

Hong Kong Mathematics Olympiad (2021/22)

Individual Paper 1

香港数学竞赛 (2021/22)

个人项目卷一

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.  
No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特别指明外，所有答案须以数字的真确值表达，并化至最简。

不接受近似值。

所有附图不一定依比例绘成。

Part A

甲部

1.  $\alpha$  and  $\beta$  are the real roots of the equation  $x^2 - 100x + k = 0$ . If  $\alpha - 7 = 30\beta$ , find the value of  $k$ .

$\alpha$  及  $\beta$  是方程  $x^2 - 100x + k = 0$  的实根。若  $\alpha - 7 = 30\beta$ ，求  $k$  的值。

2. In Figure 1,  $ACD$  is a triangle.  $B$  is a point on  $CD$  such that  $AB = AC = 2$  and  $AD = 4$ . If  $BC : BD = 1 : 3$ , find the length of  $CD$ .

在图一中， $ACD$  是一个三角形。 $B$  是  $CD$  上的一点使  $AB = AC = 2$  及  $AD = 4$ 。若  $BC : BD = 1 : 3$ ，求  $CD$  的长。

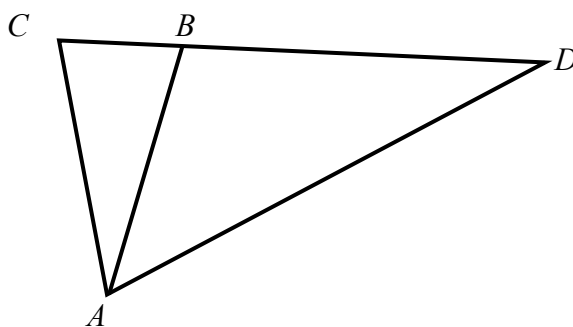


Figure 1

图一

3. In Figure 2,  $ABCD$  is a rectangle.  $E$  is a point on  $AC$  such that  $AE = 25$  and  $CE = 144$ . If  $p = AD + DE + CD$ , find the value of  $p$ .
- 在图二中,  $ABCD$  是一个矩形。  $E$  是  $AC$  上的一点使  $AE = 25$  及  $CE = 144$ 。若  $p = AD + DE + CD$ , 求  $p$  的值。

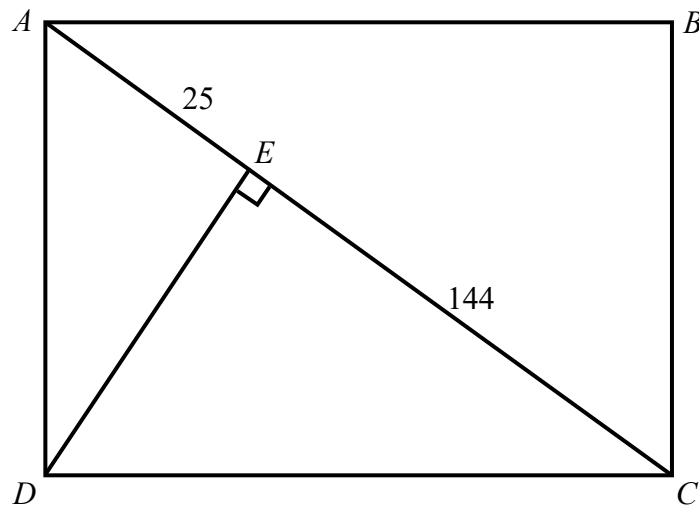


Figure 2  
图二

4. Let  $x, y$  and  $z$  are non-zero numbers. If  $2^x = 3^y = 18^z$ , find the value of  $\frac{xz}{5y(x-z)}$ .

设  $x, y$  及  $z$  是非零数。若  $2^x = 3^y = 18^z$ , 求  $\frac{xz}{5y(x-z)}$  的值。

5. Let  $N = 24x + 216y$ , where both  $x$  and  $y$  are positive integers. If  $N$  is a cube number, find the minimum value of  $x + y$ .

设  $N = 24x + 216y$ , 其中  $x$  及  $y$  均为正整数。若  $N$  为完全立方数, 求  $x + y$  的最小值。

6. John participated in a mathematics competition, in which one of the questions was to solve

$$\begin{cases} ax + by = -16 \\ cx + 20y = -224 \end{cases}, \text{ where } a, b \text{ and } c \text{ are real numbers.}$$

The correct answer to the question was  $x = 8$  and  $y = -10$ . However, John copied a wrong value for  $c$  and then gave an answer of  $x = 12$  and  $y = -13$ . Find the value of  $a^2 + b^2 + c^2$  in the original question.

