學校數學通訊

第二十七期

# **SCHOOL MATHEMATICS**

**NEWSLETTER** 

ISSUE 27

## **SCHOOL MATHEMATICS NEWSLETTER**



政府物流服務署印

教育局

Mathematics Education Section, Curriculum Development Institute, Education Bureau, Government of the Hong Kong Special Administrative Region. 香港特別行政區政府教育局課程發展處數學教育組出版

#### 版權

©2024 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等,如未獲版權持有人之書面同意,不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途,亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8581-22-1

#### **Foreword**

Welcome to the 27th issue of the School Mathematics Newsletter (SMN).

The School Mathematics Newsletter (SMN) is for mathematics teachers. It serves as a channel of communication on mathematics education in Hong Kong. This issue involves various articles written by academics, curriculum officers and teachers in different areas, including suggestions of effective strategies in learning and teaching of mathematical modelling, academic insightful views on the beauty of mathematics, computationally enhanced mathematics education, articles related to geometry and history of mathematics, mathematical activities about STEAM Education and data literacy, etc.

In the existing education system, mathematics teachers are faced with the tremendous challenge of teaching students of very different abilities, motivations and aspirations. To meet this challenge, mathematics teachers need to equip themselves with necessary mathematical skills and teaching strategies to cope with different teaching situations. We do hope that all readers will find the content of this issue informative and stimulating.

The Editorial Board of SMN wishes to express again its

gratitude to all contributors, and also to the fellow colleagues of

the Mathematics Education Section who have made great efforts

in publishing the SMN Issue 27.

SMN provides an open forum for mathematics teachers and

professionals to express their views on the learning and teaching

of mathematics. We welcome contributions in the form of

articles on all aspects of mathematics education. However, the

views expressed in the articles in the SMN are not necessarily

those of the Education Bureau. Please send all correspondence

to:

The Editor, School Mathematics Newsletter,

**Mathematics Education Section** 

Curriculum Development Institute

Room 403, Kowloon Government Offices

405 Nathan Road

Yau Ma Tei, Kowloon

email: math@edb.gov.hk

### 目錄

1.	發展學生的數學建模能力:層次分明的學習經驗				
	盧頌鈞博士	7			
2.	從三角形到數學之美				
	陳啟良博士	16			
3.	<b>Buffon's Needle in the Mathematics Classroom</b>				
	WONG Hang-chi, Dr CHEUNG Ka-luen	28			
4.	How mathematics enhances NCS students lead in the STEAM aspect?	arning			
	NG Cheuk-yu	56			
5.	探索不同方法來證明球體的體積公式				
	湯湛津	67			
6.	以數學科為起點的 STEM 教育學習活動				
	陳志剛、徐璟昕	83			
7.	「把數學課堂帶到數據時代」活動分享				
	王兆雄、毛偉豪、馬翠薇	98			
8.	三角形外心和垂心公式-你可曾見過、用過	?			
	鄭仕文	109			

9.	統計與機器學習			
	陳秀騰	127		
10.	LaTeX: 有效提升數學教學效能的工具			
	蘇志峰	142		
11.	三角函數表史料鈎沉			
	陳泳昌博士	157		

#### 1. 發展學生的數學建模能力:層次分明的學習經驗

#### 盧頌鈞博士

#### 香港教育大學數學與資訊科技學系

#### 前言

近年學界不但提倡 STEAM (科學、科技、工程、藝術和數學)教學,以鼓勵學生結合不同領域的知識以解決日常生活的問題,更致力加入數學建模的元素,以增進學生將數學應用於處理現實問題的經驗。對數學建模的重視源於現今社會對於分析和預測的需求,資訊科技的發展亦使我們能夠將現象數據化和數學化。例如,香港大學便能夠根據數據建立數學模型,以推算新冠疫情的發展(now 新聞,2022-02-10)。

然而,在香港中小學階段,數學建模的發展未算十分成熟。 一些教師曾分享帶領數學建模活動的困難,例如教師缺乏豐富的經驗和訓練、學生缺乏足夠的數學工具進行建模,以及課時不足等。因此,本文將簡介三個建模學習經驗的層次(詳細的論述可參閱 Ang, 2015 及 Lo et al., 2022),讓同工探索如何將數學建模的元素融入課堂,甚或進行課後的尖子培訓活動。最後,本文亦會淺談各個層次的評估方針。

#### 建模學習經驗的三個層次

以下的圖 1 將以高中指數函數的問題作為例子(英文版本已載於本文的附件),說明如何為學生帶來不同層次的建模學習經驗。若同工能夠稍作調適,這問題亦可以在初中教授百分法時討論。

一部數碼相機的價值每年貶值 20%。該數碼相機目前的價值為 \$5000。設 x 為此後的年數, y 為數碼相機的價值。

- (a) 寫下它價值的模型。然後,運用 GeoGebra 繪製這模型 的圖像。
- (b) 運用你的模型找出數碼相機在10年後的價值。
- (c) 你的模型作了哪些假設?

圖 1:數學建模問題的例子。

第1級:強調知識在建模時的應用

第 1 級強調在建模情境中獲取和應用知識,這些知識可以是數學的知識,亦可以是在數學建模中所需的其他知識和技巧,例如一些可以在建模時應用的軟件。圖 1 的問題所建立的模型能夠用作推算數碼相機在某年的價錢,當中可以跟學生討論的數學知識包括折舊率、衰變因子和指數函數的應

用。同工應該可以見到,我只是把子問題 a 改成「寫下它價值的模型」,以取代「以x 表示y」的傳統問法。而在子問題 b,我只是加入了「運用你的模型」的字眼。因此,這兩道子問題的解均與我們常見的題目無異。

除了數學知識外,教師還可以向學生展示如何運用 GeoGebra 來製作價格的趨勢圖(圖2),甚至運用數值滑桿 來改變模型中的參數值(折舊率),從而觀察圖像的變化(圖 3)。因此,我便在子問題 a 中加入「運用 GeoGebra 繪製這 模型的圖像」的要求。可以說,第 1 級的建模活動相對簡 單,也十分貼近我們的數學課程,應該可以在一至兩節的數 學課堂內完成。

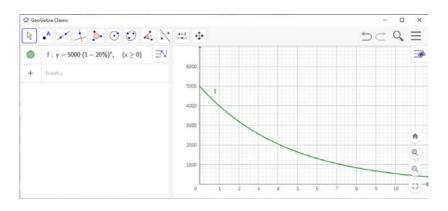


圖 2: 運用 GeoGebra 製作價格的趨勢圖。

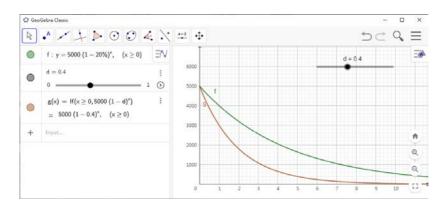


圖 3: 運用 GeoGebra 的數值滑桿來改變模型中的折舊率。

#### 第2級:介紹一些數學建模的技巧

在教科書中, y=5000(1-20%)<sup>x</sup> 或 5000(0.8)<sup>x</sup> 是圖 1 子問題 a 的正確答案。然而,在現實世界的問題中往往沒有如此絕對的答案,因為這將會涉及到很多假設和其他參數。我們的建模活動就是希望讓學生意識到這一點,讓他們能夠體驗數學在實際生活中的應用,甚至培養他們明辨性思考的能力。

