

SCHOOL MATHEMATICS NEWSLETTER

ISBN 978-988-8159-89-5



政府物流服務署印

學校數學通訊

第十九期

# SMIN



SCHOOL  
MATHEMATICS  
NEWSLETTER

ISSUE 19

教育局

Published by  
Mathematics Education Section, Curriculum Development Institute,  
Education Bureau, Government of the Hong Kong Special Administrative Region.  
香港特別行政區政府教育局課程發展處數學教育組出版

版權

©2015 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

**ISBN 978-988-8159-89-5**

## **School Mathematics Newsletter (SMN)**

### **Foreword**

The School Mathematics Newsletter (SMN) is for teachers. SMN aims at serving as a channel of communication for mathematics education in Hong Kong. This issue includes articles written by academics, reflections from seconded teachers of the seed projects, the results of different competitions organised by the Mathematics Education Section and the forthcoming professional development programmes, etc.

We welcome contributions in the form of articles on all aspects of mathematics education as the SMN is meant for an open forum for mathematics teachers. Please send all correspondence to:

The Editor, School Mathematics Newsletter,  
Mathematics Education Section  
Curriculum Development Institute  
Room 403, Kowloon Government Offices  
405 Nathan Road  
Yau Ma Tei , Kowloon  
Email: [schmathsnewsletter@gmail.com](mailto:schmathsnewsletter@gmail.com)

We extend our thanks to all who have contributed to this issue.

## Contents

|   | Page |
|---|------|
| Foreword  | ii   |
| Contents  | iii  |
| <br>  |      |
| 1. 亂答一通你都不會吃零雞蛋的試卷  |      |
| 梁景信 .....   | 1    |
| <br>  |      |
| 2. 幾何概率與貝特朗悖論 (Bertrand's Paradox)                          |      |
| 李駿宇 .....   | 14   |
| <br>  |      |
| 3. 再談「專制的」數學知識  |      |
| 馮志揚 .....   | 28   |
| <br>  |      |
| 4. 談談數學名詞定義的分類  |      |
| 陳葉祥 .....   | 44   |
| <br>  |      |
| 5. “Seed - A journey through collaboration and exploration” |      |
| LAM Lai-chun .....  | 59   |
| <br>  |      |
| 6. 「從閱讀中學習 (小學數學)」試行計劃反思                                    |      |
| 李少瑩 .....   | 68   |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 7.  | 種籽計劃「探討及發展度量範疇的學與教的有效策略」反思<br>盧翠儀.....                                      | 76  |
| 8.  | The retrospect of Hong Kong Mathematics Olympiad .....                      | 82  |
| 9.  | Mathematics Project Competition for Secondary Schools (2014/15) .....       | 93  |
| 10. | Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools .....             | 98  |
| 11. | Statistical Project Competition for Secondary School Students .....         | 105 |
| 12. | Statistics Creative-Writing Competition for Secondary School Students ..... | 114 |
| 13. | Website of Mathematics Education Section in Education Bureau .....          | 122 |
| 14. | Professional Development Programmes in 2015/16 .....                        | 124 |
| 15. | 第 57 屆國際數學奧林匹克 2016 .....   | 133 |

# 1. 亂答一通你都不會吃零雞蛋的試卷

梁景信

香港教育學院數學與資訊科技學系

以下兩份試卷，各有三道選擇題，每題有兩個選項。每題 1 分，答錯不扣分。

## 試卷一

1.  $\sqrt{2}$  是
- (a) 無理數。
  - (b) 有理數。

2. 0 是
- (a) 奇數。
  - (b) 偶數。

3.  $1 - 0.\dot{9}$
- (a) 大於 0。
  - (b) 等於 0。

如果每題都作答，有以下八種情況（括號內數字代表該題得分）：

| 題 1   | 題 2   | 題 3   | 總分 |
|-------|-------|-------|----|
| a (1) | a (0) | a (0) | 1  |
| a (1) | a (0) | b (1) | 2  |

| 題 1   | 題 2   | 題 3   | 總分 |
|-------|-------|-------|----|
| a (1) | b (1) | a (0) | 2  |
| a (1) | b (1) | b (1) | 3  |
| b (0) | a (0) | a (0) | 0  |
| b (0) | a (0) | b (1) | 1  |
| b (0) | b (1) | a (0) | 1  |
| b (0) | b (1) | b (1) | 2  |

表 1

## 試卷二

### 1. 本題答案與

- (a) 題 2 的答案相同。
- (b) 題 3 的答案相同。

### 2. 本題答案與

- (a) 題 3 的答案相同。
- (b) 題 1 的答案相同。

### 3. 本題答案與

- (a) 題 1 的答案相同。
- (b) 題 2 的答案相同。

下表顯示各種作答情況和得分：

| 題 1   | 題 2   | 題 3   | 總分 |
|-------|-------|-------|----|
| a (1) | a (1) | a (1) | 3  |
| a (1) | a (0) | b (0) | 1  |
| a (0) | b (0) | a (1) | 1  |

| 題 1   | 題 2   | 題 3   | 總分 |
|-------|-------|-------|----|
| a (0) | b (0) | b (1) | 1  |
| b (0) | a (1) | a (0) | 1  |
| b (1) | a (0) | b (0) | 1  |
| b (0) | b (1) | a (0) | 1  |
| b (1) | b (1) | b (1) | 3  |

表 2

如果考生不假思索，胡亂作答（正確一點是隨機作答，如以擲硬幣決定答案），在兩份試卷的得分概率是不同的（參看表 3）。

| 得分 | 概率（試卷一）       | 概率（試卷二）       |
|----|---------------|---------------|
| 0  | $\frac{1}{8}$ | 0             |
| 1  | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 2  | $\frac{3}{8}$ | 0             |
| 3  | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

表 3

從表 3 可看出，無論怎樣作答，考生在試卷二都起碼得到 1 分，而且得滿分 3 分的機會比試卷一高（ $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ ）。試卷二還有一個特點，就是答案選項次序互換會影響分數分佈和得分概



率，例如把題 1 的選項互換，便成為以下的試卷三。

### 試卷三

1. 本題答案與

(a) 題 3 的答案相同。

(b) 題 2 的答案相同。

2. 本題答案與

(a) 題 3 的答案相同。

(b) 題 1 的答案相同。

3. 本題答案與

(a) 題 1 的答案相同。

(b) 題 2 的答案相同。

表 4 顯示各種作答情況和表 5 顯示得分概率：

| 題 1   | 題 2   | 題 3   | 總分 |
|-------|-------|-------|----|
| a (1) | a (1) | a (1) | 3  |
| a (0) | a (0) | b (0) | 0  |
| a (1) | b (0) | a (1) | 2  |
| a (0) | b (0) | b (1) | 1  |
| b (0) | a (1) | a (0) | 1  |
| b (0) | a (0) | b (0) | 0  |
| b (1) | b (1) | a (0) | 2  |
| b (1) | b (1) | b (1) | 3  |

表 4

| 得分 | 概率            |
|----|---------------|
| 0  | $\frac{1}{4}$ |
| 1  | $\frac{1}{4}$ |
| 2  | $\frac{1}{4}$ |
| 3  | $\frac{1}{4}$ |

表 5

試卷二的設計靈感來自 Jim Propp 的 Self-Referential Aptitude Test (Propp, 2005)。“自我指涉”(self-reference)就是涉及本身的意思,“自我指涉句子”(self-referential sentences)就是描述句子本身的句子,如:

1. 這句子是用中文寫成的。
2. This sentence contain three mistake.
3. 這個問題問什麼?
4. 這句子不是由十三個字組成的。

(以上句子究竟由多少個字組成?)

自我指涉的對象不限於一句句子，也可以是一組句子，例如：

5. 下句比本句少一個字。  
上句多本句一個字。
6. 真奇怪，不由你不信，這段文字文采飛揚、字字珠璣、音韻鏗鏘、議論縱橫、氣貫山河，意想不到還組織嚴密、佈局精奇，首尾兩個字竟然都是真。
7. 還有試卷二和試卷三，也是自我指涉組句。

以下是一些練習，大家試試。

1. 本是第一，貶為第五，不服上訴，判成第\_\_\_\_\_。
2. 這個字是第二個字、第七個字、第十一個字、第\_\_\_\_\_。
3. 以下的句子，哪句真？哪句假？
  - (1) 只有一句是假的。
  - (2) 只有兩句是假的。
  - (3) 只有三句是假的。
  - (4) 只有四句是假的。
  - (5) 全部五句都是假的。

4. 以下的句子，哪句真？哪句假？

(1) 只有一句是假的。

(2) 只有兩句是假的。

(3) 只有三句是假的。

⋮

( $n-1$ ) 只有( $n-1$ )句是假的。

( $n$ ) 全部  $n$  句都是假的。

5. 在橫線上填上適當的阿拉伯數字：

這句子有\_\_\_\_個 1、\_\_\_\_個 2、\_\_\_\_個 3 和 \_\_\_\_個 4。

6. 在橫線上填上適當的阿拉伯數字：

(甲)：乙句有\_\_\_\_個 1、\_\_\_\_個 2 和 \_\_\_\_個 3。

(乙)：丙句有\_\_\_\_個 1、\_\_\_\_個 2 和 \_\_\_\_個 3。

(丙)：丁句有\_\_\_\_個 1、\_\_\_\_個 2 和 \_\_\_\_個 3。

(丁)：甲句有\_\_\_\_個 1、\_\_\_\_個 2 和 \_\_\_\_個 3。

題 5 和題 6 都可以用迭代法 (iterations) 求解，以題 5 為例，簡述方法如下：

任選四個正整數如 1、2、3 和 4，填入句子得

(i) 這句子有1個 1、2個 2、3個 3 和 4個 4。

數一數句子中 1、2、3 和 4 的出現次數得

(ii) 這句子有 2 個 1、2 個 2、2 個 3 和 2 個 4。

用相同方法得

(iii) 這句子有 1 個 1、5 個 2、1 個 3 和 1 個 4。

重複以上步驟，直至橫線上的數字不再變化，穩定下來，那些數字就是答案。

“自我指涉”這概念廣泛見於數學（如迭代（iterations）、遞歸關係（recurrence relations）、分形（fractals）等）、語言、邏輯、哲學、電腦、藝術等範疇，因文章篇幅和筆者才識所限，不能在此詳述。本文的例子和練習大都是參考（Gardner, 1982 ; Hofstadter, 1986）而設計的，不一一細表。

## 參考資料

1. Gardner, M. (1982). *Aha! gotcha: paradoxes to puzzle and delight*. San Francisco: W.H. Freeman.
2. Hofstadter, D. R. (1986). *Metamagical themas: questing for the essence of mind and pattern*. New York: Bantam Books.
3. Propp, J. (2005). Self-Referential aptitude test. *Math Horizons*, 12 (3), 35.

## 2. 幾何概率與貝特朗悖論 (Bertrand's Paradox)

李駿宇

在中學數學課程中，學生會在初中階段學習概率時接觸幾何概率，而這個課題的概念對一些學生而言實在會帶來不少困難。事實上，幾何概率的出現在數學發展上象徵著傳統概率定義的不足和突破。然而，亦因為幾何概率本質涉及無窮量，所以在第一個幾何概率的問題提出至今二百多年間，這個範疇裏面仍有多個未曾解開的難題。在這些有待破解的問題中，貝特朗悖論是其中一個最基礎的問題。本文會向大家介紹這個悖論，和一些數學家對解決這個悖論所做的工作。

在了解貝特朗悖論之前，我們先回顧一下幾何概率在概率論的發展上佔甚麼位置。讓我們先看看概率的傳統定義。根據法國數學家拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749 – 1827) 的講法，一件事件的概率為可構成該事件的元素數目與所有可能的元素數目之比，其中所有元素發生的可能性均等。

這一種說法並非十分嚴謹，當中甚至涉及循環定義。但我們暫且以此作為我們討論概率的起點。事實上，拉普拉斯對概率的定義亦是學生學習概率時首先遇到的公式：假設一件事件  $E$  發生的概率為  $P(E)$ ，則

$$P(E) = \frac{\text{令}E\text{發生的元素的數目}}{\text{所有可能的元素的數目}}$$

其中所有可能的元素發生的機會均等。

學生可以透過直觀的角度從一些例子理解這條公式。例如一枚正常的六面骰子在一般理解下有六個可能的元素，而擲出某一個點數，如「6」的可能則只有一個，所以擲出「6」的概率為六分之一。

這一個直觀的理解，背後有被稱為「無差別原理」(the principle of indifference) 這一個數學原理支持著。無差別原理大致的意思是當沒有任何附加的資料時，在考慮某個概率的情境時我們認定每一個事件都是毫無差別的。以剛才的那枚六面骰子為例，因為每一個面也是毫無差別，我們在某一個面塗上「1」至「6」甚或「A」至「F」對這個概率的情境並沒有任何影響。既然如此，我們必須歸納出無論我們在骰子的面塗上甚麼標記，我們在擲骰子獲得該標記（如「6」）的概率必須相等。

我再用一個更數學化的方法去表達無差別原理。假設我們考慮一個概率的樣本空間  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  及對  $X$  的置換群  $G$  (permutation group  $G$  on  $X$ )。當沒有任何附加資料時，我們認定對於所有  $g \in G$ ，對所有  $x \in X$ ，概率  $P(x) = P(g(x))$ 。

留意無差別原理只說明我們在沒有附加資料時「認定」事件毫無差別，因為這一點我們並沒有辦法去證明，所以在傳統概率的定義上我們將之視為一條公設，毋須證明。當然，如果我們獲得一些附加資料，比如說我們擲的骰子實際上並非均勻，那麼我們便不可能直接運用無差別原理來歸納出擲出任何一個點數的概率仍然全為六分之一。



然而，幾何概率問題的出現令數學家必須重新考慮概率的定義。第一個出現的幾何概率名題是在 1733 年發表的「布豐投針問題」(Buffon's needle problem)。這個由法國數學家布豐伯爵 (Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, 1707 – 1788) 提出的數學問題是這樣的：

*在一個由一些等闊的長方形地板鋪成的地面上（假設長方形的長度為無限長），當一根針被拋在地上時，那根針與兩塊地板的夾縫相交的概率是多少？*

這一個問題突破了當時的概率定義，因為當我們想像一根針被拋在地上時，我們根本沒有可能根據傳統概率的定義把所有可能的事件（即針的所有可能位置）全部列舉出來，因為這些可能的事件不但是無窮多，更是不可數的。而那根針與兩塊地板的夾縫相交的事件數目同樣是不可數的。如此，按概率的傳統定義不能得出一個值，這就表示不能求得這類事件的概率呢？

數學家當然不會迴避這個問題。在提出投針問題後約 40 年，布豐伯爵在 1777 年發表的一篇文章中提出了這個問題的解答。關於布豐投針問題的解在此不贅，有興趣的讀者可輕易在互聯網上搜尋「Buffon's Needle Problem」，即可找到不少簡明清晰的解說。

簡單而言，布豐伯爵把概率的定義由可數的事件數目擴展，在布豐投針問題中他考慮了當針和地板的夾縫形成某個特

定角度時，其中點投進哪個區域便會相交於夾縫，再利用定積分計算該區域的面積和整個地面面積之比來定義概率。若用現代數學的眼光去看他提出的解，他以樣本空間的測度 (measure) 和樣本空間中某事件子集的測度之比來定義概率。而傳統概率定義亦可用這一個角度來理解，不過由於樣本空間為有限集，所以其測度可用簡單數數來定義。因此，布豐伯爵對幾何概率的理解是一個傳統概率定義的合理延伸。

然而尚有一點，我們絕不能忽略的，就是無差別原理，因為傳統概率定義建基於無差別原理。當樣本空間由有限集變為無限集，甚至為不可數集時，無差別原理又能否順利過渡呢？

我們先回顧一下無差別原理，並嘗試理解由可數的樣本空間推廣至不可數的樣本空間時命題的數學含意，再看看布豐投針問題的解怎樣運用無差別原理。

### 無差別原理（樣本空間為有限集）

考慮一個概率的樣本空間  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  及對  $X$  的置換群  $G$ 。當沒有任何附加資料時，我們認定對於所有  $g \in G$ ，對所有  $x \in X$ ，概率  $P(x) = P(g(x))$ 。

若  $X$  為一個不可數的樣本空間，那麼若我們要對  $X$  裏面所有元素置換為另一個元素，我們所需要的是一個映射  $g: X \rightarrow X$ ，其中  $g$  為一一映射。上述所有映射  $g$  的集合是對應樣本空

間為有限集時  $X$  的置換群  $G$ 。這一個集合，在抽象代數中被稱為  $X$  的自同構群 (Automorphism group of  $X$ )。因此，可以有一個更普遍的無差別原理如下：

考慮一個概率的樣本空間  $X$  及對  $X$  的自同構群  $G$ 。當沒有任何附加資料時，我們認定對於所有  $g \in G$ ，對所有  $x \in X$ ，概率  $P(x) = P(g(x))$ 。

這一個命題看起來除了多了一些抽象代數的用語，好像和之前的沒有甚麼分別。但事實上，它們在數學上表達了同樣的情況：即就算我們把樣本空間裏面的所有元素重新標記過來，對我們考慮發生某件事件的概率時也不會構成任何影響，亦即發生任何事件的概率相等（可參考前文關於擲出不同標記骰子的論述）。

這亦是解答布豐投針問題的重要基石。布豐投針問題的解題關鍵在於如何用數學方法計算其「解集」（針會相交於兩塊地板夾縫的情況之集合）的測度，因此須先找出這個解集，而這個解集實際上描述針的位置。假設針在幾何意義上是一條固定長度的線段，我們要討論針的位置時實際上只需兩個參數，如兩個端點的位置，或一點的位置及針與夾縫形成的角度（正如布豐伯爵所採用的策略）等等，均足以固定該針的位置，或者說可以把針的位置與那兩個選定的參數建立一個一一映射。因此，我們便可以從這兩個參數（按布豐伯爵的策略，即中點與最接近夾縫的距離  $x$  及針與夾縫形成的角度  $\theta$ ）的取值範圍決定解集，亦即用這兩個參數標記了針的位置作討論的主體。

引用無差別原理，針在某些位置的概率理應等於這兩個參數在某取值範圍的概率。因此布豐伯爵在計算針會相交於地板夾縫的概率時實際上是計算了  $x$  和  $\theta$  在一個特殊的取值範圍時的概率。這兩件事到底是否相同呢？用幾何學的角度看，是的。但有一點亦非常值得我們留意，就是在這兩件事中，被看成為機會均等的事情並不相同：在前者我們認定針在地上每一個位置機會均等，而在後者我們認定  $x$  和  $\theta$  取甚麼數值機會均等。這一個不同會否對我們討論幾何概率時構成任何影響呢？就在這一個關口上，貝特朗悖論出現了。

