$= x^{2004}(y^2 - z^2)$$
$$+ \quad y^{2004}[(- y^2 + z^2) - (x^2 - y^2)]$$
$$+ \quad z^{2004}(x^2 - y^2)$$
$$= (y^2 - z^2)(x^{2004} - y^{2004}) - (x^2 - y^2)(y^{2004} - z^{2004})$$
$$= (y^2 - z^2)(x^2 - y^2)(x^{2002} + x^{2000}y^2 + \cdots + y^{2002})$$
$$- (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(y^{2002} + y^{2000}z^2 + \cdots + z^{2002})$$
$$= (x^2 - y^2)(y^2 - z^2) \times$$
$$[(x^{2002}-z^{2002})+y^2(x^{2000}-z^{2000})+\cdots+y^{2000}(x^2 - z^2)]$$
$$= (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(x^2 - z^2)p \qquad (p > 0)$$
$$= 0$$

$\therefore$ $x^2 = y^2$ 或 $y^2 = z^2$ 或 $z^2 = x^2$

即 $x = y$ 或 $y = z$ 或 $z = x$

故 ΔXYZ 是一個等腰三角形。

30.

2006 － 磋跎半百歲，執教廿五年

人生雖半百， 執教廿五年；
授業重解惑， 傳道尚遠之。
黌宮苦樂地， 課室鬥智場，
笑談無成事， 戲謔歲磋跎。

四面體 ABCD 的六條稜之和為 2006 ，

P 為其內任意一點。

求證： $\frac{1}{3} \times 2006 < PA + PB + PC + PD < 2006$

證明： 如圖，

由 $AB < AP + PB$

$AC < AP + PC$

$AD < AP + PD$

$BC < BP + PC$

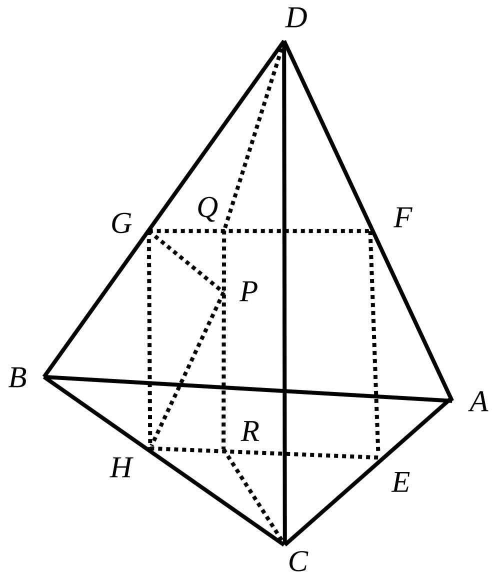
$BD < BP + PD$

$$CD < CP + PD$$

不難得到

$$2006 < 3(PA + PB + PC + PD)$$

即 $$\frac{1}{3} \times 2006 < PA + PB + PC + PD$$



過 P 作平面與 AB 和 CD 平行，

並與 CA，AD，DB，BC 分別交於 E，F，G，H

則 EFGH 是平行四邊形。

設平面 CDP 與平面 EFGH 的交綫為 QR，

則 $$\begin{aligned} & PC + PD \\ < \; & (PR + RC) + (PQ + QD) \\ = \; & (PR + PQ) + (RC + QD) \end{aligned}$$

$$= \quad RQ \quad + \quad (CR + DQ)$$

$$= \quad EF \quad + \quad CR + DQ$$

$$< \quad CD \quad + \quad (CH+CE) + (DG+DF)$$

即

(1) $\quad PC + PD < CD + CH + CE + DG + DF$

同理，

(2) $\quad PA + PB < AB + AE + AF + BG + BH$

(1) + (2)

$$PA + PB + PC + PD$$

$$< AB + (AE + CE) + (AF + DF) + (BG + DG) + (BH + CH) + CD$$

$$= \quad AB + AC + AD + BD + BC + CD$$

$$= \quad 2006$$

31.