第 2 級著重發展學生的建模能力,例如提出假設以簡化問題、辨認影響變量的因素,以及詮釋數學模型等。因此,我在子問題 c 便問學生:「你的模型作了哪些假設?」以下便列出一些可能的答案:

- 衰變因子每年也保持不變。
- 該數碼相機永遠能夠正常運作,否則在某年失效後價值 便立即歸零。
- 該數碼相機的所有部件(例如機身和電池)都按照相同的 衰變因子而變化,不存在不同部分的百分變化(這是在初 中百分法的討論)。
- 沒有其他因素導致價格上漲。但實際的情況是,近年世界各地興起一股復古風,傳統的數碼相機受到追捧,甚至有遊客專程來香港購買,使得價格一度飆升(香港01,2023-04-19)。

通過以上的討論,教師能幫助學生學習陳述影響價格的因素,並在建模過程中提出相關的假設。與第1級的建模學習相比,第2級的學習活動更為高階,需要給予更多的思考和討論空間,因此需要額外的教學時間。

#### 第3級:讓學生解決數學建模的問題

與第 2 級的數學建模活動(旨在發展學生的建模能力)不同,第 3 級的總體目標是解決一個數學建模問題。由於在建模過程中涉及不同的任務,活動通常以小組形式進行。學生需要合作分工,應用各種知識和技巧進行建模。如果要將圖1 的問題提升到第 3 級的數學建模活動,學生需要先提出上文所提及的假設以簡化問題,然後自行收集每年的價格數據

以找出衰變因子。對於能力較高的學生,教師可以引導他們探索其他影響價格的因素,從而改善他們所提出的模型的完整性。這個級別的活動能進一步發展學生的建模能力,但比較適合在課後的尖子培訓活動中進行,並可能需要幾天的時間才能完成。

#### 不同建模活動的評估方針

在不同級別的數學建模活動中,評估方式也有所不同。

- 第1級的重點是在建模的情境中學習和應用知識,因此 評估方法基本上與評估相關的知識無異,教師可按一般 的評分準則進行評估。
- 第2級介紹一些數學建模的技巧,當中涉及一些開放式的問題,但教師應該能夠判斷學生答案的合理性和完整性,例如學生所作出的建模假設是否合理,以及他們在考慮參數時是否全面。
- 第3級讓學生解決數學建模的問題,這級別的評估則較為複雜。因著同學們所作出的不同建模假設、所考慮的不同參數,以至所收集得來的不同數據,他們的建模結果可以有很大的差異。因此,我們較難運用一般的評分準則進行評估。在這級別,同工可以按照學生建模技巧的運用(例如作出假設並說明理由、選擇參數、識別和收集相關)

及所需的數據等)、數學或數據的處理、報告的質素等範疇,給予他們評價。

總括而言,數學建模的評估方法應根據不同級別的學習目標和活動性質進行調整,以全面評估學生的知識和建模能力。

#### 結語

本文介紹了建模學習經驗的不同層次,並以指數函數作為例 子說明,進而淺談了一些評估的方針。但必須強調的是,區 分這些層次並非作為評價它們「好」與「壞」的向導,而是 為建模活動訂立具體的目標。同工在訂立活動目標時亦會受 到多種因素的影響,當中包括內在因素(例如學生的能力水 平、建模經驗和已有知識等)和外在因素(例如課時和課程 編排等)。因此,同工需要充分了解自己學校和學生的情況, 並根據上述因素來訂立適合的建模目標和活動計劃。透過適 當的目標設定和因素考量,我們將可提高學生在數學建模方 面的學習效果,豐富他們運用數學知識處理現實問題的經 驗,並培養他們的解決問題的能力。

#### 参考文獻

- [1] 香港 01 (2023-04-19)。內地客追捧 CCD 相機 鴨寮街 變 尋 寶 地 檔 主 :港 人 唔 要 嘅 垃 圾 變 寶 。 https://www.hk01.com/18 區新聞/889347/內地客追捧 CCD 相機-鴨寮街 變 尋 寶 地-檔主-港人唔要嘅垃圾 變 寶
- [2] Ang, K. C. (2015). Mathematical modelling in Singapore schools: A framework for instruction. In N. H. Lee, & K. E. D. Ng (Eds.), Mathematical modelling: From theory to practice (pp. 57–72). Singapore: World Scientific.
- [3] Lo, C. K., Huang, X., & Cheung, K. L. (2022). Toward a design framework for mathematical modeling activities: An analysis of official exemplars in Hong Kong mathematics education. Sustainability, 14, 9757. <a href="https://doi.org/10.3390/su14159757">https://doi.org/10.3390/su14159757</a>
- [4] now 新聞(2022-02-10)。港大醫學院推算第五波疫情高峰期每日有 1.1 萬宗確診。

https://news.now.com/home/local/player?newsId=466032

#### 附件

#### 建模問題的英文版本:

The value of a digital camera depreciates by 20% every year. The digital camera is currently worth \$5000.

Let *x* be the number of years thereafter and y be the value of the digital camera.

- (a) Write down the model of its value. After that, draw the graph of the model using GeoGebra.
- (b) Use your model to find the value of the digital camera 10 years thereafter.
- (c) What assumptions are made in your model?

#### 2. 從三角形到數學之美

陳啟良博士

#### 香港中文大學數學系

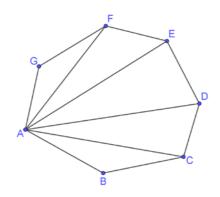
#### 引言

跟中學生或是不喜歡數學的朋友聊起中學數學,總會聽到「甚麼三角形,都不知道還要學三角形幹甚麼」、「證明一大堆甚麼定理,也不知道有甚麼用途」等。然而數學科是中學課程的必修科目,無論是否喜歡數學也是避不開的。正如我們大都不是主修音樂和藝術,卻懂得邊輕鬆地哼唱著《藍色多瑙河》,邊回味著兒時雪糕車販賣的軟雪糕;亦驚訝著無論我們如何左右移動時,《蒙娜麗莎》總是盯著我們微笑。那為甚麼數學並不能做到「雅俗共賞」?