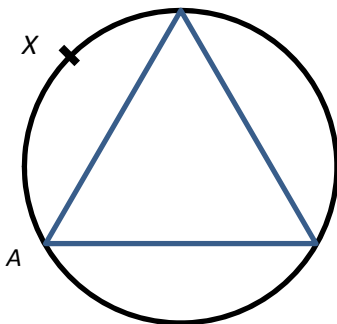
法國數學家貝特朗 (Joseph Louis François Bertrand, 1822 – 1900) 在 1889 年提出了一個頗為簡單的幾何概率問題，並同時對這個問題作出了三個解，但三個解做出的答案竟然個個不同！就這樣，在往後百多年間數學家一直未能徹底地對貝特朗提出的問題達致一個滿意而且有共識的解說。這個被稱為貝特朗悖論的難題因此亦繼續困擾著數學家。

貝特朗悖論是這樣的：有一個圓形和其圓內接等邊三角形。若在圓上隨機畫一條弦，問該弦長於其圓內接等邊三角形的邊的概率。

討論弦長的問題在幾何學上亦相應於討論弦的位置。因此，貝特朗也沿用布豐伯爵的策略，利用一些圓形和弦的幾何特性固定弦，再找出弦在甚麼位置時長於其圓內接等邊三角形的邊這個解集來得出所需的概率。他分別用了三個方法。看到這裏，各位讀者也可以嘗試想一想，你又會用甚麼方法去

解貝特朗提出的問題呢？

貝特朗的第一個方法如圖一所示：

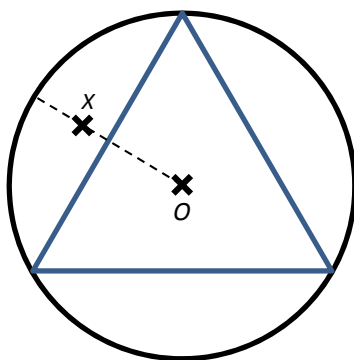


圖一

他考慮一條弦由圓周上的兩點固定。由於圓上任何一點在幾何上沒有分別，所以他先隨意固定一點（點  $A$ ），然後以該點作為等邊三角形的頂點作一圓內接等邊三角形。跟著，貝特朗考慮的問題是弦的另一端點（不定點  $X$ ）在圓上哪部分便會令弦比圓內接等邊三角形的邊更長。因此，弦比圓內接等邊三角形的邊更長的概率為  $1/3$ 。（為甚麼？這個問題留待讀者自行思考。）

你也是用這一個方法來求得  $1/3$  這個概率嗎？如果貝特朗對這個問題的討論到此為止，這個問題可能只會是一個難度屬於中等的幾何概率問題，一般中學生在老師引導下應該也能成功解決這個概率問題。然而，貝特朗繼續提供另外兩個解題的方法，便令這個問題成為一個難倒眾多數學家的悖論了。

貝特朗提出的第二個解考慮到「垂直於一條線段且穿過線段上一固定點的直線只有一條」的幾何特性。他先隨意在圓上畫一條半徑。由於圓上所有半徑的幾何性質完全一樣，所以討論其中一條半徑上的情況可推廣至整個圓的一般情況。隨後，貝特朗在半徑上取一點，並在該點上作一條垂直於半徑的直線，該直線與圓相交便會形成一條弦。而且，圓上所有的弦也能以此方法求得，所以半徑上的點可與圓上的弦建立一一對應關係。因此，要考慮弦在甚麼情況下比圓內接等邊三角形的邊更長，可以弦對應在半徑上的點的位置來判定。由此，參考圖二我們便可以求得所需概率為  $1/2$ ！（為甚麼？）



圖二

本來，一個數學問題有多個解題方法並不出奇，但一般來說我們期望就算用不同的解題方法，答案仍是相同一個。這一次，貝特朗提出了兩個方法，求得同一件事情的概率居然不一樣，到底是甚麼出了問題呢？會是其中一個方法出了錯嗎

？他進一步提出的第三個方法，就令問題變得更複雜了。

在第三個解題方法，貝特朗考慮圓內任何一點只會是唯一一條弦的中點，而且任何一條弦的中點一定在圓內，所以他把弦和其中點建立一一對應，並以中點位置判別弦是否比圓內接等邊三角形的邊更長。因此，這種處理方法最像我們一般處理幾何概率問題的方法：檢視點落在所需區域的面積和整個圓面積之比，便可得出所需概率。而點落在哪個區域能令對應的弦比圓內接等邊三角形的邊更長呢？這亦留待讀者思考，提示是利用第三個解題方法計算出的所需概率為  $1/4$ 。

$1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ 。到底哪一個數值才是這個問題的正確答案呢？貝特朗又在哪裏犯了錯而導致有錯誤的答案呢？

貝特朗自己的解釋是三個方法也沒有錯，錯的是問題中並沒有妥善界定何謂「隨機」，因此用不同的方法去理解隨機，便有不同的答案，因此這是一個不適定問題（ill-posed problem）。所以，他認為應該要指定隨機的方法，才能得出一個唯一的答案。

貝特朗這一個說法不無道理，因為數學家較後在測度論（Measure Theory）中證明了一條定理，指出無論在任何無限的樣本空間中，我們總能找到一個一一映射  $\theta$ ，令概率  $P(x) \neq P(\theta(x))$ 。換言之，這推翻了我們引為概率定義基石的無差別原理，因此貝特朗悖論是無可避免的，除非我們能把上述的一一映射  $\theta$  逐一排除。

舉一個簡單例子。若我們要在 0 和 1 之間隨意抽出一個實數，該數大於 0.5 的概率是多少？我們當然可以非常直接回答這個問題：所需的概率便是 0.5。然而，如果我們利用一個一一映射「重新標記」0 和 1 之間所有實數，我們還能獲得相同的概率嗎？比如該函數為  $y = f(x) = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ，則  $0.5 = P(y > 0.5) \neq P(x^2 > 0.5) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 。因此，這說明了我們在考慮概率問題時並不能毫無限制地在把無限的樣本空間透過一一映射將一個概率問題轉化至另一個模式。在這個例子中，我們當然絕不會無故使用  $y = f(x) = x^2$  這個函數轉化問題，但在貝特朗悖論中，事實上貝特朗的三個解題方法豈不是均把弦長的考慮轉化為點位置的考慮嗎？這些轉化到底又是否合理呢？這可沒那麼容易判別了。

在面世百多年來，不少數學家也曾對貝特朗悖論發表過不同見解，有些人認同貝特朗的說法，認為這個問題有基礎性的漏洞。亦有些人不滿意貝特朗的說法，認為這個問題實際上是有正確的方法和正確的概率，並可以透過實驗概率驗證正確的理論概率。到目前為止，數學家仍未就徹底解決貝特朗悖論的方法取得共識。

在眾多關於貝特朗悖論的發展中，我們會在本文進一步認識物理學家及數學家傑恩斯（Edwin Thompson Jaynes, 1922 – 1998）的見解。傑恩斯是美國聖路易斯洲華盛頓大學的物理學特聘教授。他在統計力學、概率論等範疇均有重大貢獻。而他在 1968 年和 1973 年發表的文章「適定問題」(The Well-



Posed Problem) 中，建議加入若干條件，即可令貝特朗悖論成為一個適定問題並找出其正確的解。

傑恩斯的構想是盡量只按著貝特朗問題的文句中找出一些幾何上的限制而避免對隨機這一個字眼添加演繹。因此，他提出了三個幾何上的不變量以此限制哪一類的一一對應函數可適當地轉化貝特朗的幾何概率問題。他指出，由於貝特朗在問題中並沒有指明圓的大小、位置和方向，所以他認為一個適當的轉化函數必須不受這三個幾何特性影響，因此他認為轉化函數須擁有旋轉不變 (rotational invariance)、尺度不變 (scale invariance) 及平移不變 (translational invariance) 三大特性。

要理解這三個幾何不變量的意思，我們首先想像利用實驗概率來求得貝特朗問題的實驗概率。我們認為最合理的情況是那些作為弦的線段的形成並不受那一個圓的幾何特性影響。換一個角度看這個問題，我們可以想像為在一個平面空間上，我們用某種隨機方法找出一些直線，然後我們把一些不同大小的圓形放在不同的位置上，再看看由這些直線和圓形成的弦，其長度比該圓內接三角形的邊更長時的實驗概率。如果這些實驗概率明顯地和某數接近，我們便認為這一個隨機方法擁有這三個幾何不變量。相反，如果我們發現這個隨機方法可能受圓的大小影響，即不同圓的大小會導致其實驗概率有明顯分別，則這種隨機方法便可能沒有尺度不變的特性。

因此，傑恩斯把貝特朗提出的三個方法看成為三種不同的隨

機考慮：圓周上隨機求點、半徑上隨機求點及圓內隨機求點，並以數學方法求證組成這些隨機方法的轉化函數是否同時擁有上述的三個幾何不變量，從而得出結論：只有方法二同時擁有全部幾何不變量，但方法一和方法三分別沒有尺度不變量和平移不變量。（其中的數學細節，可閱讀參考書目中 Jaynes (1973)）。

所以，方法一和方法三在傑恩斯眼中等同於我們利用了  $y = f(x) = x^2$  這個函數求在 0 與 1 之間抽得一個大於 0.5 的數的概率一樣，是不合常理的。只不過，這種「不合常理」並不如利用  $y = f(x) = x^2$  那麼明顯。既然方法一和方法三也錯了，我們可否結論貝特朗問題中所求的概率實際上是以方法二計算得出的 1/2 呢？

很遺憾，我們仍未能按傑恩斯的論據下此結論，因為傑恩斯只說明了正確的轉化函數必須擁有前文所述的三個幾何不變量，但同時擁有這三個幾何不變量的卻未必一定是正確的轉化函數（有興趣知道貝特論問題還有甚麼解決方法的讀者，可閱讀參考書目中 Marinoff (1994)）。事實上，貝特朗問題並非只有三種轉化函數可用以解題，甚至有可能找到兩種轉化函數也同時擁有這三個幾何不變量，但轉化後求得的概率仍然不同。此外，除了傑恩斯提出的三個幾何不變量外，會否還有其他的不變量需要考慮？

值得注意的是，傑恩斯作出的討論，某程度上已超出了數學的討論，因為數學家在概率論的公理化過程中採取了較抽象和數學化的方法，處理所有在有既定概率分佈函數下的概率

問題。但如何演繹那些概率分佈函數，以決定其所能反映的現實情境，數學家在概率論中是不加考慮的。傑恩斯的工作則正正希望由所能反映的現實情境（物理上的不變量）來決定哪個概率分佈函數比其他的「更正確」，這已經並非一般的數學上的考量了。

所以，雖然傑恩斯對貝特朗悖論提出了十分值得注意的見解，貝特朗悖論以致幾何概率的若干理論仍有值得爭議和思考的地方，特別是在「隨機」的理解上。因此，在處理幾何概率問題時，我們實在有需要把問題用一些比較保守的方法表達，以免製造如貝特朗悖論所帶來的麻煩。

## 參考資料

1. Gyenis, Z. & Rédei, M. (2012). Defusing Bertrand's Paradox. *Seventh Quadrennial Fellows Conference of the Center for Philosophy of Science*, 26-43.
2. Jaynes, E. T. (1973). The Well-posed Problem. *Foundations of Physics*, 3 (4), 477-493.
3. Marinoff, L. (1994). A Resolution of Bertrand's Paradox. *Philosophy of Science*, 61(1), 1-24
4. Van Fraassen, B. C. (1989). *Laws and symmetry*. Oxford, UK: Clarendon Press.

### 3.再談「專制的」數學知識

馮志揚

前課程發展主任（數學）

#### 「專制的」數學知識

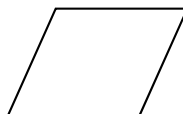
根據 Hewitt (2002, p. 49), 「專制的」(arbitrary<sup>1</sup>) 數學知識 – 詞彙、符號、簡寫、規定及定義（如果有的話） – 是由特別的文化、數學家社群（a particular culture / community of mathematicians）經過漫長的創造過程，和積極的討論之後，所接受而又認為是「正確的」數學用語。我們當然可以對這些協定作出懷疑和挑戰，但是 Hewitt (2002, p. 49) 建議我們倒不如接受了這些「專制的」數學知識，入鄉隨俗，設法學好這些代表數學概念的語言，進一步享受「做數學」的樂趣。

話雖如此，以下小學數學課堂軼事，會否引起「做數學」的人的思考和對數學學習的關注呢？

#### 課堂軼事

##### 軼事1

教師向小學四年級的學生展示一個四邊形 (quadrilateral)。他／她將這個四邊形貼在磁板上。



---

<sup>1</sup> 見第 41 頁：筆記 1.

教師詢問學生：「這是一個四邊形；它的四條邊 (side(s)) 都相等 (equal)。請問這四邊形叫做甚麼？」

學生甲：「菱形 (rhombus)。」

學生乙：「它是平行四邊形 (parallelogram)，因為菱形屬於平行四邊形的一種。」

學生丙：「它是正方形 (square)，如果它的一隻角是直角 (right angle)。」

## 故事2

教師要求學生自擬一個假分數 (improper fraction)。

學生甲舉例：「二分之六 (six halves)。」

教師：「為甚麼？」

學生甲：「因為分子 (numerator) 大於分母 (denominator)。」

學生乙舉例：「六分之六 (six sixths) 亦是假分數。」

教師：「為甚麼？」

學生乙：「因為分母等於分子。」

學生丙：「二分之六是三，六分之六是一；它們都是 (正) 整數 ((positive) whole numbers)。(正) 整數是假分數！」

## 故事3

學生甲發表他的統計報告：「100 家住宅每日共用食水 1.4 萬升，那麼，每一住宅平均每日食水耗用量是 0.014 萬升。」

學生乙：「老師，液體容量單位 (units in capacity) 一般用「升 (litre (L))」或「毫升 (milliliter (mL))」。為甚麼食水耗用

量的單位是「萬升」？」

#### 故事4

教師：「三個  $a$  和半個  $a$  是  $3a + \frac{1}{2}a$ ，即三和二分之一個  $a$ ，

或  $(3 + \frac{1}{2})a$  (read as “three plus a half all times ‘a’”)。」

教師：「將  $3 + \frac{1}{2}$  寫成  $3\frac{1}{2}$  (read as “three and a half”)，那麼，

三和二分之一個  $a$  是  $3\frac{1}{2}a$  (read as “three and a half ‘a’”)。」

教師：「三又二分之一個  $a$  又可以寫成  $\frac{7}{2}a$  (read as “seven halves ‘a’”)。」

學生：「又可以寫成  $\frac{7a}{2}$  (read as “seven ‘a’ on/over two”)？」

以下對「專制的」數學知識一些思考。

#### 整體和部分

小一至小二年級的學生開始學習將實物比較、分類和排列次序（例如，香港課程發展委員會，1983，頁 5-7；Williams & Shuard, 1976, p. 18）。Williams 和 Shuard (1976, p. 27) 指出該年齡的學生可以比較兩組物件的多少，清楚指出哪組物件較多、較少、或一樣多。他們亦可以將一組物件中同類的和不是同類的分類。但是，他們並未能夠完全分辨一組物件中，

某類物件與整組物件的關係。例如，在一組動物玩具之中，他們未能指出究竟玩具綿羊較多抑或整組玩具較多。他們未能了解玩具綿羊是整組玩具的一成員；而整組玩具包括特別的玩具綿羊。同理，同學甲本身是家庭（的集）的一元（用集合論的術語），而甲的家庭包括同學甲的雙親（父親和母親的集）、和甲的兄弟姊妹（的集）。Williams 和 Shuard (p. 33) 認為學生到了約五、六年級才開始了解這部分和整體的關係，或簡稱「包含概念」。例如，

- (1) 所有綿羊是動物，但是有些動物不是綿羊；
- (2) 五件物件包含兩件物件，所以  $5 = 2 + 3$ ；
- (3) 所有正方形是長方形，但是有些長方形不是正方形。

課堂軼事 1 至 4 都是有關不同物件的包含關係。學生在課堂軼事 1 有關四邊形、菱形、平行四邊形和正方形包含關係的回應，及學生在課堂軼事 2 中說明整數是假分數的一種都正好指出這些學生已掌握有關的包含關係。究竟普遍的小學生是否可掌握這種整體和部分的關係呢？

課堂軼事 2、3 和 4 是有關整數數系延伸後的包含概念。

課堂軼事 2 中除了整數是假分數之外，更隱含整數除法中的包含關係：

$$\text{二分之六} = \frac{6}{2} = 6 \div 2 = 3 ; \text{六分之六} = \frac{6}{6} = 6 \div 6 = 1 .$$

在課堂軼事 3 中，總用水量與住戶數目和每住宅的耗水量形



成整體和部分的關係。如果可以接受「萬升」<sup>1</sup>為單位的話，那麼，整體和部分的關係由以下的除法計算表示：

$$\begin{aligned} & \text{每一住宅平均每日食水耗用量是 } 1.4 \text{ 萬升} \div 100 \\ & = 0.014 \text{ 萬升。} \end{aligned}$$

以「升」為十進制單位表示：

$$\begin{aligned} & \text{每一住宅平均每日食水耗用量是 } 1.4 \times 10,000 \text{ 升} \div 100 \\ & = 140 \text{ 升。} \end{aligned}$$

在課堂軼事4中，分數的部分和整體關係延伸至代數式的加法運算<sup>2</sup>：

$$\begin{aligned} & \text{三個 } a \text{ 和 半個 } a \\ & = 3a + \frac{1}{2}a \\ & = \text{三和二分之一個 } a \\ & = \left(3 + \frac{1}{2}\right)a \\ & = 3\frac{1}{2}a \\ & = \frac{7}{2}a \text{ 或 } \frac{7a}{2} \end{aligned}$$