任何年號 － 生生不息，綿遠流長

求證： 對於自然數 $x \geq 2$ ，

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(x-1)\sqrt{x}}}}} < 3$$

證明： 對此，可以證明一般的命題：

對於

$$2 \leq m \leq x$$

有

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\cdots\sqrt{(x-1)\sqrt{x}}}}} < m+1$$

解：

關於 m 用倒推歸納法。

當 $m = x$ 時，顯然有

$$\sqrt{x} < x + 1$$

設命題對於 $m = k \quad (2 < k \le x)$ 時成立。

即 $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\cdots\sqrt{(x-1)\sqrt{x}}}}} < k+1$

兩邊乘

$k-1$

則 $(k-1)\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\cdots\sqrt{(x-1)\sqrt{x}}}}}$

$< (k-1)(k+1)$

$= k^2 - 1$

$< k^2$

$\therefore \quad \sqrt{(k-1)\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{(x-1)\sqrt{x}}}}} < k$

即命題對於 $m = k-1$ 也成立。

在此命題中取 $m = 2$ 就得到要證的不等式。

[此題是由李端儀老師提供，僅此鳴謝!]

32.

2007 － 五秩進一

五秩臨進一，　壽歲再添延；
玩味年份數，　癮續自不停。
求學新階段，　黌宮瀚海深；
語寄兩兒字，　勤奮惜分陰。

2668 0628

（學校電話）

1. $26 \times (-6+80) + (6-2) \times 8 = 1956$
2. $(-2+6) \times 6 \times 80 + 6 \times (-2+8) = 1956$
3. $26 - 6 - 80 + 6! \times 2.8 = 1956$
4. $2 \times 6 \times (-6+8^0+6\times 28) = 1956$
5. $2 \times 6! + 6 \times 80 + 6 \times (-2+8) = 1956$
6. $(-2+6)! + [68+(0!)^6] \times 28 = 1956$
7. $2 + \sqrt{6^6} \times (8+0!) - 6 + 2 \times 8 = 1956$

3141 5927

（圓周率的前「八」位數字）

1.	$3 + (1+\sqrt{4}\times 15) \times \sqrt{9^2} \times 7$	=	1956
2.	$31 + 4 + 1 + 5 \times \sqrt{9} \times 2^7$	=	1956
3.	$(3+1) \times (4+159) \times \sqrt{2+7}$	=	1956
4.	$3! + (14-1) \times 5 \times (\sqrt{9}+27)$	=	1956
5.	$31 \times (4\times 1+59) + \sqrt{2+7}$	=	1956
6.	$(31+\sqrt{4}\times 1) \times 59 + (2+7)$	=	1956
7.	$31 + (4!+1) \times (5+\sqrt{9^2}!\div 7!)$	=	1956

2718 2818

（自然對數底 **e** 的前「八」位數字）

1.	$2^7 + 1828 \times 1^8$	=	1956
2.	$2 \times 718 + 2^{8+1} + 8$	=	1956
3.	$(-2+7-1)! \times 82 - \sqrt{8 \times 18}$	=	1956
4.	$\sqrt{2 + 7} \times (1^8\div 2+81) \times 8$	=	1956
5.	$\{2+7\times[-1+(8\div 2)!]\} \times \sqrt{8 \times 18}$	=	1956
6.	$(\sqrt{2 + 7})! \times 18^2 + \sqrt{8 \times 18}$	=	1956

7. $2 + 71 \times 8 \times 2 + 818 = 1956$

299 792 458

光陰似箭，日月如梭

（光速常數，**c = 299 792 458 m/s**）

1. $-(2+\sqrt{9})\times\sqrt{9}\times7-\sqrt{9}+2\times(4^5+8) = 1956$
2. $29 \times 9 \times 7 + \sqrt{9} - 2 + 4^5 \div 8 = 1956$
3. $299 \times 7 - 9^2 - (\sqrt{4}+5) \times 8 = 1956$
4. $(2+\sqrt{\sqrt{9}\times\sqrt{9}}+79\times2)\times4\times(-5+8) = 1956$
5. $29 \times (9\times7+\sqrt{9}) - 2^4 + 58 = 1956$
6. $2 - 9 + 979 \times 2 + \sqrt{4} - 5 + 8 = 1956$
7. $2 \times 9 \div 9 + 79 \times 24 + 58 = 1956$