因為數學的分支繁多,要討論數學之美並非容易。而且有如音樂和藝術,即使欣賞同一個作品,也會產生不同的感受。 因此,本文借討論中學數學關於三角形的課題窺探「數學之 美」,闡述個人的想法之餘,亦希望藉此引發讀者對數學的 思考。

#### 三角形和多邊形

三角形 — 一個我們十分熟識的幾何圖形。三角形可說是最基礎的多邊形,除了因為它是由最少數量的條邊所構成外,亦是因為所有多邊形可以分成若干個三角形。

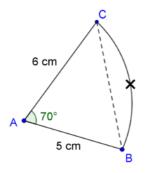


故此,若然我們了解三角形,那麼了解多邊形也不太困難了 (例如計算多邊形的內角和、面積等),而這正好是解決數學 問題上「化繁為簡」的手法。

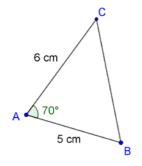
#### 全等三角形和相似三角形

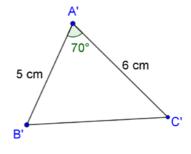
一個三角形包含了六項資料:三條邊的邊長和三個內角的大小。然而,這六項資料並非獨立,而是它們之間存在某些關係。例如,我們希望構作一個三角形ABC,其中AB=5 cm 和AC=6 cm,而它們的夾角 $\angle BAC=70^\circ$ 。當我們畫出AB、 $AC和\angle BAC$ 後,由於平面上只有唯一的一條直線通過 B 點和 C 點,因此我們只會得出唯一的三角形。換句話說,當

 $AB \cdot AC$ 和  $\angle BAC$  這三項資料已經知道後,另外三項資料 $BC \cdot \angle ABC$ 和  $\angle ACB$  其實也被斷定了。



固然,我們可以在平面上的不同地方畫出這個三角形,如下圖的三角形ABC和A'B'C'。但是它們是「相等」的三角形嗎?若分別把三角形ABC和A'B'C'三邊上的點構成兩個平面上的點的集合,這兩個集合並不相同。





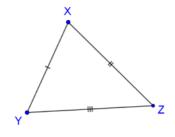
然而,平移(translation)、旋轉(rotation)和鏡射(mirror reflection)是保長(length-preserving)和保角(angle-preserving)的變換(transformation),即這些變換並不會改變線段的長度和角的大小。透過平移、旋轉和鏡射,我們卻總可以把其中

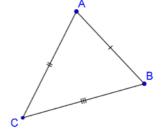
一個三角形重疊在另一個之上。三角形ABC和A'B'C'在這種 意義下「相等」(形狀大小相同但位置卻不一定相同),我們 稱它們為全等三角形。

而介紹全等三角形時的定理 SSS、SAS、ASA、AAS 和 RHS,可以理解為哪三項資料便足夠斷定另外三項資料。如果某些資料是可由其他資料推斷出來,那麼它們便是「多餘」的資料。很多時候,數學家也希望了解哪些才是「必要」的資料,以上便是其中一例。

#### 考慮以下的問題:

- (a) 證明 $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ 。
- (b) 已知 $\angle ABC = 60^{\circ}$ ,求 $\angle XYZ \circ$





不少學生能夠正確地寫出標準答案,但卻不一定理解到需要證明了 $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ,我們才能夠肯定 $\angle ABC = \angle XYZ$ 。甚至更有不少學生不明白為何需要證明兩個明明看起來形狀大小一樣的三角形是全等。

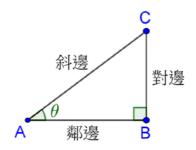
除了平移、旋轉和鏡射這些變換,縮放(scaling)也是平面上變換的一種。透過縮放,所有的線段會以同樣的倍數(scale factor)被放大(enlargement)或縮小(contraction),但縮放這變換卻是保角的。假如平面上有兩個三角形,而且我們可以透過平移、旋轉、鏡射和縮放,把其中一個三角形重疊在另一個之上,我們則稱它們為相似三角形。簡單來說,相似三角形的「形狀」是「相同」,但大小卻不一樣。

#### 直角三角形的三角比

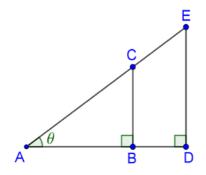
既然三角形特定的三項資料便足夠斷定另外三項資料,那麼 具體是如何做到的?初中的三角學正好是處理直角三角形 這一個特殊情況。

當我們構作一個直角三角形 $\triangle$  ABC 使得 $\angle$  ABC 為直角。假設  $\angle$   $BAC = \theta$  (其中0°  $< \theta < 90$ °),則AB 、 BC 和AC 分別稱為  $\angle$  BAC 的鄰邊、對邊和斜邊。我們定義三角比

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\# \frac{1}{2}}{\# \frac{1}{2}}$$
 \(\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\pmu}{AB} \frac{\pmu}{\pmu} \frac{\pm}{\pm} \frac{\pm}{\pm} = \frac{\pm}{\pm\pm\pm} \frac{\pm}{\pm} \fract



三角比的定義乍看起來並無不妥,但仔細思考的話便發現存在一個含糊的地方。既然這些三角比的定義只是跟角 $\theta$ 的大小有關,如果我們如下圖般構作兩個直角三角形,那麼 $\cos\theta$ 應該是AB/AC還是AD/AE?

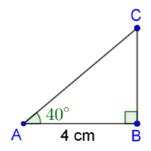


幸好,因為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是相似三角形,所以AB/AC和AD/AE相等。故此三角比 $\cos \theta$ 的確能定義為鄰邊和斜邊的比,而這個比只跟 $\theta$ 的大小有關。同樣道理,我們亦能定義 $\sin \theta$ 和 $\tan \theta$ 。這亦是一個例子說明數學的嚴謹性,**當我們處理數學時,所有描述必須是清晰和準確無誤的**。

明白了三角比的定義後,接下來便是求三角比的值。給定一個角 $0^{\circ}$ < $\theta$ < $90^{\circ}$ ,我們構作一個直角三角形 $\triangle$  ABC 使得  $\angle ABC$  為直角和  $\angle BAC$  =  $\theta$ 。接著,分別量度 AB、BC 和AC 的長度,再根據定義便能求得各個三角比的值。(建議:在學生學習使用計算機求三角比的值之前,可讓學生運用直尺 和量角器動手求出這些數值,讓他們明白三角比並非計算機的「黑箱作業」。)

結合三角形內角和為180°、畢氏定理和直角三角形的三角 比,我們便可在得知一個直角三角形的三項資料,求出另外 三個資料。例如,在△ABC中,

已知 $\angle ABC = 90^{\circ}$ 、 $\angle BAC = 40^{\circ}$ 和AB = 4 cm, 我們可以求得 $\angle ACB$ 、AC和BC。

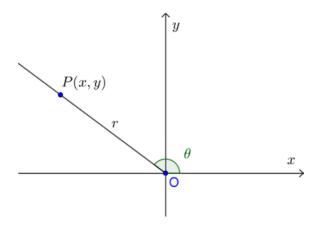


#### 任意角的三角比

很自然地,除了直角三角形外,我們亦希望在得知一個任意 三角形的三項資料下,求出另外三個資料。這便無可避免需 要處理任意角的三角比。

給定一個任意角 $\theta$ ,我們構作一條以原點為端點的射線,使得由正x軸逆時針旋轉到這射線形成的角為 $\theta$ 。在這射線上隨意選取一點 $P(x,y) \neq O(0,0)$ ,並設OP的長度為r。我們定義

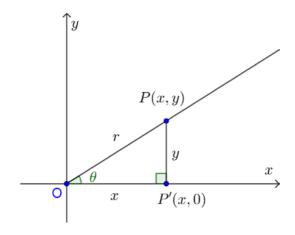
$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$
  $\sin \theta = \frac{y}{r} \not = \tan \theta = \frac{y}{x}$ 