其實，在以上的課堂軼事中，一些數學物件在不同場合下可以有不同的名稱、符號或簡寫。

---

<sup>1</sup> 見第 41 頁：筆記 2

<sup>2</sup> 見第 43 頁：筆記 3

## 不同的「名字」

除了整體和部分的關係之外，課堂軼事 1 至 4 讓我們看到同一個數學物件可以有多於一個不同的、「專制的」詞彙、符號、簡寫、規定及定義（如果有的話）。例如，

- (1) 菱形可以是四邊形、平行四邊形、或正方形，但是四邊形和平行四邊形未必是菱形。
- (2) 整數可以是假分數，但是假分數未必是整數。同時，二分之六可以用  $\frac{6}{2}$  和  $\diagup$  或 3 來表示；六分之六亦可以由  $\frac{6}{6}$  和  $\diagup$  或 1 來表示。
- (3) 1「萬升」和  $10^4$  升代表相同的容量，雖然「萬升」不是度量衡十進制的單位。
- (4)  $3\frac{1}{2}a = \frac{7}{2}a = \frac{7a}{2} = (3 + \frac{1}{2})a = 3a + \frac{1}{2}a =$  三個  $a$  和 半個  $a$ 。

一般的小學生是否能夠靈活運用不同的、「專制的」詞彙、符號、簡寫、規定及定義（如果有的話）呢？何時選用某一個「名字」是最適當的呢？更何況，課堂軼事 1 至 4 涉及的不止是「定義」那麼簡單。

## 「定義」以外

以課堂軼事 1 中的四邊形為例子。由研究四邊形的對邊性質開始，平行四邊形有如下的定義：

四邊形是**平行四邊形**

若且僅若 (if and only if 或 iff)

四邊形的**兩組對邊分別平行**。

平行四邊形的定義告訴我們：如果一個四邊形是平行四邊形，那麼，這個四邊形的兩組對邊分別平行；反過來，兩組對邊分別平行的四邊形是平行四邊形。因此，兩組對邊分別平行既是平行四邊形的一個性質，又是平行四邊形的一種判定方法。(李國凡、李天舟，2000，頁 99)

長方形、菱形和正方形的定義是透過平行四邊形定義：

- (1) 平行四邊形是 **長方形** 若且僅若平行四邊形 **有一個角是直角** (李國凡、李天舟 (2000) 稱 **長方形** 為**矩形** (頁 101-102))
- (2) 平行四邊形是 **菱形** 若且僅若平行四邊形 **有一組鄰邊相等** (李國凡、李天舟，2000，頁 103)
- (3) 平行四邊形是 **正方形** 若且僅若平行四邊形 **有一組鄰邊相等，並且有一個角是直角** (李國凡、李天舟，2000，頁 104)

由以上的定義，學生可以分析及建構四邊形、平行四邊形、長方形、菱形和正方形的概念及圖形之間的包含關係。當然，能夠說出定義與應用它來確認圖形、抽象地處理定義都是大部分小學生或小部分初中學生覺得困難的地方 (例如，Williams & Shuard, 1976, p. 13; p. 21; Prairie 著，張漢宜等譯，2007，頁 15-12)。

由於學生在小二時已有量度長度和直角的經驗(課程發展議會, 2000, 頁 22; 24; 26), 所以在小學的教學設計, 一般都讓學生首先量度長度和直角, 比較各圖形的特性, 由各特徵推斷包含關係(例如, 課程發展議會, 2000, 頁 28; 31; 36)。下表分析小學的平行四邊形、長方形、菱形和正方形邊和角的特殊性質(取材自李國凡、李天舟, 2000, 頁 105)。

**表一：小學平行四邊形、長方形、菱形和正方形邊和角的特殊性質**

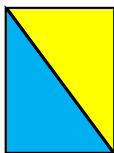
| 四邊形 |   | 平行四邊形 | 長方形 <sup>@</sup> | 菱形   | 正方形     |
|-----|---|-------|------------------|------|---------|
| 特性  | 邊 | 對邊平行  | 對邊平行             | 對邊平行 | 對邊平行    |
|     |   | 對邊相等  | 對邊相等             | 四邊相等 | 四邊相等    |
|     | 角 | 對角相等  | 四個角都是直角          | 對角相等 | 四個角都是直角 |

<sup>@</sup> 註：李國凡與李天舟(2000, 頁 101)稱之為矩形

小學生在處理課堂軼事 1 中四邊相等的四邊形是菱形時, 可能需要量度各對邊是否平行和四條邊的長度等, 再核對表一中菱形的各種特性, 才有結論。

長方形包含正方形及菱形是平行四邊形也是這課題中涉及整體部分關係的概念。2000 年的課程指引「4S2 圖形拼砌與分割」學習單位更要求學生先將圖形拼砌和分割, 然後辨認和指出所得的圖形(課程發展議會, 2000, 頁 38)。例如,

將兩個全等直角三角形拼砌成下圖之後，說出所得圖形的名稱。如是，學生亦可能需要一些時間，作出判決。



圖一：兩個全等直角三角形拼砌成的四邊形

为了更好的辨認和說出所得的圖形，小學生可能會強記各圖形的定義，和表一內各圖形的所有特性、進行量度新圖形的角和邊、應用定義和圖形特性辨認所得的圖形。若果如此，學生可能需要大量的時間進行記憶，增加腦力的負荷。

要避免太大的腦力壓力，我建議引進各四邊形的判別方法。小學生只需利用簡單的量度長度和直角技巧，或只需觀察圖形的邊角特徵，便可輕而易舉的說出圖形的**最合適的名稱**。表二是一些建議，而其中判別四邊形定理的證明，可參考中學的數學課本，或留待有興趣的讀者，作為練習之用。同時，教師可思考如何將這些判別圖形的定理 – 不是定義 – 讓小學生建構呢。

表二：小學平行四邊形、長方形、菱形和正方形的判別方法

| 四邊形  |   | 平行四邊形  | 長方形    | 菱形   | 正方形  |
|------|---|--------|--------|------|------|
| 判別方法 | 邊 | 對邊分別相等 | 對邊分別相等 | 四邊相等 | 四邊相等 |
|      | 角 | ---    | 一個直角   | ---  | 一個直角 |

讓我們利用表二的判別方法，解決圖一：兩個全等直角三角形拼砌成的四邊形的問題。由觀察所得，圖一四邊形的

(1) 對邊分別相等，和

(2) 它有一個直角。

所以，由表二，長方形是這個四邊形的**最佳名稱**。然而，由表二，它亦是平行四邊形。

為了不用學生強記諸如「長方形、菱形、正方形都是平行四邊形的一種」、「正方形是長方形和菱形的一種」等包含關係和圖形多具有多於一個「名字」，我們可以改良表二的判別方法，如下表三，使得各圖形沒有包含的關係。那麼，每一個圖形都只有一個而唯一的一個最佳的名字。

表三：小學平行四邊形、長方形、菱形和正方形的判別方法，沒有兩個圖形有包含的關係

| 四邊形  |   | 平行四邊形  | 長方形    | 菱形   | 正方形  |
|------|---|--------|--------|------|------|
| 判別方法 | 邊 | 對邊分別相等 | 對邊分別相等 | 四邊相等 | 四邊相等 |
|      |   | 鄰邊不相等  | 鄰邊不相等  | ---  | ---  |
|      | 角 | 沒有直角   | 一個直角   | 沒有直角 | 一個直角 |

至於其餘的課堂軼事 2 至 4，除了隱含了定義之外，它們亦隱含了數字的運算結果（例如，課堂軼事 2 中， $\frac{6}{2}=6\div 2=3$ ； $\frac{6}{6}=6\div 6=1$ ；課堂軼事 3 中，1.4 萬升 $=1.4\times 10,000$ 升）和一些運算的定理（例如，課堂軼事 4 中的乘法分配性質 $(3+\frac{1}{2})a=3a+\frac{1}{2}a$ ）。數學的學習並非只學習「專制的」數學知識那麼簡單。

### 小結

Nunes 和 Bryant (1996, pp. 244-245) 說過：數學知識是一個協約的系統（a conventional mathematical system）。不熟識這個制定的系統，學生不容易建構數學知識、發展邏輯思維和應用有關的數學知識和思考能力，建構更廣闊的知識。

如何使學生熟識這個制定的系統呢？相信這是中小學數學教育工作者不可忽略的事實。小學數學教師必須認識數學學習的策略、學習心理學和基本的數學知識，靈活地將這些知識運用於學生的學習。中學的教師亦應了解初中生在小學的數學學習情況、及學生對「專制的」數學知識－包括詞彙的讀和寫－的掌握，尤其是中文小學升英文中學的學生的已有知識。我確信：耐心的數學教師能夠讓學生學得更好！

### 參考資料

1. 度量衡十進制委員會（無日期）。*SI－國際單位制：學生用十進制簡介*。香港：度量衡十進制委員會。
2. 課程發展議會（2000）。*數學教育學習領域－數學課程指引（小一至小六）*。香港：政府印務局。
3. 李國凡與李天舟（2000）。*中學數學概念與定理詞典*。沈陽：遼寧教育出版社。
4. 陸谷孫（1992）。*英漢大詞典*。香港：三聯書店。
5. 香港課程發展委員會（1983）。*小學課程綱要－數學科*。香港：香港課程發展委員會。
6. Hewitt, D. (2002). Arbitrary and Necessary: A Way of Viewing the Mathematics Curriculum. In L. Haggarty (Ed.), *Teaching Mathematics in Secondary Schools: A Reader* (pp. 47-63). London: RoutledgeFalmer.



7. Metrication Committee (1980). *An Introduction to International System of Units – Basic Metric Information for Teachers*. Hong Kong: Government Printer.
8. Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwell.
9. Prairie 著，張漢宜、張玲芬、陳彥文、黃泮翔、黃楸萍、吳亮慧譯（2007）。《幼兒數學、科學與科技》。台北：華騰文化股份有限公司。
10. Williams, E., & Shuard, H. (1976). *Primary Mathematics Today – New Metric Edition*. London: Longman.

## 筆記

### 1. 「專制的」(arbitrary) 數學知識

陸谷孫 (1992, 頁 82-83) 對「arbitrary」作出多於一種解釋；我認為將「arbitrary」譯作「專制的」較為合適。

### 2. 「萬升」

香港的度量單位是十進制的。根據度量衡十進制委員會（無日期，國際單位制 (SI)，第一節）和 Metrication Committee (1980, p. 8)，容量單位「升 (litre (L))」可單獨應用於形容小水箱、油箱、和盛載酒、奶、啤酒等瓶子的容量。同時，它又可以通過乘 10 的不同倍數，變為較大或較小的單位，更好的形容某些器皿的容量。

要將「升」變為較大的單位，Metrication Committee (1980, p. 10) 規定這些 10 的倍數為  $10^1$ ， $10^2$ ， $10^3$ ， $10^6$ ， $10^9$ ， $10^{12}$ ， $10^{15}$ ， $10^{18}$ ；同理，要將「升」變為較小的單位，Metrication Committee (1980, p. 10) 規定這些 10 的倍數為  $10^{-1}$ ， $10^{-2}$ ， $10^{-3}$ ， $10^{-6}$ ， $10^{-9}$ ， $10^{-12}$ ， $10^{-15}$ ， $10^{-18}$ 。同時，Metrication Committee (1980, p. 10) 和度量衡十進制委員會（無日期，國際單位制 (SI)，第一節）更將這些倍數冠上一個名字—「詞冠 prefixes」和一個對應的「代號」。下表是常用的詞冠（取材自度量衡十進制委員會，無日期，國際單位制 (SI)，第一節；Metrication Committee, 1980, p. 10）。

表四：常用的詞冠

| 詞冠 | 吉      | 兆      | 千      | 百      | 分         | 厘         | 毫         | 微         |
|----|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|    | giga   | mega   | kilo   | hecto  | deci      | centi     | milli     | micro     |
| 代號 | G      | M      | k      | h      | d         | c         | m         | μ         |
| 倍數 | $10^9$ | $10^6$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ |

註：當倍數大於  $10^3$  時，代號用大階書寫（Metrication Committee, 1980, p. 11）

根據 Metrication Committee (1980, p. 10)，「升 (L)」常用的詞冠和（括號內的）代號是

- (1) 千 kilo (k)
- (2) 厘 centi (c)
- (3) 毫 milli (m)

這裏，

- (1) 1 千升 kilolitre (kL) =  $10^3$  升 (L) = 1 000 升 (L)
- (2) 1 厘升 centiliter (cL) =  $10^{-2}$  升 (L) = 0.01 升 (L)
- (3) 1 毫升 milliliter (mL) =  $10^{-3}$  升 (L) = 0.001 升 (L)

(Metrication Committee, 1980, p. 10; 度量衡十進制委員會，無日期，國際單位制 (SI)，第一節)

如果我們將課堂軼事 3 中的 1 萬升以 10 的倍數寫出，

$$1 \text{ 萬升} = 10\,000 \text{ 升} = 10^4 \text{ 升},$$

而  $10^4$  並非制定的倍數。所以，「萬升」不是十進制容量單位。因此，學生乙的提問是合理的。

### 3. 代數式的運算

課程發展議會 2000 年的《數學教育學習領域－數學課程指引（小一至小六）》雖然指出「6A1 解簡易方程」為學習單位，但對應的學習重點並不包括同類項運算（頁 46）－代數式的概念和運算不是小學數學的學習重點。但是，我們都希望升中一的小學生有一些以下「專制的」分數和代數知識：

(1) 三個 2（的和） $2 + 2 + 2$  可以寫成  $3 \times 2$  或  $2 \times 3$ ；

三個  $\frac{1}{2}$ （的和） $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  可以寫成  $3 \times \frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2} \times 3$ 。

同理，3 個  $a$ （的和） $a + a + a$  可以寫成  $3 \times a$  和／或  $3a$ ，但不能用  $a3$  代表  $3 \times a$  或  $3a$ 。3 和  $a$  之間的「乘號  $\times$ 」是不用寫上的，但我們要知道  $3a$  代表 3 乘  $a$  這個符號的意義。

(2) 三的一半可以寫成  $3 \times \frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2} \times 3$ ；

同理， $a$  的一半可以寫成  $a \times \frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2} \times a$ 。

$a \times \frac{1}{2}$  和／或  $\frac{1}{2} \times a$  有更簡單的寫法： $\frac{1}{2}a$  或  $\frac{a}{2}$ ，但不能

用  $a\frac{1}{2}$  代表  $\frac{1}{2}a$ 。 $\frac{1}{2}$  和  $a$  之間的「乘號  $\times$ 」是不用寫上的，

但我們要知道  $\frac{1}{2}a$  和／或  $\frac{a}{2}$  代表  $\frac{1}{2}$  個  $a$  和／或  $\frac{1}{2}$  乘  $a$  這個符號的意義。

(3)  $3 + \frac{1}{2}$  可以寫成  $3\frac{1}{2}$ 。

## 4. 談談數學名詞定義的分類

陳葉祥

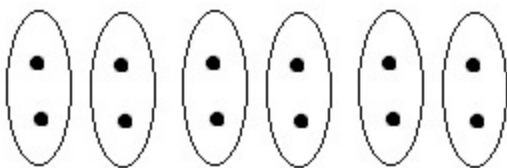
香港中文大學課程與教學學系

### 引言

馮志揚（2014）於上一期的《學校數學通訊》以表列方式替我們拆解如何理解一個數學名詞的定義，並示範如何從例子和非例子幫助學生掌握定義。馮博士的見解相當正確且實用。事實上，數學定義對數學學習的重要性不容置疑，在不同的專業期刊，也有作者討論過相關的內容。（例如：黃毅英、張僑平，2014；黃毅英，2012；梁子傑，2012。）筆者嘗試從教學角度分析數學名詞定義的種類，並對不同種類的定義提出教學上的處理建議，以供數學教育界同工參考。

### 第一類：數學界一致公認的定義

這類定義當然應該讓學生弄得清清楚楚，不過，更重要的是，讓學生明白背後概念從何而來。（每個概念背後必定有其因由，不會無緣無故地「從天降下」。）這個想法跟弗賴登塔爾（Freudenthal）的「數學化」及「數學的再創造」的想法相類似（Freudenthal, 1991）。要讓學生明白數學概念背後的源由，有可能從數學原因、歷史原因，甚至「常識」去追溯其根源。舉一些例子說明吧。「偶數/雙數」：當然，我們可以正式地說偶數是被 2 整除的整數，又或者形如  $2n$  的整數（其中  $n$  是整數）。但是，這樣的講法實在頗形式化，對初學者較難明白，倒不如說「雙」有成雙成對 (pair) 的意思，又或者再以圖示說明，不就更清楚嗎？



圖一：雙數定義的圖解

另一個例子，「質數/合成數」：質數即只能被1及自己整除，且大於1的整數。一個大於1的整數，若不是質數，就是合成數。這個定義很準確，但欠缺直觀感，學生可能沒有感覺，而且為甚麼不考慮1呢？（即為何1既非質數，又非合成數？）「質」有基本的意思，例如質子、本質，因此質數就是不能再拆細的「基本元素」，亦即是「拆無可拆」。若把「質數」及「合成數」比喻成砌積木，不就是更直觀嗎？不過，若只用比喻或文字描述，卻又未免欠缺精確，因此就要引入整除性的數學定義，這就是由日常用語過渡到數學的定義。至於為何不考慮1呢？我們可以這樣理解：1是最小的正整數，自己不太可能是合成數，至於為何不把它算為質數（基本元素）呢？不如用例子說明吧：

若果1算為質數，那麼例如6就可以「砌成」 $6 = 2 \times 3$ ，但又可以砌成 $6 = 1 \times 2 \times 3$ ，或 $6 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$ ，或 $6 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3$ 等；自然這令人感到不舒服，那麼，倒不如把1當成特殊情況，既非質數又非合成數。（趁這機會讓學生體會世上有不依常規的特殊情況，也是不錯呢！）當然以上的解釋其實是算術基礎定理，只是筆者嘗試用較淺易的方式說明。

以上的例子，也說明了日常用語跟數學定義的微妙關係。在不少情況之下，日常語言往往對數學的定義及概念的理解有所幫助。不過，我們也得小心。有時候，日常用語卻阻礙了數學概念的正確理解。例如：「相似」，日常用語的相似是甚麼意思？數學上的相似呢？我現在的樣子跟十年前的樣子相似，這是日常用語的相似；但是，數學上並不相似。（數學上相似是按比例的「放大、縮小」。這幾年來，我已經肥胖不少，在數學上不再相似！）一個數學概念的定義，無可避免地以語言來盛載，但語言本身卻有可能包含與數學概念不相關的「雜質」，而且不同國家的語言亦有文化上的元素。

再舉多一例，「周界」：通常一般小學教科書會把周界定義為「閉合平面圖形周圍的邊界」（現代教育研究社編輯委員會，2006）。驟眼看來，這個定義似乎頗清楚，但問題是：為甚麼要規定閉合圖形？不閉合又如何？邊界是甚麼意思呢？第二個問題並非平凡或無聊 (trivial)，對於一些較為特別的圖形，要判斷甚麼才是邊界是不容易。例如：徐思茵與謝巧玲（2011）以拓樸學的觀點解釋如何理解一個相框的邊界，也就是說，相框的周界應否包括裡面的正方形的外圍？