利用 **1，9，5，6** 四個數字

衍生出 **0** 至 **100** 的「一百零一」個數字

$0 = 15 - 9 - 6$

$1 = 6 + 5 - 1 - 9$

$2 = 61 - 59$

$3 = 1 - 9 + 5 + 6$

$4 = (19 + 5) \div 6$

$5 = 9 - 6 \div 1.5$

$6 = 1 \times 9 - 5 \times .6$

$7 = 9 + 5 - 6 - 1$

$8 = 19 - 5 - 6$

$9 = 1 + 9 + 5 - 6$

$10 = 1 \times 9 - 5 + 6$

$11 = 1 + 9 - 5 + 6$

$12 = 16 + 5 - 9$

$13 = 9 + 6 \div 1.5$

$14 = 91 \div 6.5$

$15 = (5 - 1) \times 6 - 9$

$16 = 61 - 9 \times 5$

$17 = 1.6 \times 5 + 9$

$18 = 69 - 51$

$19 = 9 + 6 + 5 - 1$

$20 = 19 - 5 + 6$

$21 = 1 + 9 + 5 + 6$

$22 = 19 + 5 \times .6$

$23 = 16 \div .5 - 9$

$24 = 96 \div (5 - 1)$

$25 = 9 \div .1 - 65$

$26 = 91 - 65$

$27 = (1 + 5) \times 6 - 9$

$28 = 1 + 9 \times 5 \times .6$

$29 = 9 \times 5 - 16$

$30 = 19 + 5 + 6$

$31 = 19 + 6 \div .5$

$32 = 19 \div .5 - 6$

$33 = (5 - 1) \times 6 + 9$

$34 = 95 - 61$

$35 = 91 - 56$

$36 = 51 - 9 - 6$

$37 = 56 - 19$

$38 = 9 \times 5 - 1 - 6$

$39 = 9 \times 6 - 15$

$40 = 1 + 9 \times 5 - 6$

$41 = 16 \div .5 + 9$

$42 = (5 - 1) \times 9 + 6$

$43 = 59 - 16$

$44 = 19 \div .5 + 6$

$45 = 96 - 51$

$46 = 65 - 19$

$47 = 61 - 9 - 5$

$48 = 1 - 9 + 56$

$49 = 19 + 5 \times 6$

$50 = 9 \times 6 + 1 - 5$

$51 = 1 \times 9 \times 5 + 6$

$52 = 59 - 6 - 1$

$53 = 1 \times 59 - 6$

$54 = 69 - 15$

$55 = 65 - 9 - 1$

$56 = 1 \times 65 - 9$

$57 = 61 + 5 - 9$

$58 = 9 \times 6 + 5 - 1$

$59 = 1 \times 9 \times 6 + 5$

$60 = 9 \times 6 + 5 + 1$

$61 = 9 \times 5 + 16$

$62 = 1 \times 65 - \sqrt{9}$

$63 = 69 - 5 - 1$

$64 = 59 + 6 - 1$

$65 = 69 + 1 - 5$

$66 = 1 + 9 + 56$

$67 = 69 - 1 \div .5$

$68 = (1 + 6) \times 9 + 5$

$69 = 9 \times 6 + 15$

$70 = (9 + 6 - 1) \times 5$

$71 = 16 \times 5 - 9$

$72 = 1.6 \times 5 \times 9$

$73 = 69 + 5 - 1$

$74 = 1 \times 9 + 65$

$75 = 19 + 56$

	$76 =$	$51 \div .6 - 9$
*	$77 =$	$<16> - 59$
	$78 =$	$(9 + 5 - 1) \times 6$
	$79 =$	$95 - 16$
	$80 =$	$91 - 5 - 6$
	$81 =$	$96 - 15$
*	$82 =$	$1 + 96 - <5>$
	$83 =$	$(9 + 5) \times 6 - 1$
	$84 =$	$19 + 65$
	$85 =$	$1 + (9 + 5) \times 6$
*	$86 =$	$96 - <5 - 1>$
*	$87 =$	$<6 + 1> + 59$
	$88 =$	$95 - 1 - 6$
	$89 =$	$1 \times 95 - 6$
	$90 =$	$1 + 95 - 6$
	$91 =$	$1 \times 96 - 5$
	$92 =$	$1 + 96 - 5$
	$93 =$	$(5 - 1)! + 69$