讀者可思考一下為何這些三角比是定義良好(well-defined)的,即為何P點是可以如上述般任意選取的。而為了計算上

的方便,P點亦可選為單位圓和射線上的交點,並得到r=1。

然而,這裡也有一個值得思考的地方。當 $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ 時,這個任意角三角比的定義是否和直角三角形三角比的定義兼容?從下圖中,當 $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ 時,運用直角三角形三角比的定義, $\cos \theta = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{r}$ ,剛好與任意角三角比 $\cos \theta$ 的定義是相同的。而事實上,運用直角三角形或是任意角三角比的定義所給出的三角比是相同的。



這是數學上定義推廣的例子之一。當推廣定義時,我們希望

- 1. 推廣的定義能夠處理的情況更多;
- 2. 推廣的定義與原有的定義兼容。

(這好比新版本的軟件,功能比舊版本更多同時亦能兼容舊版本的檔案。)

讓我們感到美妙之處在於,當我們找到合理的定義推廣方 法時,一些良好性質得以推廣。例如

$$\sin(90^{\circ} - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^{\circ} - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

等三角恆等式不僅當 $0^{\circ}$  <  $\theta$  <  $90^{\circ}$  時才成立,而是對一般的角 $\theta$ 也是成立。

(另外一例則在代數部位,當適當的推廣指數的定義,所有 指數定律也得以推廣。)

推廣三角比的定義後,我們可以證明正弦公式(sine formula)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

和餘弦公式(cosine formula)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

這便可在得知一個任意三角形的特定三項資料下,求出另外三項資料。除了學習如何使用這些公式解決問題外,我們亦可思考當 $C=90^\circ$ 時的情況。因為 $\cos C=0$ ,所以餘弦公式變成

$$c^2 = a^2 + b^2$$

從而得知餘弦公式是畢氏定理的推廣(或畢氏定理是餘弦公式的特例)。讀者也不妨想想正弦公式在C = 90°時的情況。

#### 結語

知之者不如好之者,好之者不如樂之者。可是如果我們只是把這些課題當成獨立的章節而沒有梳理出其中的脈絡,零散的知識是難以被吸收和記憶,也遑論喜愛數學和樂在數學之美。

知之為知之,不知為不知。數學優美在於它的「簡單」,只有知道和不知道。透過嚴謹邏輯證明為真的定理,不會因為爭拗或時間而變成假的;面對未被證明的命題,卻只可誠實地承認我們的無知。除了是數學知識本身,這種態度是值得學習和欣賞。

因為篇幅所限,本文未能涵蓋不同的幾何課題,以至整個中學數學的課程。誠如開首所述,希望本文能刺激作為數學老師/學生或其他的讀者思考「我在教/學些甚麼?為甚麼我要教/學數學?」。

#### 参考文獻

- [1] Paul Lockhart, A Mathematician's Lament: How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form, Bellevue Literary Press
- [2] Robin Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond, Springer New York, NY

#### 3. Buffon's Needle in the Mathematics Classroom

#### WONG Hang-chi

International Christian Quality Music Secondary and Primary School

#### Dr CHEUNG Ka-luen

The Education University of Hong Kong

#### **Introduction: Historical Context**

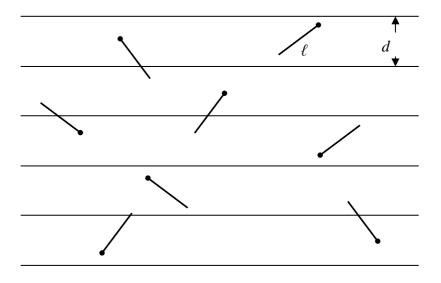
The number  $\pi \approx 3.14159...$  has been one of the most famous constants throughout the history of mathematics. It is well known, due to the properties of similar shapes, that the circumference of any circle divided by its diameter is always a constant, and this value is defined as  $\pi$ . Despite its simple definition, the mission of searching for its approximate value has been an endless endeavour for many mathematicians using very different approaches. In the most recent implementation of the Mathematics curriculum in Hong Kong, more emphasis was put in the historical context of the computation of  $\pi$ . For instance, the Explanatory Notes to Junior Secondary Mathematics Curriculum (2020) mentioned explicitly that students are expected to "recognise the Circle Dissection Algorithm of the

ancient Chinese mathematician Liu Hui and further recognise Huilu and Tsulu (approximations of  $\pi$ )".

Indeed, the estimation of  $\pi$  was manifested in a quite lot of contrasting backgrounds and cultures. For example, the Christian Bible depicted this number implicitly when king Solomon built the Temple for God, as in 1 Kings 7:23 (NIV): "He made the Sea of cast metal, circular in shape, measuring ten cubits from rim to rim and five cubits high. It took a line of thirty cubits to measure around it." (Biblica, 2011). This scripture implies that  $\pi$  is approximately equal to  $\frac{30}{10} = 3$ . In ancient Greek, the mathematician Archimedes found the appropriate value of  $\pi$  using a similar geometric approach to Liu Hui, constructing both inscribed and circumscribed polygon to estimate the area of the circle (Dörrie, 1965). While some mathematicians tackled the problem using geometric models, some sought for algebraic solutions. Some well-known results are the Madhava-Leibniz series  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \frac{\pi}{4}$ and the Wallis product formula  $\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)$  ... =  $\frac{\pi}{2}$ .

Surprisingly,  $\pi$  not only appears in geometry and algebra, but is also involved in an entirely different realm of mathematics, namely, probability theory. The French naturalist Georges-Louis Lecler, Comte de Buffon (1707–1788) was one of the pioneers to estimate the value of  $\pi$  using probability. He posted and solved the following question:

"If a needle is dropped onto a series of parallel lines, all the same width apart, what is the likelihood that the needle will cross one the lines?" (Dorling Kindersley, 2019)



This problem is currently known as Buffon's needle experiment. For the sake of simplicity, let us denote the distance between the parallel lines as d and the length of the needle as  $\ell$ , as shown in the figure. We need to express the required probability in terms of d and  $\ell$ . In spite of its apparent complexity, Buffon's needle problem can be solved using elementary mathematics, as described in Dörrie (1965). This article aims to investigate a series of two problem-solving activities to introduce  $\pi$  to secondary students through this experiment. In contrast to the geometric and algebraic approaches, this pedagogical design facilitates Inquiry Based Learning (IBL), which enables students to experience the estimation of  $\pi$  from the perspective of probability. Recent educational research suggested that IBL generally involves five phases (Northern, 2019):

- Engage
- Explore
- Explain
- Elaborate
- Evaluate

These phases are also known as the "5 E's of Inquiry-Based Learning." Our first activity, focusing on the Engage and Explore phases, is suitable for junior secondary (Secondary 1 - 3) or above. Our second activity, involving the Explain,

Elaborate and Evaluate phases, is designed for students studying the Extended Parts in the senior secondary.

