

Hong Kong Mathematics Olympiad (2021/22)

Individual Paper 1

香港數學競賽 (2021/22)

個人項目卷一

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特別指明外，所有答案須以數字的真確值表達，並化至最簡。

不接受近似值。

所有附圖不一定依比例繪成。

Part A

甲部

1. α and β are the real roots of the equation $x^2 - 100x + k = 0$. If $\alpha - 7 = 30\beta$, find the value of k .

α 及 β 是方程 $x^2 - 100x + k = 0$ 的實根。若 $\alpha - 7 = 30\beta$ ，求 k 的值。

2. In Figure 1, ACD is a triangle. B is a point on CD such that $AB = AC = 2$ and $AD = 4$. If $BC : BD = 1 : 3$, find the length of CD .

在圖一中， ACD 是一個三角形。 B 是 CD 上的一點使 $AB = AC = 2$ 及 $AD = 4$ 。若 $BC : BD = 1 : 3$ ，求 CD 的長。

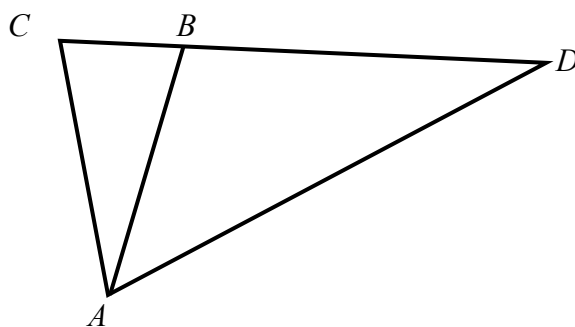


Figure 1

圖一

3. In Figure 2, $ABCD$ is a rectangle. E is a point on AC such that $AE = 25$ and $CE = 144$. If $p = AD + DE + CD$, find the value of p .

在圖二中， $ABCD$ 是一個矩形。 E 是 AC 上的一點使 $AE = 25$ 及 $CE = 144$ 。
若 $p = AD + DE + CD$ ，求 p 的值。

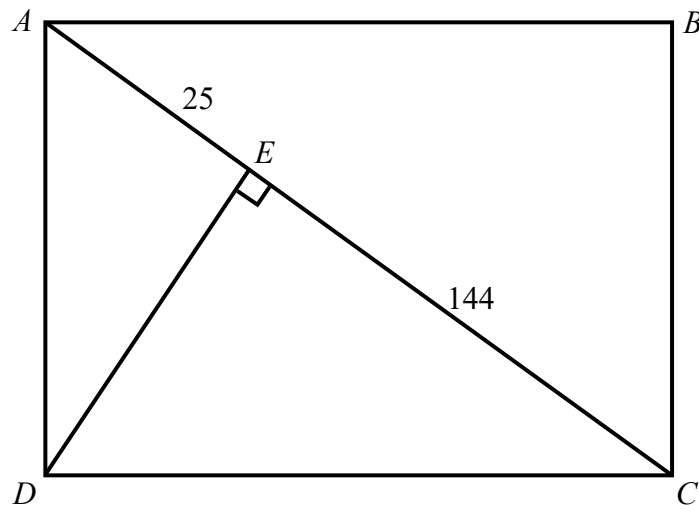


Figure 2

圖二

4. Let x, y and z are non-zero numbers. If $2^x = 3^y = 18^z$, find the value of $\frac{xz}{5y(x-z)}$.

設 x, y 及 z 是非零數。若 $2^x = 3^y = 18^z$ ，求 $\frac{xz}{5y(x-z)}$ 的值。

5. Let $N = 24x + 216y$, where both x and y are positive integers. If N is a cube number, find the minimum value of $x + y$.

設 $N = 24x + 216y$ ，其中 x 及 y 均為正整數。若 N 為完全立方數，求 $x + y$ 的最小值。

6. John participated in a mathematics competition, in which one of the questions was to solve

$$\begin{cases} ax + by = -16 \\ cx + 20y = -224 \end{cases}, \text{ where } a, b \text{ and } c \text{ are real numbers.}$$

The correct answer to the question was $x = 8$ and $y = -10$. However, John copied a wrong value for c and then gave an answer of $x = 12$ and $y = -13$. Find the value of $a^2 + b^2 + c^2$ in the original question.
小馬參加數學比賽，解其中一條題目

$$\begin{cases} ax + by = -16 \\ cx + 20y = -224 \end{cases}, \text{ 其中 } a, b \text{ 及 } c \text{ 是實數。}$$