圖二：相框的周界在哪裡？

其實，從直觀上理解邊界，是頗直接。想像兩個鄰近的國家，邊界正是接壤之處；推廣地說，只要一個平面圖形能分辨到圖形的內部及圖形的外部的話，那麼圖形外部及圖形內部的「接壤之處」，就是邊界。正因為這個緣故，直觀地也能看得出相框的邊界應包括出面及入面的正方形外圍。（當然，若果根據拓樸學作嚴謹分析不是不可以，但這種做法似乎有點簡單複雜化吧！其實徐思茵與謝巧玲（2011）也有從教學的角度提到這個觀點。）弄清楚甚麼是邊界之後，亦可以很容易解釋為何不考慮非閉合圖形的周界？原因很簡單，非閉合圖形根本不可能明確地分辨圖形的外部及圖形的內部，既然這麼含糊，我們唯有不考慮它的周界好了。（再一次，我們讓學生體會到世上不是每件事都清清楚楚；看似嚴謹的數學其實也是如此，只是我們一般把含糊的「怪物」排除不考慮而已。）以上的各個例子旨在指出即使數學界一致公認的定義，也不應生硬地套給學生，應讓學生明白定義背後的（直觀）意義。（有時候，運用較非正式的比喻等，可能更易讓學生明白。）



## 第二類：不是數學界一致公認的定義

不是每一個數學名詞，都有一致的定義。有些名詞，不同人有不同的定義。這些名詞在中小學課程，其實亦會遇到。自然數（natural number）是否包括 0 呢？通常都不包括 0，故此，自然數其實即是正整數。（事實上，中小學課程通常都是這樣定義自然數。）不過，值得注意的是，有些作者是會把 0 包括在自然數之內（可參考 Clapham & Nicholson, 2009, p. 309）。關於自然數定義的歷史及教學含意，可參考黃毅英（2005 a, 2005 b）。

另一個例子，就是長方形的定義：到底正方形是否長方形的一種呢？這個問題的複雜性在於小學的定義跟中學的定義並不一致。小學一般不把正方形包括做長方形的一種；但中學卻剛相反，一般把正方形算做長方形的一種。那麼，誰對誰錯？在高等數學，一般也會把正方形算做長方形的一種。例如：Clapham & Nicholson (2009) 明確地指出當長方形的四條邊相等的特殊情況，這個圖形就是正方形。（不過，也得說明，rectangle 有時候被譯成矩形，以避免混亂。）然而，不把正方形算做長方形一種，在數學文獻中是出現過的。最經典的例子，其實是《幾何原本》。《幾何原本》第一卷定義 22，是這樣寫：「在四邊形中，四邊相等且四個角是直角的，叫做正方形；角是直角，但四邊不全相等，叫做長方形。……」（歐幾里德著；藍紀正、朱思寬譯，2003，p. 2）

事實上，兩種不同的定義分別代表對四邊形（更一般地，平面圖形）的兩種定義方式。前者採用層級分類（hierarchical

classification)，而後者則採用分割分類（partition classification）（參考：De Villiers, 1994）。重點是這兩種定義方式各自的優缺點是甚麼。若了解到這點，其實亦理解到為何中學數學通常採用層級分類，而小學數學則採用分割分類。層級分類的好處在於一般情形的任何性質（及定理）都適用於特殊情形上。換句話說，任何長方形（或矩形）的性質（及定理）均對正方形適用。於是，整個數學系統就簡單得多了。中學數學主要是研究數學物件之間的關係，以及數學論證的技巧，一個簡潔的數學系統會較為方便。至於分割分類，其好處是把數學物件分得清清楚楚；正方形就是正方形，不會又叫它做長方形。（況且，把正方形叫做長方形，其實有點欠缺直觀：正方形一點也不長，為何叫它做長方形呢？）在小學階段，重點是以直觀地認識各種圖形及其名稱，採用分割分類會較為符合這個學習目標。不過為顧及小學及中學採用不同的定義，可以考慮「避重就輕」地說，我們把每個圖形取一個最貼切的名字。在日常生活中，這個做法其實很普遍。若果你問我是甚麼國籍，我一般會回答自己是中國人，而不是回答自己是亞洲人。我不是否認自己是亞洲人，但亞洲人太過一般了，不能完全反映中國人的特性。（若我的回答是地球人，大概會認為我說廢話吧！）採用分割式分類的作用正在於此。

以上的例子，也說明了定義的進化性。當我們的數學知識增長了，又或者場境改變了，數學定義亦有可能改變。數學概念的發展如是；一個人的學習數學歷程也如是。不過筆者也得補充一句：雖然有些名詞的定義並不劃一，但這不代表可以隨意亂用。在教學上，很多時候都有課程的「約定俗成」

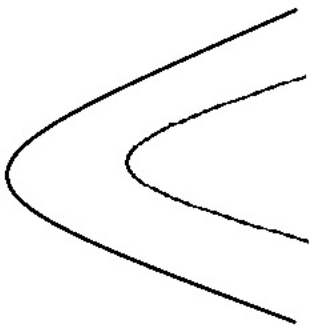
（就如上文所提及的「長方形」定義），而且一旦選定了就應該一致，這亦是數學家的慣常做法：選定其中一種定義，就一直用到底。（否則，其實有可能導致所謂「偷換概念」的邏輯論證謬誤。這也是一種「紀律」。）至於那些沒有「課程約定」的名詞（例如：自然數），則寧可講得清楚一點。（與其說自然數，倒不如說正整數或非負整數，會來得清楚。）

### 第三類：對數學概念的理解沒有影響的名詞

這是一種過分執著的名詞定義。一個較常見的例子是被乘數及乘數的分別。（又或者：「乘以」及「乘」的分別。）不知從何時開始，不少小學老師十分緊張被乘數及乘數的分別，甚至很強調被乘數應該寫先，但是，若果接受了整數乘法的交換性質，哪個是被乘數，哪個是乘數；哪個寫先，哪個寫後，根本不重要！有些老師認為若果弄錯了，就是概念錯誤，但誰規定被乘數要寫先呢？即使不依從，也只是不依照習慣，談不上概念錯誤吧！（關於乘數與被乘數的討論，實在出奇地多，可參考：馮仲頤，2006；馮振業、張淑芳，2014；鍾保珠、馮振業，2013；陳葉祥，2014；馮志揚，2011。）既然這些習慣對概念的理解沒有影響，那又為何要執著呢？

### 第四類：假設在某種場境下講的名詞

對於某些名詞，其實是假設了在一個特定的場境（context）下去講；不過，有時候為了方便而往往不清楚強調（或說，take it for granted）。一個常見的例子是平行線（parallel line）。圖中是否平行線呢？



圖三：平行的曲線？

做成這個混亂是，我們預先假定了平行線是對直線講的。（至少在中小學課程是這樣。）當然，我們可以在數學上追問平行的性質可否延伸到曲線，即有沒有平行曲線 (parallel curve) 呢？（這個問題，其實是頗自然，因為在日常生活中，我們確會遇到如上圖看似乎平行的曲線，例如：火車軌、運動場的跑道。）（讀者不難想像到兩個同心圓，是有「平行」性質且都是圓形。不過，拋物線或橢圓形呢？可以有一對平行拋物線或一對平行橢圓形嗎？留待讀者自行思索了。）這種場境轉變的定義延伸，也就是上文所講的定義進化的例子。

再舉另一個例子是，周界及面積是關於平面圖形，而體積是關於立體圖形。有些學生卻常把周界、面積、體積等概念及公式混亂了，但若果他們明白以上所提及的場景，就不容易弄錯了。可惜，在教學上，我們往往太輕描淡寫這一點，導致學生產生了混亂。

另一個例子，質數是指正整數（且大於1），所以-2，-3等不算是質數。（讀者可想想若包括負數，會有何不妥？）（小學生是不會弄錯，因為他們未學負數；但對學了負數的中學生，可能就有疑問了！）關於這一類名詞，較理想的做法是盡可能把其「特定場景」向學生清楚說明，不要“take it for granted”。要知道，對老師明顯，並不代表對學生同樣明顯；學生的錯誤，往往源於此。

### 第五類：為了方便而暫時定的名詞（即在日後的數學學習較少再使用的名詞）

筆者想起的例子，是假分數、帶分數。這兩個詞在中學，以至大學階段，甚少採用。若讀者是中學老師，不妨做一個實驗。

你是否記得假分數或帶分數的定義？ $3\frac{5}{2}$ 是不是帶分數

？再想一想，為何要這樣定義假分數及帶分數？（開估：

$3\frac{5}{2}$ 不是帶分數，因為帶分數的定義是「整數帶真分數」。）

但是，更重要的問題是為甚麼這樣定義？或問，既然日後不再使用，那麼，在小學階段引入假分數及帶分數的目的是甚麼？首先為甚麼不把帶分數定義成「整數帶（任意）分數」？原因似乎跟唯一性有關。若果這樣定義，一個大於1的分數便可以有多於一種的帶分數表達形式（例如：

$3\frac{5}{2}=4\frac{3}{2}=5\frac{1}{2}=\dots$ ），而更重要的是，若把帶分數理解成某個

整數多一些，則只有限制帶分數的定義為「整數帶真分數」

，其意義才可表達出來。例如：在數值上 $3\frac{5}{2}$ 是5多一些

；那麼，難道不是把它表達成  $5\frac{1}{2}$ （而非  $3\frac{5}{2}$  或  $4\frac{3}{2}$ ）是最

直觀？再者，為甚麼在小學階段要引入這個高年級不再使用的概念？筆者認為似乎在於幫助分數加減的運算。（因為可以整數與整數做加減；分數與分數做加減。不過，這個方法，不是對所有學生都感到較容易！）（關於帶分數與假分數的進一步討論，可參考拙著：陳葉祥，2014。）筆者想一再強調的是，我們不應只把著眼點放在概念的定義上，而更應追尋定義背後的意義及與其他概念之間的關係，對於那些只是「過渡形式」的名詞及概念，尤為重要。

#### **第六類：在數學教育上為了方便講解而引入的名詞**

這是純粹為了方便的簡寫，並沒有實質上的數學內容，因此非教學界可能根本不了解的名詞。「永備尺」是甚麼？小學數學老師自然知道，但若問一個沒有接觸小學數學的人，甚至不接觸小學數學教育的數學學者，可能也答不到。這類只為方便而引入的名詞，其實是學生與老師之間的約定，可以不用這麼執著。（不用「永備尺」這個詞語，而直接講「用你的手手腳腳做估計」又如何？再進一步，讓學生去替這個名詞改一個名稱又如何？）

#### **第七類：（暫時）無定義的名詞**

點、線、面是甚麼？讀過《幾何原本》的人，大概都了解到，對於這些名詞，顯然字面上可以寫個定義出來，但若依足這個字面意義，大概也無法得出「點、線、面」的意思來！不過，即使幼稚園學生也可以直觀地理解甚麼是「點、線、面」。原因是，我們學習很多時候都是憑直觀及例子，而不

是由定義出發！（另一個例子是1、2、3、...。想一想：我們小朋友時是怎樣學習1、2、3等概念呢？）（筆者當然知道可以用集合的方法「定義」1、2、3等，甚至由此去證明一些基本的算術定理。不過，老實說這些集合論的證明對真正了解數字的幫助有多大呢？筆者不是說集合論沒有意義，筆者只是從小、中學的學習作討論而已！）不過，話得說回來，這種（暫時）無定義的名詞，本身是高等數學（一般在大學或以上的數學課程學得到）「公理系統」的重要元素之一。它是現代數學的基石。從這觀點看，由直觀的點、線、面或1、2、3到抽象的無嚴格定義或集合論的定義，又是數學概念發展的一種進化過程。這一類（暫時）無定義的名詞，對教與學有甚麼啟迪呢？筆者留待讀者去細味好了！

### 數學定義的再思

數學定義是如何產生？往往我們在日常生活中遇到的概念，把其性質抽象地且嚴格地提取出來，就變成數學概念，也因此而需要對其概念作出定義。但是，值得注意的是，數學定義本身其實是「流動」、是「不斷變化」。當我們的數學知識有所增長（例如，對四邊形的認識增多），又或者希望把一個概念從原有的數學場境轉移（或延伸）到另一個數學場境（例如，由「平行線」延伸到「平行曲線」），原有的定義便有可能需要修改，整個過程就是不斷地進行定義（defining，作為動詞，一個過程）。這就是真真正正的「做數學」（不是做數學練習題！）。對於學與教而言，我們往往只著重定義的結果（definition，作為名詞，一個結果），且可能是被學生認為是不能改變的結果。我們的數學教學往往讓學生以

為數學定義（以致數學定理！）是「從天而降」，欠缺定義背後的原因，更惶論讓學生經歷定義的過程（defining）。於是，學生可能只懂解答數學題（姑勿論可能是困難的題目），但可能從未經歷數學的創造（mathematics creation）！若我們真的希望培訓數學家，或培養學生的數學創意，這種defining的活動實在不可少！這個想法其實也正是數學化教學（mathematizing）的精意所在（Frendenthal, 1991; 黃毅英，2007）。

### 鳴謝

本文初稿承蒙我的老師蕭文強教授、黃毅英教授、梁玉麟副教授及我的同事張僑平博士提供寶貴的意見及提出有趣的觀點，豐富了本文定稿的討論，特此致謝；筆者亦希望多謝林倬欣同學協助文書工作。



## 參考資料

1. 現代教育研究社編輯委員會（2006）。*廿一世紀現代數學*（修訂版）（4上B）。香港：現代教育研究社。
2. 徐思茵、謝巧玲（2011）。周界的概念及其教學。*數學教育*，第三十一期，13－21。
3. 梁子傑（2012）。在成長中不斷優化的數學定義。*數學教育*，第三十四期，11－16。
4. 陳葉祥（2014）。 $4\frac{3}{2}$ 是不是帶分數？。*數學教育*第三十六期，37－39。
5. 陳葉祥（2014）。教室剪影： $9 \times 3$ 還是 $3 \times 9$ ？。*數學教育*，第三十六期，59－60。
6. 馮仲頤（2006）。乘法概念的一次補底教學。*數學教育*，第二十三期，64－70。
7. 馮志揚（2011）。雜談一由乘法說起。*學校數學通訊*，第十七期，1－12。
8. 馮志揚（2014）。「專制的」數學知識。*學校數學通訊*，第十八期，22－34。

9. 馮振業、張淑芳 (2014)。小學數學，為甚麼（不可以）是這樣的？。《數學教育》，第三十六期，7-23。
10. 黃毅英 (2005 a)。自然數的歷史。《朗文教育專訊》，第八期，6-9。
11. 黃毅英 (2005 b)。從教學上的考慮「0」。《朗文教育專訊》，第八期，10-11。
12. 黃毅英 (2007)。數學化過程與數學理解。《數學教育》，第二十五期，2-18。
13. 黃毅英 (2012)。追尋定義之路。《數學教育》，第三十三期，3-11。
14. 黃毅英、張僑平 (2014)。數學教學的幾個最基本的問題：做數、概念與理解。《學校數學通訊》，第十八期，1-18。
15. 歐幾里德著；藍紀正、朱思寬譯 (2003)。《幾何原本》。西安：陝西科學技術出版社。
16. 鍾保珠與馮振業 (2013)。被乘數和乘數的迷思。載黃家樂、李玉潔與潘維凱 (編)。《香港數學教育會議 2013 論文集》 (頁 44-55)。香港：香港數學教育學會。
17. Clapham, C., & Nicholson, J. (2009). *The concise Oxford*

*dictionary of mathematics (4<sup>th</sup> ed.)*. Oxford: Oxford University Press.

18. De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics* 14 (1), 11-18.
19. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

## **5. “Seed - A journey through collaboration and exploration”**

LAM Lai-chun

Yu Chun Keung Memorial College No.2

### **Introduction**

It was a valuable experience for me that I was lucky to have the chance to be a seconded teacher in the Mathematics Education Section of the Education Bureau in 2014/2015. During this year, I had the opportunity to assist in two seed projects. One was “Exploration and Development of Effective Self-directed Learning Strategies in the Dimension of Number & Algebra (MA0214)” for the junior secondary level. The other one was in senior secondary and the title was “Exploration and Development of Effective Strategies on the Learning and Teaching of Loci and Transformation of Functions (MA0314)”. The former one was related to exploring new pedagogy in teaching Mathematics while the latter one was concerned with developing effective strategies in teaching particular topics in Mathematics. I would like to share with you my experience in participating in the seed project in the junior forms. For the seed project in the senior forms, I hoped I might have the opportunity to share with you in other occasions later on.

## **Exploration and Development of Effective Self-directed Learning (SDL) Strategies in the Dimension of Number & Algebra (MA0214)**

There were five seed schools participating in the project. Each school had to choose two topics for exploration on the pedagogy throughout the academic year. As a seconded teacher, I had the privilege to connect with teachers from different seed schools. We paid visits to their schools and had meetings with them. From my 20 years of teaching experience, I was pleased that I could discuss with teachers ideas and views on the project through participating in various meetings and sharing.

### **(a) A SDL lesson in a mathematics classroom**

The Seed Project used the following 4-step process to formulate a SDL framework (adapted from the position paper of The Centre for Teaching Excellence, University of Waterloo):

#### **(i) Being ready to learn**

To arouse student's readiness in learning, one must rely on something which students were interested to look at, and video was a solution. Teachers were asked to produce a video clip and let students watched it in the evening before the beginning of the lesson.

Video was used here for the following reasons:

- (a) Students could watch the video at their own time and place when they felt that was desirable to do so; and
- (b) Students could rewind and watch the video again if they found something which was not understood.

(ii) Understanding learning goals

The video should last for about 5 minutes (not exceeding 7 minutes) since student's attention span declined over time and it should present the key concept of the teaching topic. After watching the video, they had to complete a short reflection exercise which consisted of 5 – 6 questions to assess their understanding of the topic, thereby setting their specific learning goal.

(iii) Engaging in the learning process

A collaborative learning activity was then introduced in the lesson. This activity should follow closely the learning content in the video. Students were divided into different groups to take part in the activity. This

activity served two purposes. First of all, students used their creativity, communication and problem solving skills to solve the questions in the activity; and secondly, they had to cooperate and collaborate with each other closely in order to finish the task. Through this group learning exercise, teachers could motivate and enhance students' deeper understanding of the topic being studied in the lesson.