94 = $96 - 1 \div .5$

95 = $5! - 19 - 6$

96 = $15.\dot{9} \times 6$

* 97 = $<9 + 5 - 1> + 6$

98 = 19.6×5

99 = $15 \times 6 + 9$

100= $95 + 6 - 1$

註： * 當 n 是正整數時，記$<n> = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

利用 1，9，9，5 (次子出生的年份) 四個數字

衍生出 1 至 100 的「一百」個數字

1 = $1 + (9 - 9) \times 5$

2 = $1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} - 5$

3 = $\sqrt{1 + 9 \div \sqrt{9} + 5}$

4 = $-1 - 9 + 9 + 5$

5 = $1 \times 9 \div 9 \times 5$

6 = $1 - 9 + 9 + 5$

$7 = 1 + 9 \div 9 + 5$

$8 = 1 + \sqrt{9} + 9 - 5$

$9 = 1 + 9 \div \sqrt{9} + 5$

$10 = (1 + 9 \div 9) \times 5$

$11 = 1 \times 9 - \sqrt{9} + 5$

$12 = -1 + 9 + 9 - 5$

$13 = 1 \times 9 + 9 - 5$

$14 = 1 + 9 + 9 - 5$

$15 = 1 + \sqrt{9 \times 9} + 5$

$16 = 1 + 9 \div \sqrt{9} \times 5$

$17 = 1 \times \sqrt{9} + 9 + 5$

$18 = 1 + \sqrt{9} + 9 + 5$

$19 = (-1 + 9) \times \sqrt{9} - 5$

$20 = (1 + 9 \div \sqrt{9}) \times 5$

$21 = -1 + \sqrt{9} \times 9 - 5$

$22 = -1 + 9 + 9 + 5$

$23 = 1 \times 9 + 9 + 5$

$24 = 1 + 9 + 9 + 5$

$25 = 1 + 9 + \sqrt{9} \times 5$

$26 = -1 + \sqrt{9} + (9 - 5)!$

$27 = 1 \times \sqrt{9} + (9 - 5)!$

$28 = 1 + \sqrt{9} + (9 - 5)!$

$29 = -1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9}) \times 5$

$30 = 1 \times (\sqrt{9} + \sqrt{9}) \times 5$

$31 = 1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9}) \times 5$

$32 = (-1 + 9) \times (9 - 5)$

$33 = 1 + 9 \times \sqrt{9} + 5$

$34 = 1 + 9 + (9 - 5)!$

$35 = -1 - 9 + 9 \times 5$

$36 = 1 \times 9 \times (9 - 5)$

$37 = 1 + 9 \times (9 - 5)$

$38 = -1 - (9 \times 9) + 5!$

$39 = 1 \times 9 \times (-9) + 5!$

$40 = (1 + 9) \times (9 - 5)$

$41 = (1 + \sqrt{9}) \times 9 + 5$

$42 = (-1 \times \sqrt{9}) + 9 \times 5$

$43 = 1 - \sqrt{9} + 9 \times 5$

$44 = -1 + \sqrt{9 \times 9} \times 5$

$45 = 1 \times \sqrt{9 \times 9} \times 5$

$46 = 1 + \sqrt{9 \times 9} \times 5$

$47 = -1 + \sqrt{9} + 9 \times 5$

$48 = 1 \times \sqrt{9} + 9 \times 5$

$49 = 1 + \sqrt{9} + 9 \times 5$

$50 = (1 + \sqrt{9 \times 9}) \times 5$