#### **Investigation Activity 1**

This activity adapts a problem-based inquiry approach to explore Buffon's needle problem. Students will need a thin rigid item as the "needle", such as a toothpick or a hairpin. Since the shorter the needle, the less likely it will hit the lines, the required probability clearly depends on the ratio  $\ell$ : d. We suggest that students ought to begin with simplest case of  $\ell = d$ . The case of a "short needle", where  $\ell < d$ , is perhaps a good extension task for the more able students in the class. The situation of a long needle, where  $\ell > d$ , is more complicated and is out of the scope of this article.

#### Engage

Students are first engaged with this challenging Buffon's needle problem. The teacher may remind students to recall their prior knowledge, such as the concepts of probability, relative frequency and expectation. The following questions may be used to provoke insights for the students:

• How do we calculate probability?

- What is different between discrete and continuous random variables?
- What is the connection between theoretical probability and experimental probability?
- How can expected frequency help to estimate the solution?

During this phase, students may probably be quite perplexed because most of the probability questions in the curriculum involve only discrete probability, which are essentially combinatorial problems. Nevertheless, this question involves continuous random variables, which make the calculation much harder. Somehow, we have to extend our definition of probability in order to take these into account.

#### Explore

To explore the problem, students will be guided to throw the needles repeatedly on the paper and record the number of times it hits one of the lines, as well as the number of times it lands on the paper. Students are also suggested to organize the data into a frequency distribution table, as shown below.

Number of throws T	Number of intersections <i>I</i>	Tally	$\frac{2T}{I}$
10	6	<del>////</del> /	3.33333333
20	6 + 7 = 13	<del>////</del> //	3.076923077

The teacher may facilitate class discussions through questioning. Some suggested inquiry prompts could be:

- How can we improve the degree of accuracy of our estimation?
- How can we organize the data in a systematic manner?
- In what position should we hold the needle in order to ensure randomness?
- If we have 10 needles, what are the pros and cons of throwing 10 needles at a time rather than 1 at a time?

For students who finish the task early, the teacher might raise the following extension questions for greater stretch of their ability:

- If we use a shorter needle, will the expected value of  $\frac{2T}{I}$  increase or decrease?
- If someone threw the needle 200 times but their

estimation was not close to the expected value, can we definitely claim that the needle is biased?

In theory, the relative frequency should tend to become closer and closer to the theoretical probability when the number of trials increases. These questions may serve as a good starting point for the introduction to confidence intervals in Module 1 (Calculus and Statistics), or even hypothesis testing and Laws of Large Numbers.

#### Samples of Students' Performance

This activity was implemented in a class of Year 8 students in a high school in London. They were asked to work collaboratively in pairs. One of the students threw the needle, while the other recorded the data. As they seldom had hands-on practical tasks in the class, some students were quite excited to hear that they were going carry out an "experiment" in a mathematics lesson. Students are given hairpins with length 5 cm and sheets of paper with parallel lines which are 5 cm apart, and so  $d = \ell = 5$ . They are suggested to throw the hairpin repeatedly 10 times per round. Next, they repeated the procedures for a total of at least 20 rounds. The following are some sample scripts of the students.

#### Students A and B:

They recorded the data for every 10 trials. At each stage, they calculated the estimated value of  $\frac{T}{I}$  and then doubled this value. They counted the numbers verbally. They could see that the value of  $\frac{2T}{I}$  seemed to approach 3 as the number of tosses increased.

	: 100.10	intersections X2
Tosses	intersections	10
10	8	8 = 1.25 2.5
20	14	20 - 3,3 6.6
30	21	30 = 1.4 285 2857
40	30	30=1.3 26
50	37	50 = 1.351 2.70Z
60	43	60 -1.395 2.79
70	59	70 = 1.186 2.372
80	67	80 =1.194 238
90	75	90 =1.2 2.4
100	80	100 -1.25 2.5
110	86	86 =1.278 2.558
120	90	120 -1.3 2.6
130	95	130 =1.368 2.73
140	104	104 7.346 2.60
150	110	150 -1.36 2.77
160	113	113 -1415 283
170	119	1170 -1.478 2.8
180	ne	180 -1.428 7.85
190	128	128 - 1.484 2.91
200	132	700-1.51 3.6

#### Students C and D:

This pair used tally to assist their organization of data. They also performed the calculations every 10 tosses. Their first few stages of calculations showed that their estimates fluctuated around 5 and 4, and then started to stabilize. They did not manage to complete 20 rounds during the lesson, but after 11 rounds of 10 trials, they had obtained an estimate of  $\pi$  which equals 3.4 approximately.

Tosses	Intersections	No of intersection 2	9-Icm
10	4	10 = 2.5 25x2=5 44	THE
20	9	20g = 2.2 2.2x2=4.4	WITH
30	13	1302 3 = 2.3 2.3x2-4.6	ITH HI
40	21	21 40 = 1.9 1.9x2=3.8	JK TH
80	26	30 50 = 1.9 1.9x2=3.8	THE THE
60	32	605 - 1-89 1-891.87 x2= 3.75	71
70	41	187	THY MU
70	41	121 = 1.7 1.7x2=3.4	144 III
70	48	80 - 1.6 1.6x2=3.2	
90	52	9052 = 1.7 1.7×2=3.4	
100	56	100 = 1.8 1.8×2= 3.6	
110	63	110 = 1.7 1.7 x 2 = 3.4	
120		103	

#### Students E and F:

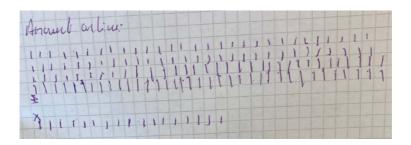
This group made extensive use of tally. It is evident that they did 4 rounds of 50 trials to obtain 200 tosses, as shown in their working out. In contrast to the previous students, they did not write down the calculations at every stage. Instead, they leave the final calculation to the very end. This approach did save

some computation time, but they could not appreciate the limiting process where  $\frac{2T}{I}$  tends to a constant when the number of tosses is increased.

buggons	need	le calculating pi
INTERSECTIONS	TOSSES	TOTAL
THE THE THE THE THE	HT HT HT	W W W W W 350
HILL HIT HE HE III	HAT THE THE	HTHT HTHTHE SO
119	THE	HTHE HTHE SO
		MUM HT M ATT SO
200 x 2 = 3,3613	44538	

#### Students G and H:

Instead of tallying, they wrote lots of 1s to indicate the numbers of intersections when they threw the hairpin. It quite difficult for them to count the outcomes. This reflected that they did not have much exposure to statistical skills such as collecting and organising data.



From these samples, we could see that different students used slightly different strategies. At the end of this activity, the students compared their answers with different groups. They noticed that when we throw the hairpin many times,  $\frac{2T}{I}$  seemed to approach a certain value. One might ask what would happen when the number of trials increases indefinitely. Of course, it is impossible to throw the needles infinitely many times, but one may use computer simulations to visualise the situation when a large number of needles were thrown (Ogden, 2011). The following simulation used 1000 'needles' to obtain  $\pi$  with a percentage error of 3.1% . It is much more convincing to see that with so many needles, the limiting value is not obtained merely by chance.

STICKS DROPPED	CROSSING A LINE	ESTIMATE OF $\pi$	ERROR	
1000	386	3.238342	3.1%	

Number of sticks to drop: 100 

Click on the board! Each time you click, 100 sticks will be dropped and the number that cross a line will be counted. I dropped 10 to start you off.