#### (iv) Evaluation

At the end of the learning activity, teachers could ask students to present their works in front of the whole class. Before the end of the lesson, students should revisit the reflection exercise which they did before the lesson began and correct any mistake(s)/error(s) made previously with a different coloured pen. As a follow-up, students could select appropriate questions from their textbook exercises as homework according to their own learning style.

### **(b) Videos, Collaborative Activities and Reflection Exercises**

Five seed schools prepared their own videos, designed their learning activities and reflection exercises according to the topic they selected for the project. The topics for

implementing SDL strategies included the followings:

- S1            Percentage  
               Manipulating Polynomials  
               Linear Equation in One Unknown
- S2/S3        Linear Inequality in One Unknown  
               Index Laws

**(c) Students' samples and Activity materials**

Students' samples of reflection exercises and activity materials were displayed below:

Students' samples

Inequalities

Solve the following inequalities and represent the solutions graphically.

1.  $4y < 20$

Watch two YouTube Videos and then finish the Questions.

一元一次不等式

在完成以下的習題前，請同學先經電郵內的連結，觀看兩段片 (Video\_1 是第一堂活動的小總結，約 2 分鐘；video\_2 是 4 題一元一次不等式的教學，約 4 分鐘)。

[http://mail.lkys.edu.hk/~loky/doc/S3\\_CH2\\_Video\\_1.mp4](http://mail.lkys.edu.hk/~loky/doc/S3_CH2_Video_1.mp4)

[http://mail.lkys.edu.hk/~loky/doc/S3\\_CH2\\_Video\\_2.mp4](http://mail.lkys.edu.hk/~loky/doc/S3_CH2_Video_2.mp4)

解下列各不等式，並用圖像表示其解。



1.  $x + 4 \geq -5$

### 百分法

#### I 第一部分：觀看短片

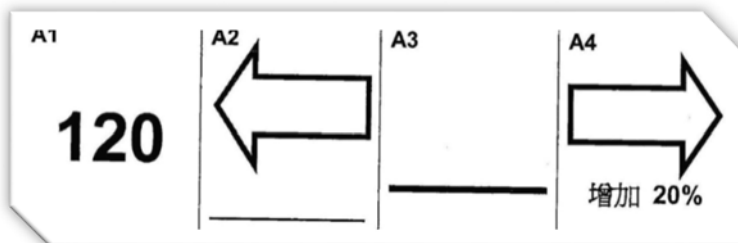
請同學從本校網頁學習天地 \ 學科網頁 \ 數學科  
 \ 中一數學百分法-上網問功課

#### II 第二部分：閱讀廣告，並完成以下習作。

1. 以\$50 現金卷購買\$200 個人護理產品，等同多少折優惠。

### Activity materials

#### Maze



Students have to find the correct answers to fill in the blanks by following the instructions given by different arrows in the maze diagram.

## Puzzle Game

|  |  |
|--|--|
| <p>Coefficient of <math>xy^3</math> is 2</p> <p><math>5xyz^3 + 6y^2z - xy^4 + 2</math></p> <p><math>x^2 + x^2y - 6y</math></p> | <p>Degree of polynomial is 5</p> <p><math>4xy^2 + 6xyz^2 + 7x^2y^3</math></p> <p><math>-3 + 7x - 6y^2</math></p> |
| <p>Degree of polynomial is 5</p>   | <p>Degree of the polynomial is 5</p>   |
| <p>Constant term is -8</p>   | <p>Constant term is -8</p>   |

Students have to find the correct cards to match with other cards by following the instructions given. Each side of the card has to match with the corresponding side of the other card in the puzzle.

## 指數 Bingo 遊戲

在下列方格填上 1 至 25，位置任選，每個數字不可重複。

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

當老師在黑板寫上題目，同學須在表格中圈出正確答案的指數。若橫、直或斜有 5 格圈出連成一直線，便可勝出。

#### **(d) Design of a SDL lesson**

The design of the lesson was activity-based. By incorporating videos, collaborative group activities and reflection exercises, we hoped students would be more self-motivated and self-directed in learning Mathematics. Videos were introduced so that students could watch them at their own pace and could review them from time to time. Depending on different topics in the dimension of number and algebra, various activities were presented in the lesson. Through these activities, students were encouraged to discuss with their group-mates and teachers in their learning process. It was suggested that teachers should make their own modifications and justifications in order to cater for the learning diversity of their students.

#### **Conclusion**

In the broadest meaning, self-directed learning is both a goal and a process to enhance learners' readiness and capacity to take the responsibility to manage their own learning activities. The seed project "Exploration and Development of Effective Self-directed Learning Strategies in the Dimension of Number & Algebra" was a very meaningful project. It was a research for interdisciplinary study. It tried to explore a new teaching perspective in the dimension of Number & Algebra in a traditional Mathematics classroom. Through participating in the project, a learning circle was formed with teachers from different

schools. We all have a common goal in mind that we wanted our students to be more self-motivated and self-directed in their learning. We hoped our lesson was an enjoyable experience for all our students. Though it was just a beginning in our journey of exploration, the friendship and relationship that we had built in the process of our discovery would last and certainly would continue to grow and flourish as we moved on to our next stage of implementation of the project in our coming school year of 2015/16.

## References

1. *Self-Directed Learning: A Four-Step Process*. Retrieved from University of Waterloo, Centre for Teaching Excellence Web site:  
<https://uwaterloo.ca/centre-for-teaching-excellence/teaching-resources/teaching-tips/tips-students/self-directed-learning/self-directed-learning-four-step-process>

## Suggested Reading

1. Knowles, M.S.(1975). *Self-Directed Learning: A Guide for Learners and Teachers*. Englewood Cliffs: Prentice Hall/Cambridge.

## 6. 「從閱讀中學習(小學數學)」試行計劃反思

李少瑩

香港南區官立小學

課程發展議會在《基礎教育課程指引－聚焦・深化・持續（小一至小六）》（2014）中展望未來指出，「從閱讀中學習」仍是學校必須持續發展的關鍵項目。數學教育組希望藉著此計劃在學校推廣閱讀數學圖書的文化，讓參與計劃的學校能培養學生閱讀數學圖書的興趣，提升他們閱讀的能力和質素，並透過閱讀分享發展學生的表達技巧和溝通能力。

通過計劃的推行，除了推動數學閱讀的文化外，亦希望藉著研討會，與其他學校分享參與計劃學校的成功經驗，把數學閱讀的文化推廣至更多的學校。在 2014/15 學年我透過教師借調計劃參與了數學教育組的閱讀計劃，確實讓我獲得很多寶貴的經驗。

這學年的「從閱讀中學習（小學數學）試行計劃」於 2014 年 9 月至 2015 年 7 月期間進行，參與的小學共有六間。數學教育組的課程發展主任和我在學期初先到各參與學校進行第一次探訪，了解學校的現況，並簡介計劃的目的和內容，協助學校構思及制訂閱讀推行計劃。然後再於學年內不同的時間再次到訪學校，了解計劃的進

行情況，包括與教師面談、觀察相關的閱讀活動、與教師作中期檢討和提供改善建議、了解下半年計劃的準備情況和商討推行細節。

學校如何開展閱讀計劃？首先，老師先進行討論，配合學校發展方向為閱讀計劃訂立目標及活動。訂立目標後，我們根據學校現況，向學校提供一些推行數學閱讀計劃的策略。

根據過往曾參與此計劃的學校的分享，他們在下列項目中採用的策略是：

有什麼方法引導學生進行數學圖書閱讀？

- 老師先檢視校內的數學圖書數量，再透過購置或借用公共圖書館數學圖書，以增加書量。
- 以簡介會的形式向學生介紹閱讀計劃及介紹有趣的數學圖書。
- 在圖書館展出最新的數學圖書，以吸引學生閱讀。
- 在課室或圖書館設置數學圖書專區，方便學生借閱。
- 老師於課堂與學生分享閱讀方法。
- 在學校走廊的位置製作壁報介紹有趣的數學閱讀材料。
- 把學生優秀的閱讀成果或作品向其他學生展示。



圖書館展區



數學圖書推介壁報



老師推介



課室篇章閱讀



校園電視台製作學生圖書  
推介短片



學生向其他同學推介數學圖  
書

### 何時可進行閱讀活動？

- 早讀時段，學生以閱讀小組的形式進行閱讀。
- 圖書課時，學生選取喜愛的數學圖書閱讀。
- 長假期前，安排學生借閱圖書於假期閱讀。

### 如何分享閱讀成果？

- 學生互相分享書籍內容及閱讀心得。

- 
- A group of students in a classroom setting, sitting on the floor and looking towards a teacher standing at the front. A large screen displays a presentation slide.

### 真心话大冒险

游戏规则

参加游戏的同学分为两组，进行7次问答游戏。每次，由两组同学轮流提问，对方回答。答对者得一分，答错者扣一分。最后得分高者获胜。

1. 你最喜欢的颜色是什么？

2. 你最喜欢的动物是什么？

3. 你最喜欢的食物是什么？

4. 你最喜欢的季节是什么？

5. 你最喜欢的运动是什么？

6. 你最喜欢的书是什么？

7. 你最喜欢的电影是什么？

### 数学知识大比拼

游戏规则

参加游戏的同学分为两组，进行7次问答游戏。每次，由两组同学轮流提问，对方回答。答对者得一分，答错者扣一分。最后得分高者获胜。

1. 1+1=?

2. 2+2=?

3. 3+3=?

4. 4+4=?

5. 5+5=?

6. 6+6=?

7. 7+7=?

標題: D52\_ 二

日期: 2015 年 4 月 19 日

姓名: \_\_\_\_\_

作者: 曹志杰

科目: 初中數學

題目: 寫下最吸引你內容  
What is the most interesting thing you found out  
可寫任何資料或算式或圖形  
"Attach extra pages or even create something to share your wonderful findings  
盡善盡美, 但求能夠, 吸引別人的眼睛"  
寫下數學的「趣」事, 例如: 就學取巧  
寫下數學的產生, 從關於書中的歷史  
寫下數學不存在的數值, 卻不解釋  
寫下第一組, 第二組, 第三組, 第四組  
寫下在學過, 完滿, 放學, 放學, 放學  
寫下在學過, 完滿, 放學, 放學, 放學  
數字, 原來是放學, 放學, 放學, 放學  
創作

從書中, 我學到了 (數學的歷史, 知識, 趣—)  
From the book, I learn  
從這本書的歷史, 知識, 我學到了數學歷史, 學生  
這是息息相關的, 我們應該時刻保持開放  
的心態去面對數學課。

我 ( ) 不會 ( ) 就這書介紹給你同學。  
(I will / will not) recommend this book to my classmates.

Rating:   

1113 D52 Math T4 Book Review L12

8 下 年 級 第 1 次

[illegible]

---

School Mathematics Newsletter · Issue No. 19



學閱讀文化和氣氛。

## (2) 教師層面

此閱讀計劃能促進教師以身作則閱讀數學圖書，並推廣不同的閱讀材料給學生，以提升學生對閱讀數學書籍的興趣和習慣，從而提升學生自學數學的能力。

教師透過導讀和設計閱讀材料延伸課堂的探索和學習。

## (3) 學生層面

透過不同的閱讀活動及分享讓學生展示閱讀成果，以促進從閱讀中學習。提升學生閱讀數學圖書的興趣和引發學生自主學習數學的動機、提升表達技巧及信心、聆聽及欣賞別人的態度。

本年度總結各試行學校教師的意見，主要認為(i)校內數學圖書數量不足並且種類較少、(ii)由於計劃初期教師欠缺推行閱讀計劃的經驗，開展計劃感吃力、(iii)教學時間緊迫，匯報時間不足及(iv)各科組協調不足、合作有待改善。相信下年度再儘早安排與各科配合，可望在各方面更見成效。而老師對計劃的展望都非常正面，他們認為這計劃都能做到提供更多圖書供學生閱讀，透過閱讀提升學生主動學習數學的能力、溝通的技巧和表達能力

，特別能促進教師參與推動過程，增加教師了解數學圖書的認識。

計劃實施時學校所遇到的困難及解決方法：

1. 部分學校的閱讀計劃涉及圖書館或其他組別的協調，如安排早會閱讀分享或圖書推介時間等，部分學校各組別間的協調不足，合作有待改善

解決辦法：學校了解上學期的協調不足情況後，建議學校的課程發展主任擔當協調角色，促使學校以全校參與的形式推廣閱讀計劃。

2. 校內數學圖書數量不足、種類較少

解決辦法：部分學校能增購數學圖書。未能增購足夠數學圖書的學校，教師自製篇章供學生閱讀。

3. 學生不懂如何閱讀數學圖書、以及學生的數學能力、閱讀能力和興趣差異頗大

解決辦法：教師透過導讀，提升學生的閱讀能力，和自學數學的能力。教師亦因應學生的能力和興趣推介不同類型的圖書，包括繪本、漫畫、故事類、題目類等數學圖書以配合不同學生的需要，並且安排分享活動，舉辦「喜愛書籍、篇章選舉」，以提升學生的閱讀興趣及氣氛。

4. 部分學校安排學生在數學課堂或補課時段進行導讀、篇章延伸活動、匯報和分享，但由於教學時間緊迫，教師表示相關閱讀活動會影響教學進度

解決辦法：預先在教學進度表中加入閱讀活動的時間，或利用圖書課進行部分閱讀活動。

5. 一般教師欠缺導讀和製作延伸閱讀材料的經驗，大部分教師對選取篇章、設計篇章後的延伸活動感到困難

解決辦法：教育局提供一些閱讀材料供學校使用和參考，亦透過共同備課與教師分享如何設計篇章延伸活動，讓教師從實踐中掌握選擇閱讀材料和設計延伸活動的能力。

總括來說，今年借調到數學教育組參與「從閱讀中學習(小學數學)」試行計劃，讓我在以下幾方面得到不少經驗。

### 有效的學與教

透過參與試行計劃，與各學校教師訪談及共同研究適切而有效的學習活動，再經過教師的實踐，讓我加深對設計教學活動的認識，期望自己回到學校後能與其他教師分享，提升學與教的經驗。

### 促進學習的評估

在參與此閱讀計劃後，我明白到透過學生的閱讀報告，能令教師了解學生對數學圖書的興趣，報告亦能反映學生從閱讀過程中所學到的數學知識。此外，透過工作紙亦能了解學生在課堂的學習成效，從而了解相關教學設計是否達到預期目的以及如何改善。

### 組織學校網絡及學習社群

閱讀計劃中的聯校分享活動，能讓參與的學校透過電郵互相分享教學資源，能促進學校之間的經驗和成果分享，讓不同學校彼此借鏡、互相觀摩。

### 參考資料

1. 課程發展議會（2014）。*基礎教育課程指引－聚焦・深化・持續（小一至小六）*。香港：課程發展議會。

## 7. 種籽計劃「探討及發展度量範疇的學與教的有效策略」反思

盧翠儀

中華基督教會基慈小學

為了配合課程持續發展和改革，課程發展處自二零零一至零二年開始推行協作研究及發展(「種籽」)計劃。在2014/15學年，本人透過教師借調計劃參與了數學教育組的種籽計劃，成為借調老師，讓我有機會嘗試一些當學校教師以外不同的工作。

2014/15年度的種籽計劃以「探討及發展度量範疇的學與教的有效策略」為主題，我負責三間「種籽」學校的協作計劃，在與課程發展主任一起跟學校共同協作研究及發展這範疇有效的學與教策略的過程中，讓我獲益良多。

跟「種籽」學校教師一起協作設計的教學活動和流程，通過試教及評估作驗證，讓我感受到在「度量」範疇的學習單位中，進行有意義的實物操作活動和使用實作評估對學生學習度量概念和量度技巧是非常重要的；我認為在教學時間十分緊迫下，仍堅持安排課堂實作活動是很值得的，無疑兩者中取得平衡是有一定的難度，這亦是最值得我思考的地方，回想自己多年的教學中，似乎花了太多時間跟學生反覆練習運算技巧，忽略了課堂實作活動的重要性。

## 教學流程設計

在與「種籽」學校商議教學流程時，我們會先向教師們了解學生的學習難點，再依據《數學課程指引》中列出的學習重點，針對性及有系統地共同設計教學流程，我對這種有效的備課方式，最為欣賞，覺得這樣的備課會，既有效率，又能改善學生的學習及增進教師的專業。

在這學年種籽計劃的多個課題中，讓我印象最深刻的，要算是三年級 3M3 容量了，因為我以前也曾惆悵著這單元的教學設計，其實學校以往也有為這單元編排課堂活動，但整體上欠缺系統，科任老師欠默契，對重要的概念沒有詳細的討論，以致學生的學習未如理想。

現在我們跟種籽學校的教師會先從學生的學習難點作討論，找出須要釐清的概念，如何更有系統安排課堂學習活動、進行實作活動的場地安排，我認為這幾方面都是首要考慮，但以往卻是被遺忘的。

## 課堂實作活動的重要性

### (I) 充分的準備

在學習單位 3M3 容量裏，學生除了要認識容量的公認單位外，還須要知道  $1 \text{ 升} = 1000 \text{ 毫升}$  這關係，教師設計了多個課堂實作活動，讓學生利用注水的方法找出升和毫升的關係之餘，同時要培養他們的量感。從課堂觀察所見，學生不但對這些實作活動感興趣，而且學習態度十分認真。



教師考慮到在課室進行“倒水”活動，可能出現的“水災”情況，所以限制每組學生必須在盆子裏進行活動，這方法十分有效。

圖一：活動所需用品

## (II) 認真的量度

教師在活動前先與學生討論，讓學生明白，小瓶上標示 100mL 的意思，在日常生活中，盛載飲品的容器上標示的數字，一般是指有多少飲品盛載在容器內，所以教師事先已找出小瓶上盛載 100mL 的位置，畫上藍色橫間，方便學生進行量度活動。教師的認真讓學生也認真起來，從課堂所見，學生注水到小瓶後謹慎地觀察，確保水位是在教師標示的 100mL 位置上，然後才小心翼翼地倒進一個標示一升的大瓶子裏，倒一次、兩次、三次……，直至把大瓶子注滿一升的水，找出升和毫升的關係。雖然是一個簡單的活動，但學生認真的態度，把以往“玩水嬉戲”的感覺一下子變成“正經嚴謹”的求證活動，通過多次的注水，他們也對 100mL 約有多少有著實在的感覺了。



圖二：學生把水注到小瓶



圖三：學生認真地觀察圖

### (III) 重要的鞏固

這個課堂活動是要求每組學生自製量杯，但教師提供給每組注水的小瓶容量卻不是一樣的，有 200mL、250mL、330mL、405 mL 和 450mL，但各組都要在大瓶注一升的水，以準和快為目標；過程中學生須在大瓶上標示每次注水的刻度，直至注滿一升的水。最初一些拿到 405mL 和 450mL 小瓶的組別特別雀躍，認為已佔了優勢，最後卻因未能準確決定一升的位置而落敗，相反，用 200mL 和 250mL 注水小瓶的組別卻能輕易量度到一升的位置。學生在這活動中，不但明白量杯上刻度的意思，亦能合理解釋為何一般一升量杯多以 200mL 或 250mL 作刻度的單位。





圖四：學生自製量杯



圖五：在每 330mL 標上刻

礙於課堂教學時間和資源所限，教師很容易忽略實物操作教學過程的重要性；從上述例子可見，學生透過實物操作，不但能培養同學間的協作能力，學生細心檢查過程中的每一個步驟，更是他們認真學習態度的培養，學生經過實際的操作，能更深入認識和掌握概念，同時能培養對升和毫升的量感。

當完成觀課後，我們會與學生面談，他們絕大部份都會表示自己是喜歡學習數學的，認為數學的內容很有趣，他們亦不約而同地表示喜歡數學課堂的實作活動：

“我喜歡「倒水」活動，可以親身體驗下。”

“我喜歡用小瓶把水倒在另一個大的容器內，我學會了 10 小瓶的容量就等如 1L。”

“因為小瓶標記注 100mL，而我們倒了 10 次後變成 1L。”

訪談中，學生表示課堂活動過程遇到的最大困難，原來是怕組員的量度不太準確，於是自己會再量。可見他們是相

當認真去處理這些課堂活動。而教師更表示，通過這些有意義的課堂活動，不但讓他們對這單元的內容重點更了解，他們的量感也大大提升。

總括而言，本年度借調到數學教育組參與「種籽」計劃，與教師協作設計教學計劃和教案、到學校進行觀課、與教師和學生面談，這些體驗非常難得，讓我能擴闊自己的眼界，個人的專業發展亦有很大的提升，尤其對「度量」範疇的學與教有更深入的了解，當我深深體會到實物操作活動是「度量」範疇的學與教不可或缺時，卻同時發現學校往往受紙筆評估的限制，即使是有關量度的考題，例如量杯內的水有多少，都只是以“量度”考卷上的圖像為主，在這學與教跟評估不相符的情況下，就是影響教師教學策略取捨最主要的元素之一，大大影響了學生的學習。我希望能把借調其間所學有關在「度量」範疇的學教評經驗帶回學校，與更多同工分享，在校內持續推展和改革校本課程相關的工作。

## 8. The retrospect of Hong Kong Mathematics Olympiad

The 32<sup>nd</sup> Hong Kong Mathematics Olympiad was held on 18 April 2015. The Champion, First Runner-up and Second Runner-up were respectively La Salle College, G.T. (Ellen Yeung) College and Queen Elizabeth School.