$51 = 1 \times \sqrt{9}! + 9 \times 5$

$52 = 1 + \sqrt{9}! + 9 \times 5$

$53 = (-1 + 9) + 9 \times 5$

$54 = 1 \times 9 + 9 \times 5$

$55 = 1 + 9 + 9 \times 5$

$56 = (1 + \sqrt{9}) \times (9 + 5)$

$57 = -(1 + \sqrt{9}!) \times 9 + 5!$

$58 = -1 + 9 \times \sqrt{9}! + 5$

$59 = -1 + (\sqrt{9} + 9) \times 5$

$60 = 1 \times (\sqrt{9} + 9) \times 5$

$61 = 1 + (\sqrt{9} + 9) \times 5$

$62 = 19 \times \sqrt{9} + 5$

$63 = (-19) \times \sqrt{9} + 5!$

$64 = (-1 + 9) \times (\sqrt{9} + 5)$

$65 = (1 + 9 + \sqrt{9}) \times 5$

$66 = 1 \times \sqrt{9}! \times (\sqrt{9}! + 5)$

$67 = (1 - 9) \times (-9) - 5$

$68 = (1 + \sqrt{9}!) \times 9 + 5$

$69 = (-1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9}!} + 5$

$70 = (-1 + \sqrt{9}!) \times (9 + 5)$

$71 = -1 + 9 \times (\sqrt{9} + 5)$

$72 = 1 \times 9 \times (\sqrt{9} + 5)$

$73 = 1 + 9 \times (\sqrt{9} + 5)$

$74 = -1 + (9 + \sqrt{9}!) \times 5$

$75 = -1 + 9 \times 9 - 5$

$76 = 1 \times 9 \times 9 - 5$

$77 = 1 + 9 \times 9 - 5$

$78 = -((1 + \sqrt{9}!) \times \sqrt{9}!) + 5!$

$79 = 199 - 5!$

$80 = (1 + 9) \times (\sqrt{9} + 5)$

$81 = 1 \times 9^{\sqrt{9-5}}$

$82 = 1 + 9^{\sqrt{9-5}}$

$83 = -1 - \sqrt{9}! \times \sqrt{9}! + 5!$

$84 = (-1) \times \sqrt{9}! \times \sqrt{9}! + 5!$

$85 = (1 + 9) \times 9 - 5$

$86 = 1 \times 9 \times 9 + 5$

$87 = 1 + 9 \times 9 + 5$

$88 = (-1 + 9) \times (\sqrt{9}! + 5)$

$89 = -1 + (9 + 9) \times 5$

$90 = 1 \times (9 + 9) \times 5$

$91 = 1 + (9 + 9) \times 5$

$92 = (-1) + (-9) \times \sqrt{9} + 5!$

$93 = 1 \times (-9) \times \sqrt{9} + 5!$

$94 = 1 + (-9) \times \sqrt{9} + 5!$

$95 = (1 + 9) \times 9 + 5$

$96 = -(1 + \sqrt{9}) \times \sqrt{9}! + 5!$

$97 = -1 + \sqrt{9} + 95$

$$98 = 1 \times \sqrt{9} + 95$$

$$99 = 1 + \sqrt{9} + 95$$

$$100 = 1 + 9 \times (\sqrt{9}! + 5)$$

~ 後記 ~

若問我何故及何時對數學產生鍾愛之感，我可不知道如何回答。但若問我為何想當一位『老師』，我可毫不猶疑地答覆，這是我自從兒時開始，已萌生的憧景。若問我現時的職業，我亦會直接地答覆：我是教學生的。曾記得，有位前輩曾對後學(即筆者)贈言：你若想別人怎樣教導你的子侄，你就要怎樣教導別人的。自此，這句良言便成為筆者的人生座右銘。時光倏忽，轉眼已是廿八個年頭，回首前事，筆者只是將部份值得紀念的年份入題，以聊試算，亦謹此與同好者分享。

學生口中的『劉伯』
劉松基