題目的正確答案為 $x = 8$ 及 $y = -10$ 。怎料小馬抄錯 c 的數值，得出答案 $x = 12$ 及 $y = -13$ 。求原題中 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值。

7. Given that $459 + x^3 = 3^y$, where both x and y are positive integers. Find the least value of y .

已知 $459 + x^3 = 3^y$ ，其中 x 及 y 均為正整數。求 y 的最少值。

8. In Figure 3, D is a point inside the quadrilateral $ABCE$ such that $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, $CD \perp DE$, $CD = ED$, $AD = 4$ cm and $BC = 6$ cm. If P cm² is the area of $\triangle ADE$, find the value of P .

在圖三中， D 為四邊形 $ABCE$ 內的一點使得 $AD \parallel BC$ ， $AB \perp AD$ ， $CD \perp DE$ ， $CD = ED$ ， $AD = 4$ cm 及 $BC = 6$ cm。若 $\triangle ADE$ 的面積為 P cm²，求 P 的值。

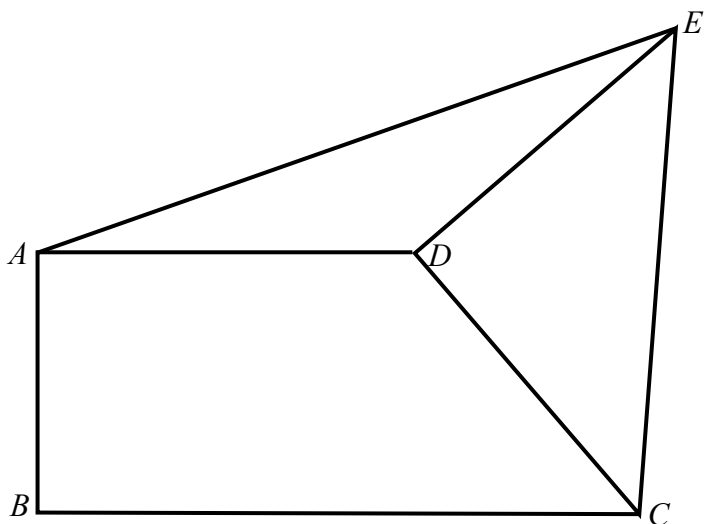


Figure 3

圖三

9. $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with $AB = 7$, $BC = 15$, $CD = 20$ and $DA = 24$. Find the radius of the circle $ABCD$.

$ABCD$ 是一個圓內接四邊形，其中 $AB = 7$, $BC = 15$, $CD = 20$ and $DA = 24$ 。求圓 $ABCD$ 的半徑。

10. Given that $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$, where $a > 0$. If $b = a^5 + \frac{1}{a^5}$, find the value of b .

已知 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$ ，其中 $a > 0$ 。若 $b = a^5 + \frac{1}{a^5}$ ，求 b 的值。

Part B

乙部

11. x_1 and x_2 are the real roots of the equation $(\log 2x)(\log 3x) = a^2$, where a is a real number. Find the value of x_1x_2 .
- x_1 及 x_2 是方程 $(\log 2x)(\log 3x) = a^2$ 的實根，其中 a 為實數。求 x_1x_2 的值。
12. A 7-digit number is formed by putting the numerals 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 together without repetition. If this number is divisible by 55, find its largest possible value.
- 由數字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 組成一個沒有重複數字的 7 位數。若這個數可以被 55 整除，求這個數的最大值。
13. Given that $a^{2x} - b^{2y} = 1672$, where a, b, x and y are positive integers. Find the minimum value of $ax + by$.
- 已知 $a^{2x} - b^{2y} = 1672$ ，其中 a, b, x 及 y 為正整數。求 $ax + by$ 的最小值。
14. Let a, b and c are non-zero digits. How many three digit numbers \overline{abc} are there such that $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$?
- 設 a, b 及 c 為非零數字。有多少個三位數 \overline{abc} 使得 $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$?
15. PQR is an isosceles triangle with $PQ = PR = 17$ and $QR = 16$. Denote the in-centre and the orthocentre of PQR by I and H respectively. Find the length of HI .
- PQR 是一個等腰三角形，其中 $PQ = PR = 17$ and $QR = 16$ 。將 I 及 H 分別記為 PQR 的內心及垂心。求 HI 長度的值。

END

完