The Prize Giving Ceremony was held immediately after the end of the competition. The Organising Committee invited Professor KONG Siu-cheung (Head of Department of Mathematics and Information Technology), Dr MAN Yiu-kwong (Associate Head of Department of Mathematics and Information Technology), Ms WAI Chi-lai (the Vice-chairman of the 32<sup>nd</sup> Hong Kong Mathematics Olympiad Organising Committee), Mr LEE Pak-leung (the Chief Curriculum Development Officer (Mathematics)) and Mr CHAN Siu-chuen (the Senior Curriculum Development Officer (Mathematics)) of the Education Bureau, HKSARG as guests of honour.



The questions used in the competition are shown below for teachers' and students' easy reference and future training use.

### Individual Event 1

1. 若  $|x + \sqrt{5}| + |y - \sqrt{5}| + |z| = 0$  , 求  $\alpha = x^2 + y^2 + z^2$  .  
If  $|x + \sqrt{5}| + |y - \sqrt{5}| + |z| = 0$  , determine  $\alpha = x^2 + y^2 + z^2$  .

2. 若  $\beta$  為乘積  $\underbrace{11111 \cdots 11}_{\alpha \text{ 個 } 1} \times \underbrace{99999 \cdots 99}_{\alpha \text{ 個 } 9}$  所有數位的數字之和, 求  $\beta$  的值。

If  $\beta$  is the sum of all digits of the product  $\underbrace{11111 \cdots 11}_{\alpha \text{ 1s}} \times \underbrace{99999 \cdots 99}_{\alpha \text{ 9s}}$ , determine the value of  $\beta$  .

3. 設實函數  $f(x)$  對於所有實數  $x$  及  $y$  滿足  
 $f(xy) = f(x)f(y)$  , 且  $f(1) < 1$  . 求  $\gamma = f(\beta) + 100 - \beta$  的值。

Suppose that the real function  $f(x)$  satisfies  
 $f(xy) = f(x)f(y)$  for all real numbers  $x$  and  $y$  , and  
 $f(1) < 1$  . Determine the value of  $\gamma = f(\beta) + 100 - \beta$  .

4. 若  $n$  為正整數及  
 $f(n) = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1$  , 求  $\delta = f(\gamma)$  的值。

If  $n$  is a positive integer and  
 $f(n) = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1$  , determine the value of  $\delta = f(\gamma)$  .

## Individual Event 2

1. 若  $x_0, y_0, z_0$  為以下方程組的解，求  $\alpha = x_0 + y_0 + z_0$  的值。

If  $x_0, y_0, z_0$  is a solution to the simultaneous equations below, determine the value of  $\alpha = x_0 + y_0 + z_0$ .

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ y - x - z = -2 \\ z - x - y = -4 \end{cases}$$

2. 若  $\beta$  為  $\underbrace{111\cdots111}_{100\text{個}1} \div \alpha$  的餘數，求  $\beta$  的值。

If  $\beta$  is the remainder of  $\underbrace{111\cdots111}_{100 \text{ 1s}} \div \alpha$ , determine the value of  $\beta$ .

3. 若  $\gamma$  為  $\left[ (\beta - 2)^{100} + \beta^{50} + (\beta + 2)^{25} \right] \div 3$  的餘數，求  $\gamma$  的值。

If  $\gamma$  is the remainder of  $\left[ (\beta - 2)^{100} + \beta^{50} + (\beta + 2)^{25} \right] \div 3$  determine the value of  $\gamma$ .

4. 若方程  $x^4 + ax^2 + bx + \delta = 0$  有四實根，且已知其中三個為 1、 $\gamma$  及  $\gamma^2$ ，求  $\delta$  的值。

If the equation  $x^4 + ax^2 + bx + \delta = 0$  has four real roots with three of them being 1,  $\gamma$  and  $\gamma^2$ , determine the value of  $\delta$ .

### Individual Event 3

1. 由 1 至 1000 的正整數中，有多少個不能被 5 或 7 整除？

Of the positive integers from 1 to 1000, how many are not divisible by 5 or not divisible by 7?

2. 求  $\beta = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + \alpha^2$  的值。

Determine the value of  $\beta = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + \alpha^2$ .

3. 求當  $\beta$  除以以下數列中的第 1993 項時的餘數。

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ....

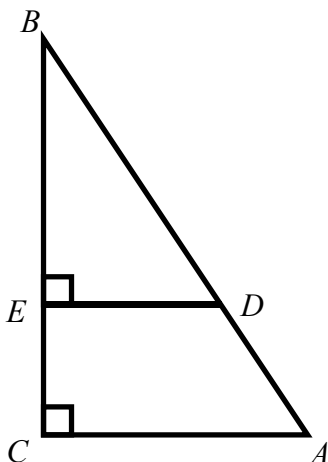
Determine the remainder of  $\beta$  divided by the 1993<sup>rd</sup> term of the following sequence:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ....

4. 在下圖中， $BE = AC$ 、 $BD = \frac{1}{2}$  及  $DE + BC = 1$ 。若  $\delta$  是  $ED$  的長度的  $\gamma$  倍，求  $\delta$  的值。

In the figure below,  $BE = AC$ ,  $BD = \frac{1}{2}$  and

$DE + BC = 1$ . If  $\delta$  is  $\gamma$  times the length of  $ED$ , determine the value of  $\delta$ .



#### Individual Event 4

1. 設  $\alpha$  為  $2^{1000}$  除以 13 的餘數，求  $\alpha$  的值。

Let  $\alpha$  be the remainder of  $2^{1000}$  divided by 13, determine the value of  $\alpha$ .

2. 求  $\beta = \frac{(7+4\sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}} - (7-4\sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha}}$  的值。

Determine the value of  $\beta = \frac{(7+4\sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}} - (7-4\sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha}}$ .

3. 若  $f(a) = a - \beta$  且  $F(a, b) = b^2 + a$ ，求  $\gamma = F(3, f(4))$  的值。

If  $f(a) = a - \beta$  and  $F(a, b) = b^2 + a$ , determine the value of  $\gamma = F(3, f(4))$ .

4. 若  $\delta$  是方程  $x^{\log_{\gamma} x} = 10$  所有實根的積，求  $\delta$  的值。

If  $\delta$  is the product of all real roots of  $x^{\log_{\gamma} x} = 10$ , determine the value of  $\delta$ .

### Group Event 1

1. 化簡  $\left( \frac{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + \dots + n \times 3n \times 9n}{1 \times 5 \times 25 + 2 \times 10 \times 50 + \dots + n \times 5n \times 25n} \right)^{\frac{1}{3}}$ 。

Simplify  $\left( \frac{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + \dots + n \times 3n \times 9n}{1 \times 5 \times 25 + 2 \times 10 \times 50 + \dots + n \times 5n \times 25n} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

2. 在 50 隊香港數學競賽的參賽隊伍中，沒有一隊能答對一團體項目中的全部共四個題目。若該項目中的第一



題有 45 隊答中，第二題有 40 隊答中，第三題有 35 隊答中，及第四題有 30 隊答中。請計算有多少隊伍同時答中第三及第四題。

Among 50 school teams joining the HKMO, no one team answered all four questions correctly in the paper of a group event. If the first question was solved by 45 teams, the second by 40 teams, the third by 35 teams and the fourth by 30 teams. How many teams solved both the third and the fourth questions?

3. 設  $n$  為 3659893456789325678 和 342973489379256 的乘積。求  $n$  中數字的位數。

Let  $n$  be the product of 3659893456789325678 and 342973489379256. Determine the number of digits of  $n$ .

4. 三個半徑分別為 2、3 及 10 單位的圓同時放於另一大圓內，使得四個圓都剛好彼此接觸。求大圓的半徑的值。

Three circles of radii 2, 3 and 10 units are placed inside another big circle in such a way that all circles are touching one another. Determine the value of the radius of the big circle.

## Group Event 2

1. 在一個  $3 \times 3$  的方格內的九個正方形上，分別填上紅色或藍色。若  $\alpha$  為不同着色方法的數量而使得所有  $2 \times 2$  方格中所包含的正方形都不是全為紅色，求  $\alpha$  的

值。

On a  $3 \times 3$  grid of 9 squares, each square is to be painted with either Red or Blue. If  $\alpha$  is total number of possible colourings in which no  $2 \times 2$  grid consists of only Red squares, determine the value of  $\alpha$ .

2. 若 25 個連續正整數之和剛好等於三個質數的積，這三個質數之和最小是多少？

If the sum of 25 consecutive positive integers is the product of 3 prime numbers, what is the minimum sum of these 3 prime numbers?

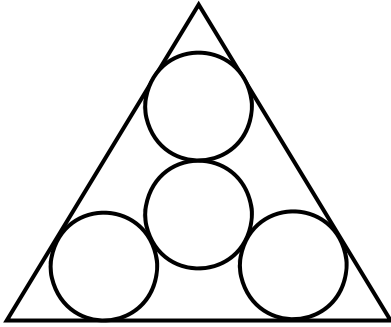
3. 求以下方程的所有實根之和

$$|x+3| - |x-1| = x+1$$

Determine the sum of all real roots of the following equation

$$|x+3| - |x-1| = x+1.$$

4. 在下圖中，四個大小相同的圓形剛好放入一個全等三角形內。若圓的半徑為 1 單位，求三角形的面積的值。  
In the figure below, there are 4 identical circles placed inside an equilateral triangle. If the radii of the circles are 1 unit, what is the value of the area of the triangle?



### Group Event 3

1. 化簡  $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$  。

Simplify  $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$  .

2. 設  $p$  為質 5 數及  $m$  為整數。若

$$p(p+m)+2p=(m+2)^3, \text{ 找出 } m \text{ 的最大可能值。}$$

Let  $p$  be a prime and  $m$  an integer. If

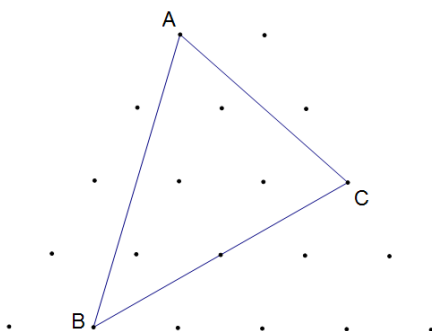
$p(p+m)+2p=(m+2)^3$ , find the greatest possible value of  $m$ .

3. 求以下方程的根  $x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$  。

Determine a root to  $x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

4. 下圖中，由任意彼此相鄰的三點所構成的三角形的面積皆為 1。求三角形 ABC 的面積的值。

In the figure below, the area of any triangle formed by three neighbouring points is 1. Determine the value of the area of the triangle ABC.



#### Group Event 4

1. 設  $b = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots - 2012^2 + 2013^2$ 。求  $b$  除以 2015 的餘數。

Let  $b = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots - 2012^2 + 2013^2$ .

Determine the remainder of  $b$  divided by 2015.

2. 考慮所有最大數位的數字為 6，及當把這個最大數位移除後，餘下數值剛為原來數值的  $\frac{1}{25}$  的正整數。找出在這些正整數中，數值最小的一個。

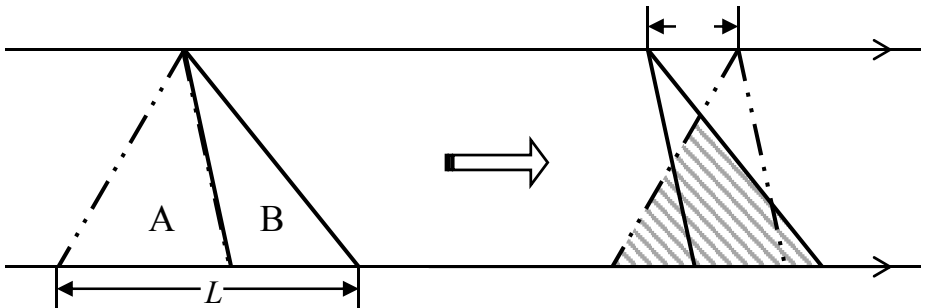
There are positive integers with leading digit being 6 and upon removing this leading digit, the resultant integer is  $\frac{1}{25}$  of the original value. Determine the least of such positive integers.

3. 若  $x + \frac{1}{x} = 1$ ，求  $x^5 + \frac{1}{x^5}$  的值。

If  $x + \frac{1}{x} = 1$ , determine the value of  $x^5 + \frac{1}{x^5}$ .

4. 在下圖中，若三角形 A 向右移動  $\alpha$  單位後，所形成的陰影部分的面積為三角形 A 及 B 面積總和的  $\alpha/L$ 。求  $\alpha/L$  的值。

In the figure below, when triangle A shifts  $\alpha$  units to the right, the area of shaded region is  $\alpha/L$  of the total area of the triangles A and B. Determine the value of  $\alpha/L$ .



## **9. Mathematics Project Competition for Secondary Schools (2014/15)**

Project learning is one of the Four Key Tasks advocated in the curriculum reform. It is a powerful learning and teaching strategy to promote students' capabilities for self-directed learning within and across Key Learning Areas. It allows students to have more space for learning and provides an alternative learning experience.

In this regard, the Mathematics Education Section of the Education Bureau initiated the Mathematics Project competition (MPC) for Secondary Schools since 2001. The competition aims at promoting the interest of students in learning mathematics and developing students' generic skills through project learning.

The numbers of participants in MPC 2014/15 are as follows:

| School Year | No. of Projects Submitted | No. of Schools Participated | No. of Students Participated |
|-------------|---------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 2014/15     | 54                        | 28                          | 219                          |

The Prize-giving Ceremony of Mathematics Project and Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2014/15) cum Exhibition of the Winning Entries was smoothly held on 9 July 2015 at Lecture Theatre, 4/F, West Block, Education Bureau Kowloon Tong Education Services Centre, 19

Suffolk Road, Kowloon Tong, Kowloon. Though the tropical cyclone warning signal number 8 was announced to be hoisted in the afternoon, there were 54 winners of MPC from 9 schools, 9 teachers and 8 members of the Organising Committee of MPC (2014/15) joining the Ceremony. Chairman from the Organising Committee of MPC (2014/15) gave a brief account of the entries. The trophies, medals and certificates of merit were presented to the winners in the Ceremony. The winning entries of the MPC were also exhibited at the venue of the Ceremony.



The next page shows the results of MPC in 2014/15.

## Results of Mathematics Project Competition for Secondary Schools (2014/15)

| Result                    | School                                   | Title of Project               |
|---------------------------|--|--------------------------------|
| Champion                  | PLK Celine Ho Yam Tong College           | 摺紙・多面「睇」<br>— 多面體摺紙圖<br>樣的接合流程 |
| 1 <sup>st</sup> runner-up | Wong Shiu Chi<br>Secondary School        | 螞蟻的「短路」問<br>題                  |
| 2 <sup>nd</sup> runner-up | SKH Lam Woo Memorial<br>Secondary School | A Study on<br>Cevian           |

### Award for Best Presentation

| School                         | Title of Project               |
|--------------------------------|--------------------------------|
| PLK Celine Ho Yam Tong College | 摺紙・多面「睇」— 多<br>面體摺紙圖樣的接合<br>流程 |



## Teams of Outstanding Performance and Their Winning Projects

| School (in alphabetic order)                 | Title of Project |
|--|------------------|
| Christian Alliance S C Chan Memorial College | Fun Kist Orange  |
| Wong Shiu Chi Secondary School               | 線條 LINE 的奇幻反彈    |
| Wong Shiu Chi Secondary School               | 咫尺天涯             |

## Teams of Good Performance and Their Winning Projects

| School (in alphabetic order)                 | Title of Project   |
|--|--|
| Christian Alliance S C Chan Memorial College | Carrom Mystery   |
| Methodist College                            | Wrong Method, Right Answer<br>Inspiration from an exercise of expected value |
| NLSI Peace Evangelical Secondary School      | 來自港鐵的票價  |
| Pui Ching Middle School                      | Cup Cup Cup  |
| Queen Elizabeth School                       | Cryptography and Algorithm   |
| St. Paul's Co-educational College            | Plus One   |
| STFA Yung Yau college                        | $\sqrt{2}$   |

| School (in alphabetic order)     | Title of Project  |
|----------------------------------|---|
| STFA Yung Yau college            | 讀心術的奧妙  |
| STFA Yung Yau college            | 大眾應如何選擇運動飲品   |
| STFA Yung Yau college            | 遇上盲人的啞巴   |
| Wah Yan College Hong Kong        | Investment Myth in Initial Public Offering – taking 2014 as example |
| YOT Tin Ka Ping Secondary School | 取勝之策  |

## **10. Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2014/15)**

“Reading to learn” is one of the four key tasks advocated in the curriculum reform. It helps students develop self-directed learning capabilities within and across different Key Learning Areas more readily. Reading widens students’ exposure and knowledge and helps schools achieve the learning targets of the school curriculum.