Does the estimate get better as you drop

Does the estimate get better as you drop more sticks (i.e. does the error get smaller)? How close to  $\pi$  can you get after 100,000 sticks, or 1,000,000?



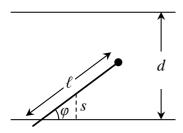
## **Investigation Activity 2**

After the first activity, some students asked, "Why does this method work? Where does the  $\pi$  come from?" It may be quite astonishing for most students to see that  $\pi$  seems to appear from the middle of nowhere. After all, the constant  $\pi$  should be closely related to circles, but there are no circles in this entire problem! Moreover, students may probably be curious why  $\frac{2T}{I}$  will converge as the number of throws increases indefinitely, and more importantly, why it would be  $\pi$ ? We shall answer these questions through the second activity, in which students explore Buffon's needle problem using continuous random variables. This task is implemented in a class of Year 13 students in the same school and their responses will be discussed in the following sections.

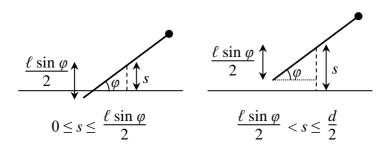
## Explain

In this phase, the teacher may explain how we could formulate the problem mathematically by introducing some suitable variables in the diagram. When the needle with length  $\ell \leq d$  is dropped on the paper, let  $\varphi$  be the acute angle between the needle and one of the straight lines (produced if necessary), and let s be the distance from the midpoint of the needle to the closest

straight line on the paper, as shown in the figure below. In the degenerate case where  $\ell$  is parallel to (or coincide with) one of the lines, we define  $\varphi = 0$ .



Owing to symmetry, we may assume that  $\varphi$  and s distribute uniformly on the intervals  $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$  and  $0 \le s \le \frac{d}{2}$  respectively. Given any angle  $\varphi$ , the needle will intersect its closest straight line if  $0 \le s \le \frac{\ell \sin \varphi}{2}$ , but it will not intersect any of the straight lines if  $\frac{\ell \sin \varphi}{2} < s \le \frac{d}{2}$ , as shown below.



In other words, given that the needle makes an angle of  $\varphi$  with a

line, the probability that it will intersect with a line is 
$$\frac{\frac{\ell \sin \varphi}{2}}{\frac{d}{2}}$$

$$=\frac{\ell \sin \varphi}{d}$$
.

When solving such a challenging problem, it is sometimes beneficial for us if we could modify it slightly to gain some insights first (Tao, 2006). In our context, what would be a good way to simplify it? It is likely that students will come up with the following possibilities:

- Consider special cases, e.g.  $\ell = d$ , fixed number of trials, etc.
- Fix one of the variables and let the other varies
- Use numerical methods to estimates the actual solution

Let us begin with the first strategy, for instance, by assuming  $\ell = d = 1$ . Students were asked to investigate the behaviour of the needle for some special angles under this assumption, such as  $0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  and  $90^{\circ}$ . Next, they tried to generalize the results for an arbitrary angle. Most students noticed that the  $90^{\circ}$  needle hits a line with a probability of 1 (certain event). For the  $0^{\circ}$  needle,

some students wrongly equated the probability to 0.1 or 0.2, thinking that the needle has thickness. After being reminded that the needle is modelled as a straight line segment, they realized that the probability should be 0. A few students were able to solve the case for the 30° needle. Initially, their conversation was about Pythagoras Theorem, but when they took a closer look of their diagram, they noticed that the acute angles are involved, and so trigonometry is required. Hence, we have  $\frac{1 \sin 30^\circ}{1} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ . Similarly, we can deduce that given an angle of  $\varphi$ , the required conditional probability is  $\sin \varphi$ . We are now ready to move on to the general case, and our next challenge is to tackle the two independent random variables  $\varphi$  and s at the same time.

#### Elaborate

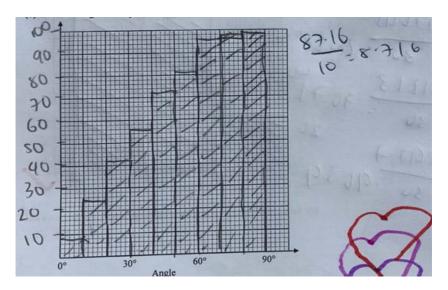
During this phase, students will apply their new understanding to tackle the problem. Suppose that  $\ell=d=1$  and 9000 needles are thrown independently. We may partition the values of  $\varphi$  (in degrees) into, say, 9 class intervals and organise the data in a frequency distribution table. For each class interval, the expected number of needles is  $\frac{9000}{9}=1000$ , and the expected number of intersections is approximately equal to  $1000 \sin x^{\circ}$ ,

where  $x^{\circ}$  is the angle midpoint (class mark) of the class interval. It is because, as shown in the Explain phase, the conditional probability that an  $x^{\circ}$  needle will hit one of the lines is  $\sin x^{\circ}$ . If  $0 \le \varphi < 10$ , then an estimate of the number of intersections out of these 1000 throws is 1000  $\sin 5^{\circ} \approx 87.155$ . We can then complete the rest of the table in a similar way. Here are the results obtained by student I.

Angle ( $\phi^{\circ}$ )	Expected number of needles	Angle midpoint	Expected number of intersections
$0 \le \varphi < 10$	1000	S	87.16
$10 \le \varphi \le 20$	1000	13	758.82
20 ≤ φ < 30	0001	25	422.62
$30 \le \varphi < 40$	0001	X935	573.58/
$40 \le \varphi < 50$	1,000	W3 45	11.606
50 ≤ φ < 60	1000	25	819.18
60 ≤ φ < 70	1000	65	906.31
$70 \le \varphi < 80$	1000	75	965.93
$80 \le \varphi < 90$	1000	85	99619

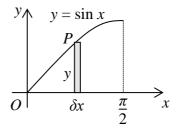
What is a good way to represent these data graphically? As the problem involves continuous data, a histogram will be a suitable option. Students can be guided to construct the histogram to illustrate the above results. Notice here that student *I* used the frequency density (i.e. frequency divided by class width) in the vertical axis of the histogram below, which is a common practice in the United Kingdom. Students in Hong Kong may prefer

putting the frequency in the vertical axis, but then have to ensure that the class widths of all the class intervals are fixed.



What does this histogram look like? Students may probably notice that the above histogram resembles the sum of the areas of rectangles under a curve, namely the Riemann sum of the sine graph. If we work out the limiting histogram of this distribution as the class widths tend to zero, we can, in theory, calculate the exact probability in Buffon's needle problem.

Consider the graph of  $y = \sin x$ , where x is measured in radians, as shown in the figure below. The point P(x, y) lies on the curve. The rectangle, shown shaded on the figure, has height y and width  $\delta x$ .



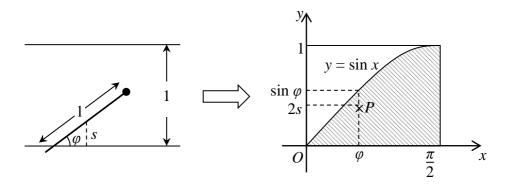
The area under this curve is given by the limit

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \delta x$$

Using the Fundamental Theorem of Calculus, we know that the limit can be found by evaluating the antiderivative of  $\sin x$ , as shown in the working of student J below.