小马参加数学比赛, 解其中一条题目

$$\begin{cases} ax + by = -16 \\ cx + 20y = -224 \end{cases}, \text{ 其中 } a, b \text{ 及 } c \text{ 是实数。}$$

题目的正确答案为  $x = 8$  及  $y = -10$ 。怎料小马抄错  $c$  的数值, 得出答案  $x = 12$  及  $y = -13$ 。求原题中  $a^2 + b^2 + c^2$  的值。

7. Given that  $459 + x^3 = 3^y$ , where both  $x$  and  $y$  are positive integers. Find the least value of  $y$ .

已知  $459 + x^3 = 3^y$ ，其中  $x$  及  $y$  均为正整数。求  $y$  的最少值。

8. In Figure 3,  $D$  is a point inside the quadrilateral  $ABCE$  such that  $AD \parallel BC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $CD \perp DE$ ,  $CD = ED$ ,  $AD = 4$  cm and  $BC = 6$  cm. If  $P$  cm<sup>2</sup> is the area of  $\triangle ADE$ , find the value of  $P$ .

在图三中， $D$  为四边形  $ABCE$  内的一点使得  $AD \parallel BC$ ， $AB \perp AD$ ， $CD \perp DE$ ， $CD = ED$ ， $AD = 4$  cm 及  $BC = 6$  cm。若  $\triangle ADE$  的面积为  $P$  cm<sup>2</sup>，求  $P$  的值。

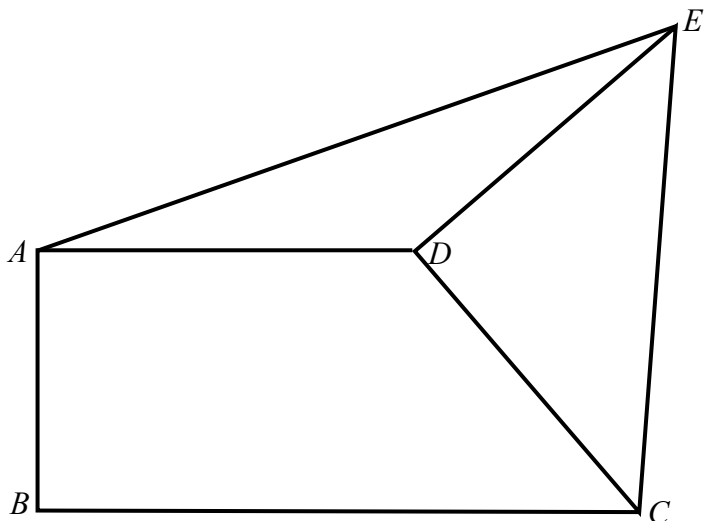


Figure 3

图三

9.  $ABCD$  is a cyclic quadrilateral with  $AB = 7$ ,  $BC = 15$ ,  $CD = 20$  and  $DA = 24$ . Find the radius of the circle  $ABCD$ .

$ABCD$  是一个圆内接四边形，其中  $AB = 7$ ,  $BC = 15$ ,  $CD = 20$  and  $DA = 24$ 。求圆  $ABCD$  的半径。

10. Given that  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$ , where  $a > 0$ . If  $b = a^5 + \frac{1}{a^5}$ , find the value of  $b$ .

已知  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$ ，其中  $a > 0$ 。若  $b = a^5 + \frac{1}{a^5}$ ，求  $b$  的值。

**Part B**

**乙部**

11.  $x_1$  and  $x_2$  are the real roots of the equation  $(\log 2x)(\log 3x) = a^2$ , where  $a$  is a real number. Find the value of  $x_1x_2$ .

$x_1$  及  $x_2$  是方程  $(\log 2x)(\log 3x) = a^2$  的实根, 其中  $a$  为实数。求  $x_1x_2$  的值。

12. A 7-digit number is formed by putting the numerals 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 together without repetition. If this number is divisible by 55, find its largest possible value.

由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成一个没有重复数字的 7 位数。若这个数可以被 55 整除, 求这个数的最大值。

13. Given that  $a^{2x} - b^{2y} = 1672$ , where  $a, b, x$  and  $y$  are positive integers. Find the minimum value of  $ax + by$ .

已知  $a^{2x} - b^{2y} = 1672$ , 其中  $a, b, x$  及  $y$  为正整数。求  $ax + by$  的最小值。

14. Let  $a, b$  and  $c$  are non-zero digits. How many three digit numbers  $\overline{abc}$  are there such that  $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ ?

设  $a, b$  及  $c$  为非零数字。有多少个三位数  $\overline{abc}$  使得  $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ ?

15.  $PQR$  is an isosceles triangle with  $PQ = PR = 17$  and  $QR = 16$ . Denote the in-centre and the orthocentre of  $PQR$  by  $I$  and  $H$  respectively. Find the length of  $HI$ .

$PQR$  是一个等腰三角形, 其中  $PQ = PR = 17$  and  $QR = 16$ 。将  $I$  及  $H$  分别记为  $PQR$  的内心及垂心。求  $IH$  长度的值。

**END**

完