In view of this, the Mathematics Education Section organised the Mathematics Book Report Competition (MBRC) for Secondary Schools since 2007. The competition aims at promoting students’ interest in learning mathematics through reading. At the same time, it serves as a platform for students to share their experience in writing Mathematics book reports.

The numbers of participants in 2014/15 are as follows:

| School Year | No. of Schools Participated | No. of Students Participated |
|-------------|-----------------------------|------------------------------|
| 2014/15     | 54                          | 162                          |

The Prize-giving Ceremony of Mathematics Project Competition and Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2014/15) cum Exhibition of the Winning Entries was held on 9 July 2015 at Lecture Theatre, 4/F, West Block, EDB Kowloon Tong Education Services Centre, 19

Suffolk Road, Kowloon Tong, Kowloon. Thirty students and twenty teachers from twenty one schools, and seven members of the Mathematics Education Section and the Organising Committee members of MBRC participated in the Ceremony. The representative from the adjudication panel gave a brief report on the selection criteria and the features of the winning entries. The trophies and certificates were presented to the winners in the Ceremony. The reports received the First Class Prize were also exhibited at the venue of the Ceremony.



The next page shows the results of MBRC in 2014/15.

## Results of Mathematics Book Report Competition for Secondary Schools (2014/15)

### First Class Prize Winners

(Not arranged in order of merit)

| School   | Participant                 | Title of Book Report                 |
|--|-----------------------------|--------------------------------------|
| CSBS Mrs Aw<br>Boon Haw<br>Secondary School    | POOK<br>Chun-man            | 生活數學故事                               |
| Diocesan Girls'<br>School                      | LAM<br>Patricia-<br>dorothy | 生活數學故事                               |
| Diocesan Girls'<br>School                      | WONG<br>Yuet-to             | The Housekeeper and the<br>Professor |
| HKCWC Fung<br>Yiu King Mem<br>Secondary School | CHENG<br>Yiu-kwan<br>Kenny  | 別讓統計圖表唬弄你                            |
| St Paul's Convent<br>School                    | LAM Yik-<br>tung Lois       | How to lie with charts               |
| St Paul's Convent<br>School                    | Sigis YAU                   | The Housekeeper and the<br>Professor |

**Second Class Prize Winners**  
**(Not arranged in order of merit)**

| School  | Participant                | Title of Book Report                 |
|---|----------------------------|--------------------------------------|
| Aberdeen Baptist<br>Lui Ming Choi<br>College    | CHAU<br>Yung               | 黃金比例：1.61803.....<br>的秘密             |
| Bishop Hall<br>Jubilee School                   | CHAN Pak-<br>hei           | 黃金比例：1.61803.....<br>的秘密             |
| Bishop Hall<br>Jubilee School                   | CHEN Qi-qi                 | 從旅遊學數學                               |
| Chinese Y.M.C.A.<br>College                     | NGAN Tsz-<br>yuen          | 從生活學數學（阿草的<br>數學聖杯）                  |
| Christian Alliance<br>S C Chan Mem<br>Coll      | YEUNG<br>Sin-hang<br>Jason | 數學恩仇錄：數學史上的<br>十大爭端                  |
| Diocesan Girls'<br>School                       | LI Zhi-xin                 | The Housekeeper and the<br>Professor |
| Diocesan Girls'<br>School                       | TSE Jessica<br>Hei-wai     | 給青年數學家的信                             |
| Elegantia College<br>(Sponsored By Ed<br>Conv)  | FU Yi-yi                   | 數學女孩：費馬最後定理                          |
| Hong Kong<br>Christian Service<br>Pui Oi School | LEUNG<br>Chung-him         | 黃金比例：1.61803.....<br>的秘密             |

| School                                | Participant         | Title of Book Report   |
|---------------------------------------|---------------------|--|
| Kiangsu-Chekiang College (Kwai Chung) | FU Wing-yi          | 費馬最後定理   |
| La Salle College                      | LEE Kai-fung Kevin  | The Secret Life of Numbers: 50 Easy Pieces on How Mathematics Work and Think |
| Lai King Catholic Secondary School    | DENG Yun-yi         | 黃金比例：1.61803.....的秘密   |
| Lai King Catholic Secondary School    | LAM Tin-hon         | 澡堂裡遇見阿基米德  |
| Ng Yuk Secondary School               | HU Jing-min         | 從生活學數學（阿草的數學聖杯）  |
| Ng Yuk Secondary School               | LI Sen-hei          | 澡堂裡遇見阿基米德  |
| PLK Celine Ho Yam Tong College        | CHIU Wing-sze       | 從生活學數學（阿草的數學聖杯）  |
| PLK Celine Ho Yam Tong College        | MAK So-yiu          | 數字人：斐波那契的兔子  |
| Pui Ching Middle School               | CHEUNG Cheuk-lam    | 這個問題，你用數學方式想過嗎？  |
| Pui Ching Middle School               | NG Sze-long Matthew | 澡堂裡遇見阿基米德  |

| School                                | Participant          | Title of Book Report                                       |
|---------------------------------------|----------------------|--|
| Pui Ching Middle School               | NG Wing-lam          | 生活數學故事   |
| Queen Elizabeth School                | CHOW Hongai          | 一個數學家的嘆息   |
| Queen Elizabeth School                | LAM Ching            | 數學，為甚麼是現在這樣子？一門不教公式，只講故事的數學課                               |
| Queen Elizabeth School                | YIM Yuen-yan         | 陶哲軒教你聰明解數學   |
| Shung Tak Catholic English College    | NG Kai-him           | 數學恩仇錄——數學史上的十大爭端   |
| SKH Lam Woo Memorial Secondary School | NG Cheuk-hang        | 從生活學數學（阿草的數學聖杯）  |
| St Francis Xavier's School, Tsuen Wan | CHU Hon-ho           | Math Girls 2: Fermat's Last Theorem                        |
| St Mark's School                      | LO Richard Cheuk-yin | How to Lie with Charts                                     |
| St Paul's Convent School              | LAI Man-ching        | The Housekeeper and the Professor                          |
| St Paul's Convent School              | LEUNG Chi-ki         | The Numbers Behind NUMB3RS: Solving Crime with Mathematics |



| School                                   | Participant       | Title of Book Report         |
|--|-------------------|------------------------------|
| St Paul's Secondary School               | LAU Ying-tung     | 數學女孩：費馬最後定理                  |
| St Paul's Secondary School               | LEUNG Ching-tung  | 澡堂裡遇見阿基米德                    |
| STFA Tam Pak Yu College                  | CHAN Man-tik      | 數字的秘密生命:頂尖數學家如何工作和思考的50則有趣故事 |
| STFA Yung Yau College                    | WONG Tsz-yan      | 從生活學數學（阿草的數學聖杯）              |
| TWGH Kwok Yat Wai College                | SUNG Ka-him Peter | 給青年數學家的信                     |
| TWGH S.C. Gaw Memorial College           | CHAN Ho           | 數學女孩：費馬最後定理                  |
| TWGH S.C. Gaw Memorial College           | CHEUNG Po-hin     | 另類數學教室                       |
| Wong Shiu Chi Secondary School           | WONG Kam-chuen    | 陶哲軒教你聰明解數學                   |
| Wong Shiu Chi Secondary School           | YU Pak-hei        | 澡堂裡遇見阿基米德                    |
| Yan Oi Tong Tin Ka Ping Secondary School | LAM Po-kei        | 澡堂裡遇見阿基米德                    |

## **11. 2014/15 Statistical Project Competition for Secondary School Students**

The 2014/15 Statistical Project Competition for Secondary School Students (SPC), which was organised by the Hong Kong Statistical Society, co-organised by Education Bureau and sponsored by the Hang Seng Indexes Company Limited, has been completed successfully. The prize presentation ceremony was held at lecture theatre N203, West Kowloon Campus, the Hong Kong Polytechnic University on 27 June 2015. Officiating guests for the Prize Presentation Ceremony included Mr Leslie TANG Wai-kong, Commissioner for Census and Statistics and Dr Catherine CHAN Ka-ki, Deputy Secretary for Education.

During the Ceremony, Miss Viviane HO, Senior Vice President of the Hang Seng Indexes Company Limited, the sponsor of the Competition, gave a talk on Hang Seng Index and Statistics.

The 2014/15 SPC was its 29<sup>th</sup> round. The aims of the Competition is to promote a sense of civic awareness and encourage students to understand the local community in a scientific and objective manner through the proper use of statistics. Participants are requested to select, analyse and interpret official data on any social and economic issues in Hong

Kong.

The adjudication panel comprised 28 statistics practitioners from various tertiary institutes and the Census and Statistics Department. Professor WONG Heung of the Hong Kong Polytechnic University was the Chief Adjudicator.

The competition was divided into two Sections, namely Junior Section for Secondary 1 to 3 students and Senior Section for Secondary 4 to 6 students. Students might enter as individual participants or as members of a team from the same school. Junior Section participants needed to submit a poster, while the projects of Senior Section participants should be submitted in the form of a report.

A total of 131 statistical projects from 531 students of 45 secondary schools were received this year. The projects covered a wide variety of themes, focusing on various social and economic aspects of Hong Kong. Contemporary issues studied by participating students included demographic trends, environmental protection issues and Hong Kong's economic development, etc.

## 得獎習作名單 **List of Winning Projects**

| 獎項<br><b>Prize</b>  | 習作題目<br><b>Project Title</b>                      | 學校名稱<br><b>Name of School</b>  |
|---|---|--|
| <b>初級組 Junior Section</b>   |   |  |
| 恒生指數有限公司初級組冠軍<br>Hang Seng Indexes Company Limited<br>First Prize for the Junior Section  | 香港離婚人口研究  | 順德聯誼總會李兆基中學<br>STFA Lee Shau Kee College                               |
| 恒生指數有限公司初級組亞軍<br>Hang Seng Indexes Company Limited Second<br>Prize for the Junior Section | Sustainability of<br>Labour Force in Hong<br>Kong | 香港神託會培基書院<br>Stewards Pooi Kei College                                 |
| 恒生指數有限公司初級組季軍<br>Hang Seng Indexes Company Limited Third<br>Prize for the Junior Section  | 政府政策能有效改善<br>本港空氣質素                               | 保良局唐乃勤初中書院<br>Po Leung Kuk Tong Nai<br>Kan Junior Secondary<br>College |

| 獎項<br>Prize  | 習作題目<br>Project Title                             | 學校名稱<br>Name of School                               |
|--|---|--|
| 香港城市大學管理科學系初級組最佳統計圖表獎<br>Department of Management Sciences,<br>the City University of Hong Kong Prize for<br>the Best Graphical Presentation of Statistics<br>for the Junior Section | Sustainability of<br>Labour Force in Hong<br>Kong | 香港神託會培基書院<br>Stewards Pooi Kei College               |
| 恒生指數有限公司初級組最佳指數應用獎<br>Hang Seng Indexes Company Limited Prize<br>for the Best Index Application for the Junior<br>Section  | 分析物價上漲的原因   | 中華基金中學<br>The Chinese Foundation<br>Secondary School |
| 優異獎<br>Distinguished Prize   | 從回收塑膠垃圾分析<br>香港現有處理垃圾的<br>問題                      | 聖士提反書院<br>St. Stephen's College                      |

| 獎項<br>Prize                | 習作題目<br>Project Title   | 學校名稱<br>Name of School                             |
|----------------------------|-------------------------|--|
| 優異獎<br>Distinguished Prize | 老人圍城?                   | 天主教崇德英文書院<br>Shung Tak Catholic<br>English College |
| 優異獎<br>Distinguished Prize | 探討香港 5-65 歲人士<br>語言使用情況 | 天主教崇德英文書院<br>Shung Tak Catholic<br>English College |

得獎習作名單 **List of Winning Projects**

| 獎項<br><b>Prize</b>   | 習作題目<br><b>Project Title</b>  | 學校名稱<br><b>Name of School</b>                             |
|--|---|---|
| <b>高級組 Senior Section</b>  |   |   |
| 恒生指數有限公司高級組冠軍<br>Hang Seng Indexes Company Limited First Prize for the Senior Section  | “The Battle Hymn of Kong Youths” - A Statistical Study on the Prospect of Youngsters in Hong Kong | 德望學校<br>Good Hope School                                  |
| 恒生指數有限公司高級組亞軍<br>Hang Seng Indexes Company Limited Second Prize for the Senior Section | A comparison and analysis of Hong Kong Electricity  | 香港四邑商工總會黃棣珊紀念中學<br>HKSYPIC Wong Tai Shan Memorial College |
| 恒生指數有限公司高級組季軍<br>Hang Seng Indexes Company Limited Third Prize for the Senior Section  | 浮華背後的垃圾圍城   | 順利天主教中學<br>Shun Lee Catholic Secondary School             |

| 獎項<br>Prize   | 習作題目<br>Project Title                                       | 學校名稱<br>Name of School                            |
|---|---|---|
| 香港城市大學管理科學系高級組最佳統計圖表獎<br>Department of Management Sciences, the City University of Hong Kong Prize for the best Graphical Presentation of Statistics for the Senior Section | New Immigrants and Public Resources — A Statistical Enquiry | 沙田循道衛理中學<br>Sha Tin Methodist College             |
| 恒生指數有限公司高級組最佳指數應用獎<br>Hang Seng Indexes Company Limited Prize for the Best Index Application for the Senior Section   | 最心痛是「結婚」太遲  | 趙聿修紀念中學<br>Chiu Lut Sau Memorial Secondary School |



| 獎項<br>Prize                | 習作題目<br>Project Title   | 學校名稱<br>Name of School                |
|----------------------------|---|---------------------------------------|
| 優異獎<br>Distinguished Prize | New Immigrants and Public Resources — A Statistical Enquiry   | 沙田循道衛理中學<br>Sha Tin Methodist College |
| 優異獎<br>Distinguished Prize | Sustainability of the rent allowance policy for Comprehensive Social Security Assistance(CSSA) recipients | 聖保祿中學<br>St. Paul's Secondary School  |
| 優異獎<br>Distinguished Prize | The impact of changes in Hong Kong population on the social and economic aspects of Hong Kong             | 英皇書院<br>King's College                |

(Reference: [http://www.hkss.org.hk/index.php/spc-archive\\$en/2014\\$en](http://www.hkss.org.hk/index.php/spc-archive$en/2014$en))



Champion of Junior Section with officiating guests



Champion of Senior Section with officiating guests

## **12. 2014/15 Statistics Creative-Writing Competition for Secondary School Students**

Statistics Creative-Writing Competition for Secondary School Students (SCC) has been conducted every year since 2009. The Competition was in its 5th year. The aims of the Competition are to raise the interest of students in statistics and its application; and to encourage them to creatively express in words the daily application of statistical concepts or put statistical concepts into a story in a scientific and objective manner.

The 2014/15 SCC, which was jointly organised by the Hong Kong Statistical Society and Education Bureau, and sponsored by the Department of Statistics and Actuarial Science, the University of Hong Kong and Hong Kong Community College, has been completed successfully.

The 2014/15 SCC, which commenced in October 2014, attracted 98 participating students from 30 schools with a total of 45 submissions. After a series of adjudication and interviews, 9 awarded-winning entries with 11 selected entries were eventually determined. The prize presentation ceremony was

held at lecture theatre N203, West Kowloon Campus, the Hong Kong Polytechnic University on 27 June 2015. We were honoured to invite Mr Leslie TANG Wai-kong, Deputy Commissioner for Census and Statistics and Ms CHING Suk-yee, Principal Education Officer (Curriculum Development) of Education Bureau, as the officiating guests of the Ceremony. The Champion team and the winner of PolyU Hong Kong Community College Prize for the Best Article Presentation were invited to give presentations on their creative writings/stories and to share the joys with us. All award-winning entries would be printed in the publication issued by the organisers.