The above notation of the limit for the Riemann sum is commonly used in the United Kingdom. An alternative notation is  $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$ , which represents the same definite integral.

In this special case where  $\ell=d=1$ , we can establish a one-to-one correspondence between all the possible positions of the needle and the random point P(x, y) by the equations  $x=\varphi$  and y=2s, where x and y distribute uniformly on the intervals  $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$  and  $0 \le y \le 1$  respectively.



In the Explain phase, we saw that the needle will intersect a line if and only if  $0 \le s \le \frac{\sin \varphi}{2}$ , or equivalently  $0 \le 2s \le \sin \varphi$ . This corresponds to the event that a randomly chosen point P(x, y) falls below the graph of  $y = \sin x$ , as shown in the shaded area. The sample space of P is the rectangular region defined by system of inequalities

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

This rectangle, with length  $\frac{\pi}{2}$  and breadth 1, has an area of  $\frac{\pi}{2}$ . Since  $\varphi$  and s are also assumed to be uniformly distributed, the change of variables  $x=\varphi$  and y=2s will preserve the probability density. Consequently, our sought for probability is 1 out of  $\frac{\pi}{2}$ , which equals  $\frac{2}{\pi}$ .

In the general case for the short needle, where  $\ell < d$ , we know that the required probability varies directly as  $\ell$  and inversely as d. It is because the longer the needle, the more likely it will hit one of the lines, and the wider the spacing of the lines, the less likely the needle will do so. Hence, the probability that the short needle intersects a line equals  $\frac{2\ell}{\pi d}$ .

#### Evaluate

At this stage, students will reflect on their understanding and the teacher will assess their learning. This can be achieved by verbal feedback and the written work of the students. Through class discussions, students can also make sense of what they discovered in the Explore phase and justify their conjecture. According to the Law of Large Numbers, it is certain (with a probability of 1) that the experimental probability will tend to the theoretical probability when the number of trials increases indefinitely. In our special case of  $\ell=d$ , it is expected that 2 out of  $\pi$  needles will intersect a line, while the corresponding experimental probability is  $\frac{I}{T}$ . This verifies that  $\frac{2T}{I}$  will indeed converge to  $\pi$  if we repeatedly carry out Buffon's experiment many times.

#### **Conclusion**

Buffon's needle experiment is quite an inspiring problem for pupils to investigate. The above inquiry activities connect the constant  $\pi$  to various topics in the curriculum, including calculus, probability and statistics. The Senior Secondary Curriculum and Assessment Guide (2017) suggested that "the definition of the definite integral as the limit of a sum of the areas

of rectangles under a curve should be introduced" in Module 1 (Calculus and Statistics), and students are expected to "recognise the concepts of continuous random variables and continuous probability distributions". Furthermore, students studying Module 2 (Algebra and Calculus) should be able to find "a definite integral from the definition".

Our activities facilitate these learning objectives by using histograms to introduce the Riemann Sum, as well as developing the relationship between continuous random variables and definite integrals. Readers may have noticed that the series is designed to be cross-module, not only breaking the "barrier" between the two Extended Parts in the Mathematics curriculum. but also that between pure and applied mathematics. When organising these activities, pupils must first be equipped with the relevant prior knowledge. Module 1 students should be introduced with radian measure of angles and the derivatives of trigonometric functions, while Module 2 students need to be familiarised with continuous random variables and probability density function. Alternatively, teachers of Modules 1 and 2 may implement this series as joint-class activities in which pupils work in groups of three or four with at least one member from each Module.

A crucial component throughout the activities is IBL, which enables students to ask their own questions. The teacher can guide the class discussions during the activities: "What did you observe? What did you wonder?" On the other hand, pupils can explore the problems collaboratively by themselves, and achieve a higher sense of ownership and responsibility to their learning.

It is observed that students in the United Kingdom are generally more proactive and talkative. They are more accustomed to a classroom culture of discussing their findings with their peers. The mathematics classroom may be filled with conversations about their ideas and strategies. These give them the advantage learning collaboratively of and sharing knowledge. Nevertheless, in order to generate fruitful class discussions, the learning activities have to be carefully designed at an appropriate level of difficulty, or otherwise behavioural issues are more likely to occur. Teachers may, at their discretion, instruct their pupils to complete the tasks independently, or even change the mode of the activities to a mixture of group work and individual work. We hope that this article may shed some light on the implementation of IBL in the mathematics curriculum, and that students find it enjoyable to explore the mathematical knowledge in Buffon's needle problem. Finally, we would like to acknowledge the Mathematics Department of Woodford



#### References

- [1] Biblica. (2011). *The Holy Bible, New International Version, NIV.* Michigan: Zondervan.
- [2] Curriculum Development Council and The Hong Kong Examination and Assessment Authority. (2017).

  Mathematics: Curriculum and Assessment Guide (Secondary 4 6). Hong Kong: Education Bureau.
- [3] Curriculum Development Institute. (2020). *Explanatory Notes to Junior Secondary Mathematics Curriculum*. Hong Kong: Education Bureau.
- [4] Dorling Kindersley. (2019). *The Maths Book: Big Ideas Simply Explained*. London: Penguin Random House.
- [5] Dörrie, Heinrich. (1965). Trans. David Anin. 100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. New York: Dover Publications.

- [6] Northern, Sam. (2019). *The 5 E's of Inquiry-Based Learning*. Available online at: <a href="https://knowledgequest.aasl.org/the-5-es-of-inquiry-based-learning/">https://knowledgequest.aasl.org/the-5-es-of-inquiry-based-learning/</a>
- [7] Ogden, Thomas. (2011). *Pickup Sticks & Pi*. Available online at: <a href="https://ogden.eu/pi/">https://ogden.eu/pi/</a> [Accessed 6th April 2023].
- [8] Tao, Terence. (2006). Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective. New York: Oxford University Press.

## 4. How mathematics enhances NCS students learning in the STEAM aspect?

#### NG Cheuk-yu

CMA Choi Cheung Kok Secondary School

#### Introduction

Concern for improving STEM education in many nations continues to grow as demand for STEM skills to meet economic challenges increasingly becomes acute (English 2016)

Science, Technology, Engineering, the Arts, and Mathematics (STEAM) education is becoming increasingly important in today's world. As we move towards a more technology-driven society, it is essential that students are equipped with the necessary skills to succeed in STEAM-related fields.

In Hong Kong, there is a growing interest in STEAM education for better offers from colleges as well as better career paths. One way to enhance STEAM education is through the use of mathematics. In this article, we will explore how mathematics can enhance non-Chinese speaking students' learning in STEAM-related aspects in Hong Kong.

#### The Importance of STEAM Education

Driven by genuine or perceived current and future shortages in the STEM workforce, many education systems and policymakers around the globe are preoccupied with advancing competencies in STEM domains. (English 2016; Marginson et al. 2013).