## 得獎習作名單 List of Winning Projects

| 獎項<br>Prize                | 習作題目<br>Project Title   | 學校名稱<br>Name of School                        |
|----------------------------|-------------------------|---|
| 冠軍<br>Champion             | 書中自有黃金屋                 | 保良局何蔭棠中學<br>PLK Celine Ho Yam Tong College    |
| 亞軍<br>First runner up      | 探索藝術體操的難度分<br>與完成分的奧妙關係 | 順德聯誼總會李兆基中學<br>STFA Lee Shau Kee College      |
| 季軍<br>Second runner up     | 誰是誰非之「你」快落！<br>我快樂！     | 宣道會鄭榮之中學<br>CA Cheng Wing Gee College         |
| 優異獎<br>Distinguished prize | My Brother vs My Mother | 沙田官立中學<br>Sha Tin Government Secondary School |
| 優異獎<br>Distinguished prize | 線性迴歸                    | 沙田崇真中學<br>Shatin Tsung Tsin Secondary School  |

| 獎項<br>Prize  | 習作題目<br>Project Title | 學校名稱<br>Name of School   |
|--|-----------------------|--|
| 優異獎<br>Distinguished prize                           | Hot Pot Dots          | 協恩中學<br>Heep Yunn School                                       |
| 優異獎<br>Distinguished prize                           | 成績「分分」跌？「分分」賞！        | 香港紅十字會雅麗珊郡主學校<br>Hong Kong Red Cross Princess Alexandra School |
| 優異獎<br>Distinguished prize                           | 作弊                    | 筲箕灣官立中學<br>Shau Kei Wan Government Secondary School            |
| 優異獎<br>Distinguished prize                           | 舊夢不須記？<br>---被遺忘的香港樂壇 | 香港培正中學<br>Pui Ching Middle School                              |
| 香港大學統計及精算學系<br>最佳專題寫作獎<br>Department of Statistics & | 書中自有黃金屋               | 保良局何蔭棠中學<br>PLK Celine Ho Yam Tong College                     |

| 獎項<br>Prize  | 習作題目<br>Project Title        | 學校名稱<br>Name of School                         |
|--|------------------------------|--|
| Actuarial Science, The University of Hong Kong Prize for the Best Thematic Writing           |                              |  |
| 理大香港專上學院最佳文章演繹獎<br>PolyU Hong Kong Community College Prize for the Best Article Presentation | My Brother vs My Mother      | 沙田官立中學<br>Sha Tin Government Secondary School  |
| 入選作品<br>Selected entry   | The Property Price Challenge | 德望學校<br>Good Hope School                       |
| 入選作品<br>Selected entry   | 減電成效                         | 天主教培聖中學<br>Pui Shing Catholic Secondary School |

| 獎項<br>Prize            | 習作題目<br>Project Title | 學校名稱<br>Name of School                               |
|------------------------|-----------------------|--|
| 入選作品<br>Selected entry | 天氣炎熱飲品好回收？            | 天主教培聖中學<br>Pui Shing Catholic Secondary School       |
| 入選作品<br>Selected entry | Linear Regression     | 沙田崇真中學<br>Shatin Tsung Tsin Secondary School         |
| 入選作品<br>Selected entry | 我們一起氣死了的老師            | 中華基督教會燕京書院<br>CCC Yenching College                   |
| 入選作品<br>Selected entry | 抽獎風雲                  | 香港真光中學<br>True Light Middle School of Hong Kong      |
| 入選作品<br>Selected entry | 甚麼？立法會也可以用統計學？        | 香港華仁書院<br>Wah Yan College, Hong Kong                 |
| 入選作品<br>Selected entry | 寡不敵眾 — 眾人的智慧          | 香港道教聯合會圓玄學院第三中學<br>HKTA The Yuen Yuen Institute No.3 |



| 獎項<br>Prize            | 習作題目<br>Project Title   | 學校名稱<br>Name of School                                       |
|------------------------|---|--|
|                        |   | Secondary School   |
| 入選作品<br>Selected entry | Linear regression is full of fun! Using Composite Consumer Price Index to analyse linear regression in different perspectives | 筲箕灣官立中學<br>Shau Kei Wan Government Secondary School          |
| 入選作品<br>Selected entry | 是非題？「菲士」題？  | 孔教學院大成何郭佩珍中學<br>Confucian Tai Shing Ho Kwok Pui Chun College |
| 入選作品<br>Selected entry | 一注希望，多注希望   | 香港四邑工商總會黃棣珊紀念中學<br>HKSYC&IA Wong Tai Shan Memorial College   |

(Reference: [http://www.hkss.org.hk/index.php/scc-pastwinningproject\\$en](http://www.hkss.org.hk/index.php/scc-pastwinningproject$en))



Winning teams with officiating guests



*Presentation of the Champion*

### **13. Website of Mathematics Education Section in Education Bureau**

Mathematics Educators in various sectors of Hong Kong are encouraged to visit the website of Mathematics Education Section regularly. The shortcut of the web-link and QR Code for the website are listed as follows respectively:

<http://www.edb.gov.hk/cd/math5>



Many useful information can be found on the website. When you press the link “What’s new” on the web page, you can get the latest news about Mathematics Education. The hot issues include “The suggested plan for the holistic review of the Mathematics curriculum (Primary 1 – Secondary 6)” and “57th International Mathematical Olympiad 2016”. The latest version of the document about Entrance Requirements of University Grants Committee-funded Institutions on Mathematics can also be downloaded.

From the linkage of “Curriculum Documents”, you can find all the soft copy of the Mathematics curriculum, supplementary notes and explanatory notes. You can freely download those relevant documents for reference. The 2015/16 teacher education programme can also be found in the website. Circular Memorandum about Mathematics Education can be sought in the “Bulletin Board”.

Learning and teaching resources and reference materials prepared by Mathematics Education Section are carefully selected and placed under the link “References & resources” for teachers’ information. Teachers can efficiently get the learning and teaching resources of mathematics by the hyperlink, including glossary of Mathematics terms, Research reports and list of Mathematics Education journals.

## **14. Teachers' Professional Development Programmes in 2015/16**

Mathematics Education Section conducted a series of teachers' Professional Development Programmes for (a) primary school teachers and (b) secondary school teachers in 2015/16.

The following yearly training calendars show information of the planned courses for the last year. For details of courses, please refer to the Training Calendar System (TCS).

Apart from that, the Mathematics Education Section will also conduct some ad-hoc seminars and workshops for the learning and teaching of Mathematics; teachers may refer to the circulars for details, browse the related web page and enroll for seminars and workshops.

## Lists of Teachers' Professional Development Programmes 2015/16

### (a) Primary

| Month            | Title  |
|------------------|--|
| October<br>2015  | Primary Mathematics Curriculum Induction Series :<br>(1) New Mathematics Teachers  |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Induction Series<br>: (2) Mathematics Panel Chairpersons  |
| November<br>2015 | Primary Mathematics Curriculum Interface Series :<br>(2) The Primary and Secondary Levels – Number<br>and Algebra Dimensions (Refreshed)                   |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Learning and<br>Teaching Series : (1) Catering for Learning<br>Diversity  |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Learning and<br>Teaching Series : (2) Effective Use of Quality<br>Learning and Teaching Resources in Primary<br>Mathematics |
| December<br>2015 | Primary Mathematics Curriculum Learning and<br>Teaching Series : (2) Effective Use of Quality<br>Learning and Teaching Resources in Primary<br>Mathematics |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Enriching<br>Knowledge Series : (1) Inquiry on “Numbers” –<br>Multiples and Factors   |

| Month            | Title   |
|------------------|---|
|                  | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (3) Nurturing Students' Number Sense  |
| January<br>2016  | Primary Mathematics Curriculum Selected Topics Series : (1) Fractions   |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Selected Topics Series : (2) Money and Time  |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (4) The School-based Curriculum Planning and Implementation                       |
| February<br>2016 | Primary Mathematics Curriculum Enriching Knowledge Series : (2) Inquiry on "Measures" – Area  |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (5) Use of e-Learning to Enhance the Learning and Teaching of Primary Mathematics |
| March<br>2016    | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (5) Use of e-Learning to Enhance the Learning and Teaching of Primary Mathematics |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Selected Topics Series : (3) Percentage and Algebra  |
|                  | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (6) Nurturing Students' Creativity and Critical Thinking                          |

| Month      | Title   |
|------------|---|
| April 2016 | Primary Mathematics Curriculum Assessment for Learning Series : (1) Making Use of Assessment Data to Enhance the Learning and Teaching of Mathematics |
|            | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (7) Reading to Learn and Moral and Civic Education                                      |
| May 2016   | Primary Mathematics Curriculum Assessment for Learning Series : (1) Making Use of Assessment Data to Enhance the Learning and Teaching of Mathematics |
|            | Primary Mathematics Curriculum Interface Series : (1) The Primary and Pre-primary Levels  |
|            | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (8) Solving Word Problems   |
|            | Primary Mathematics Curriculum Learning and Teaching Series : (9) The Curriculum Planning and Implementation STEM Education [New]                     |
| June 2016  | Primary Mathematics Curriculum Selected Topics Series : (4) Data Handling – learning difficulties, uses and abuses of statistics in daily life        |
|            | Primary Mathematics Curriculum Interface Series : The Primary and Secondary Levels – Measures, and Shape and Space Dimensions (Refreshed)             |



| Month     | Title   |
|-----------|---|
| July 2016 | Primary Mathematics Curriculum Assessment for Learning Series : (1) Diversified Modes of Assessment |

**(b) Secondary**

| Month    | Title   |
|----------|---|
| Oct 2015 | 2015/16 Statistical Project Competition for Secondary School Students - Briefing Seminar and Exhibition of Past Winning Projects (New)                  |
|          | 2015/16 Statistics Creative-Writing Competition for Secondary School Students - Briefing Seminar and Exhibition of Past Winning Projects (New)          |
|          | Learning and Teaching Strategies for Mathematics Curriculum Series: (6) Induction on the Learning and Teaching of Mathematics for New Teachers (Re-run) |
|          | Understanding and Interpreting the Senior Secondary Mathematics Curriculum (Re-run)   |
|          | Use of IT in the Preparation of Mathematics Examination Papers and Notes (Re-run)   |
| Nov 2015 | Curriculum Leadership and Curriculum Planning for Mathematics Teachers (Re-run)   |
|          | Promoting STEM Education (New)  |

| Month    | Title   |
|----------|---|
|          | Interface between Primary and Secondary Mathematics on Number and Algebra Dimensions (Re-run)   |
| Dec 2015 | Assessing Student Learning for the Senior Secondary Mathematics Curriculum (Refreshed)  |
|          | Enriching Knowledge for the Mathematics Curriculum Series: (1) Mathematics Projects for Secondary Schools (Re-run)  |
|          | Learning and Teaching Strategies for Mathematics Curriculum Series: (1) Reading to Learn (Re-run)   |
| Jan 2016 | Assessing Student Learning for the Mathematics Curriculum: Diversified Modes of Assessment in KS3 (Re-run)  |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (1) Learning and Teaching of Permutation and Combination (Re-run)                |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (7) Interface between Junior Secondary and Senior Secondary Mathematics (Re-run) |
|          | Use of Language for Learning and Teaching Mathematics (Re-run)  |
| Feb 2016 | Inquiry, Investigation and Problem Solving in Secondary Mathematics (Re-run)  |

| Month    | Title  |
|----------|--|
|          | Learning and Teaching Strategies for 3D Figures in Key Stage 3 (Re-run)  |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (4) Effective Use of IT in Mathematics Lessons (Introductory) (Re-run)                      |
| Mar 2016 | Effective use of resources for e-learning in Mathematics (Re-run)  |
|          | Learning and Teaching Strategies for Mathematics Curriculum Series: (2) Promoting Critical Thinking Skills and Creativity (Refreshed)  |
|          | Learning and Teaching Strategies for Mathematics Curriculum Series: (5) Promoting Moral and Civic Education (Re-run)   |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (2) Module 1 (Re-run)   |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (3) Module 2 (Re-run)   |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (6) Use of IT in the Learning and Teaching of Topics involving 3D Objects/Space (Refreshed) |

| Month    | Title   |
|----------|---|
| Apr 2016 | Effective use of resources for e-learning in Mathematics (Re-run)   |
|          | Learning and Teaching Strategies for Mathematics Curriculum Series: (3) Remedial Teaching in Secondary Mathematics (Re-run)                                     |
|          | Learning and Teaching Strategies for Mathematics Curriculum Series: (4) Gifted Education in Secondary Mathematics (Re-run)                                      |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (5) Effective Use of IT in Mathematics Lessons (Advanced) (Re-run)     |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (4) Effective Use of IT in Mathematics Lessons (Introductory) (Re-run) |
|          | Promoting STEM Education (New)  |
| May 2016 | Enriching Knowledge for the Mathematics Curriculum Series: (4) History of Mathematics (Re-run)  |
|          | Enriching Knowledge for the Mathematics Curriculum Series: (5) Theory of Geometric Construction (New)   |
|          | Learning and Teaching of logic (New)  |

| Month    | Title  |
|----------|--|
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (5) Effective Use of IT in Mathematics Lessons (Advanced) (Re-run)                          |
|          | Use of IT in the Preparation of Mathematics Examination Papers and Notes (Re-run)  |
| Jun 2016 | Interface between Primary and Secondary Mathematics on Measures, Shape and Space Dimensions (Re-run)   |
|          | Interface between Primary and Secondary Mathematics on Measures, Shape and Space Dimensions (Re-run)   |
|          | Learning and Teaching Strategies for the Senior Secondary Mathematics Curriculum Series: (6) Use of IT in the Learning and Teaching of Topics involving 3D Objects/Space (Refreshed) |
|          | Sharing Seminar of the Seed Project “Exploration and Development of Effective Self-directed Learning Strategies in Mathematics” (New)  |

## 15. 第 57 屆國際數學奧林匹克 2016

第 57 屆國際數學奧林匹克（IMO）將於 2016 年 7 月在香港舉行。是次活動的主辦機構及協辦大學分別為國際數學奧林匹克香港委員會有限公司及香港科技大學，而香港特別行政區政府教育局則為活動的支持機構。

本屆 IMO 2016 的推廣活動包括定期出版「數聞」；在教育局九龍塘教育服務中心舉辦為期一年的展覽。同時，教育局數學教育組和國際數學奧林匹克香港委員會有限公司合作籌劃「數學天地講座系列」，旨在推廣這項國際數學盛事，提升學生對數學的興趣，及提升數學教師的專業知識。我們已於 2015 年 4 月 11 日順利舉辦開幕講座，反應非常熱烈，全場滿座。這系列的講座橫跨兩個學年，有興趣參加的同工可於教育局培訓行事曆報名，同時亦請多鼓勵同學們參加這系列的講座。

第五十七屆  
國際數學奧林匹克籌備委員會榮譽呈獻

**數學天地講座系列**



講者: 陳偉康 博士  
香港教育學院 數學系



學習數學是為了變得更聰明!

**02/05/15**  
上午9時

新界荃灣大河道72號荃灣大會堂文娛廳

歡迎數學界人士踴躍參加

第五十七屆  
國際數學奧林匹克籌備委員會榮譽呈獻

**數學天地講座系列**



講者: 羅家豪 博士  
香港大學數學系



**規律**

**30/05/15**  
上午9時

新界荃灣大河道72號荃灣大會堂文娛廳

歡迎以數學界人士踴躍參加

2016年第五十七屆國際數學奧林匹克  
籌備委員會 榮譽呈獻



## 數學天地講座系列一

### 開幕講座



吳端偉博士

嘉賓講者：

蕭文強教授 香港大學數學系

三角形內的三圓問題 - 一則貫穿日本、西歐與  
中國數學的故事

李健賢博士 香港科技大學數學系

IMO問題與應用

吳端偉博士 香港大學數學系

談情說數

龍德義校長 保良局朱敬文中學

從九連環到2048 - 漫談數學智力遊戲

日期：二零一五年四月十一日

時間：上午九時至下午十二時三十分

地點：香港大學圖書館新翼大樓演講室 LE1



蕭文強教授



龍德義校長



李健賢博士

教育局數學教育組協辦

香港大學數學系協助籌畫





2015 年舉辦的講座：

| 日期           | 任職機構     | 講者     | 題目                           |
|--------------|----------|--------|------------------------------|
| 4 月 11 日開幕講座 | 香港大學     | 蕭文強 教授 | 三角形內的三圓問題——一則貫穿日本、西歐與中國數學的故事 |
|              | 香港大學     | 吳端偉 博士 | 談情說數                         |
|              | 香港科技大學   | 李健賢 教授 | IMO 數學題及其應用                  |
|              | 保良局朱敬文中學 | 龍德義 校長 | 從九連環到 2048——漫談數學智力遊戲         |
| 5 月 2 日      | 香港教育學院   | 陳偉康 博士 | 學習數學是為了變得更聰明！                |
| 5 月 16 日     | 香港大學     | 劉旭金 博士 | 閒談質數——一些猜想和故事                |
| 5 月 30 日     | 香港大學     | 羅家豪 博士 | 規律                           |
| 6 月 13 日     | 香港中文大學   | 雷諾銘 博士 | 數學與醫學相遇的地方                   |
| 6 月 27 日     | 香港科技大學   | 李衛平 教授 | 高中以外的幾何（英語講座）                |
| 9 月 12 日     | 香港科技大學   | 汪揚 教授  | 選舉中的數學（英語講座）                 |
| 9 月 26 日     | 香港科技大學   | 嚴民 教授  | 拼圖（廣東話輔以英語）                  |

| 日期        | 任職機構   | 講者                 | 題目                   |
|-----------|--------|--------------------|----------------------|
| 10 月 10 日 | 香港科技大學 | 孟國武 教授             | 上帝是一位數學家嗎?(英語講座)     |
| 10 月 24 日 | 香港教育學院 | 凌萬豪 博士             | 大數據時代                |
| 11 月 7 日  | 香港科技大學 | 馮志雄 教授             | 如何應用空氣質量模型改善空氣質量和能見度 |
| 11 月 21 日 | 香港科技大學 | 嚴民 教授              | 曆法 ( 英語附以普通話 )       |
| 12 月 5 日  | 海外學者   | Dr Ezra<br>GETZLER | 伯努利數                 |
| 12 月 12 日 | 香港浸會大學 | 杜啟明 博士             | 數學與政治                |

2016 年舉辦的講座，有關詳情請留意教育局培訓行事曆 (<https://tcs.edb.gov.hk>) 的最新通告

| 日期       | 任職機構   | 講者     | 題目                        |
|----------|--------|--------|---------------------------|
| 1 月 9 日  | 香港教育學院 | 梁鉅超 博士 | 由診斷神經細胞模型混沌特性的初階方法而引申之教與學 |
| 1 月 23 日 | 香港教育學院 | 李逸徽 先生 | 數學在哪兒!?                   |
| 2 月 20 日 | 香港浸會大學 | 劉錫鈞 博士 | iPad 作為計算工具：從金融管理到產能規畫    |
| 3 月 5 日  | 香港科技大學 | 梁承裕 教授 | 數學在娛樂事業的應用                |

| 日期               | 任職機構     | 講者     | 題目  |
|------------------|----------|--------|---|
| 3 月 19 日         | 香港中文大學   | 鍾子信 教授 | 數學與哈利波特的隱形斗篷！   |
| 4 月 2 日          | 香港中文大學   | 陳啟良 博士 | Knot for fun, not for fun   |
| 4 月 16 日         | 香港中文大學   | 吳忠濤 博士 | Polynomial, Knot and Invariant  |
| 4 月 30 日         | 香港浸會大學   | 辛百橋 博士 | Boolean Algebra with Karnaugh map and its application on Circuit Design |
| 5 月 14 日         | 香港浸會大學   | 廖廣業 博士 | 解決部分概率問題－蒙地卡羅方法   |
| 5 月 28 日         | 香港浸會大學   | 何文浩 博士 | 曲線的微分幾何   |
| 6 月 11 日         | 香港公開大學   | 盧錦玲 博士 | ～待定～  |
| 6 月 25 日<br>閉幕講座 | 香港大學     | 梁貫成 教授 | ～待定～  |
|                  | 香港立法會    | 曾鈺成 議員 | ～待定～  |
|                  | 香港考試及評核局 | 唐創時 博士 | ～待定～  |
|                  | 香港科技大學   | 陳繁昌 教授 | 數學與它何相干？  |