STEAM education is critical in preparing students for the workforce of the future. It is estimated that by 2030, millions of workers will need to be reskilled due to advancements in technology. This means that students need to be equipped with the necessary skills to succeed in a rapidly changing job market. STEAM education helps students develop critical thinking skills, problem-solving skills, and creativity, all of which are essential in STEAM-related fields.

In Hong Kong, the government has recognized the importance of STEAM education and has taken steps to promote it. The Education Bureau has launched various initiatives to enhance STEAM education in schools, including the introduction of coding and robotics as part of the curriculum. The Bureau also provided fruitful online resources in different aspects: <a href="https://stem.edb.hkedcity.net/en/learning-and-teaching-resources-for-steam-education/">https://stem.edb.hkedcity.net/en/learning-and-teaching-resources-for-steam-education/</a>. However, there are still various challenges teachers and non-Chinese speaking students needed to overcome which will be discussed in the coming.

# **Challenges Faced by Non-Chinese Speaking Students in Learning STEAM-related Aspects**

Non-Chinese speaking students in Hong Kong face several challenges in learning STEAM-related aspects. One of the main challenges is language. Many STEAM-related terms are technical and may be difficult for non-Chinese speaking students to understand even if the lesson is conducted in English, as English is the second language for both teachers and students in Hong Kong. This can make it challenging for them to follow lessons and fully master the concepts being taught.

Another challenge is cultural differences. Non-Chinese speaking students may come from different educational backgrounds, and some of them may even directly join secondary education without attending any local primary school, which may not have included STEAM-related subjects. This can put them at a disadvantage compared to local students, who may have been exposed to STEAM-related subjects in local primary schools.

## **How Mathematics Can Enhance Non-Chinese Speaking Students' Learning in STEAM-related Aspects**

Mathematics can play a crucial role in enhancing non-Chinese speaking students' learning in STEAM-related aspects. Here are some ways in which mathematics can help:

### 1. Mathematics is a universal language

One of the main advantages of mathematics is that it is a universal language. Unlike other subjects, such as language or history, mathematics does not rely on cultural context. This means that non-Chinese speaking students can use mathematics to communicate and understand STEAM-related concepts without the need for translation. We have a cross-curriculum topic about 3D print cookie cutter making in junior form, some students may have different cake size concepts, but the use of accurate dimensions to build up a computer 3D model could help students think of what size of the cutter they needed.

# 2. Mathematics provides a foundation for STEAM-related subjects

Mathematics is the foundation of many STEAM-related subjects. For example, in science, mathematics is used to model and analyse data, while in engineering, mathematics is used to design and optimise systems. By strengthening their mathematical skills, non-Chinese speaking students can improve their understanding of STEAM-related subjects and perform better in these areas. For example, one of the STEAM transdisciplinary STEAM activity is to build a wind-powered trolley to study the relationship between speed and sail area, with the dotted graph, students can easily chase the optimised area of sail with regard to a specific kind of car body.

### 3. Mathematics develops problem-solving skills

Mathematics is a subject that requires critical thinking and problem-solving skills. By practicing mathematics, non-Chinese speaking students can develop these skills by solving questions with different formulas and math models, students have to gather essential data and turn them into useful answers or information by some model or mathematics. For example, in engineering, problem-solving skills are necessary to design and optimise

systems, while in art, problem-solving skills are necessary to create aesthetically pleasing designs.

## 4. Mathematics promotes creativity

Contrary to popular belief, mathematics can be a creative subject. By exploring patterns and relationships, non-Chinese speaking students can develop their creativity and apply it to STEAM-related fields. For example, in art, mathematics can be used to create geometric structure designs, while in music, mathematics can be used to understand the structure of sound. In Engineering the combination of different length ratios of linkage can create various tracks, such data can also simulate the tracks in freeware like: https://www.geogebra.org/m/D7jrej72.

## **Examples of How Mathematics Can Enhance Non-Chinese Speaking Students' Learning in STEAM-related Aspects**

Let's look at some examples of how mathematics can enhance non-Chinese speaking students' learning in STEAM-related aspects:

#### 1. Science

In science, mathematics is used to model and analyse data. For example, in physics, mathematics is used to describe the behaviour of objects in motion. Non-Chinese speaking students who struggle with the language may find it challenging to understand the concepts being taught in physics. However, by strengthening their mathematical skills, they can improve their ability to model and analyse data, which can help them better understand the concepts being taught. Additionally, non-Chinese speaking students can use mathematics to develop investigation skills, which is essential in science. For example, they can investigate the relationship between a catalyst amount used and the reaction duration of a chemical reaction by plotting a curve.

### 2. Technology

In technology, mathematics is used to design and optimise systems. For example, in computer science, mathematics is used to develop algorithms, which are the building API blocks of computer programs. Non-Chinese speaking students who are not familiar with computer programming may find it challenging to understand how algorithms work by using mathematic functions. For some popular STEAM projects like IoT (Internet

of Things), the communication program between machines is based on logic and function calculation, math can help teachers to explain such concepts with simplified formulas in those logic blocks.

## 3. Engineering

In engineering, mathematics is used to build models for testing or simulation. For example, students can estimate the robot arm size by entering the target object dimension in a computer-aided design program for simulation instead of using real material to build a prototype instead of wasting raw material in building an early solution. Non-Chinese speaking students who struggle with the language may find it challenging to understand the concepts being taught in engineering. However, by strengthening their mathematical skills, they can improve their ability to design and build math models, which can help them in engineering. Additionally, non-Chinese speaking students can use mathematics to enhance their problem-solving skills, which is the core idea of the field.

#### 4. The Arts

In art, mathematics can be used to create aesthetically pleasing designs by using numerical sorting of colour and geometrical 3D model building. For example, in architecture, mathematics is used to design buildings with pleasing proportions and shapes. Colour hue and contact in digital fine art can be managed by Pantone colour number non-Chinese speaking students who struggle with creativity may find it challenging to come up with interesting designs. However, by exploring patterns and relationships in mathematics, they can develop their creativity and apply it to art. Additionally, non-Chinese speaking students can use mathematics to develop their problem-solving skills, which are essential in art. For example, they can practice using geometry and symmetry to create visually appealing designs from random access to gradient change with processed values in online apps:

https://www.magicpattern.design/tools/geometric-patterns.

## Conclusion

In conclusion, mathematics can play an important role in enhancing non-Chinese speaking students' learning in STEAMrelated aspects in Hong Kong. By strengthening their mathematical skills, non-Chinese speaking students can improve their understanding of STEAM-related subjects, develop analysis and problem-solving skills, and promote creativity with digital fabrication machines. Additionally, mathematics is a universal language that can transfer information without any misunderstanding like other languages do. As Hong Kong continues to emphasize the importance of STEAM education, it is essential that all students, including non-Chinese speaking students, reserve those training for better individual career paths as well as STEAM-related industrial development at city and national levels.

## References

- [1] English, L. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(3), 1–8.
- [2] Marginson, S., Tytler, R., Freeman, B., & Roberts, K. (2013). STEM: country comparisons. Melbourne: Australian Council of Learned Academies.

## 5. 探索不同方法來證明球體的體積公式

#### 湯湛津

## 廠商會蔡章閣中學

#### 引言

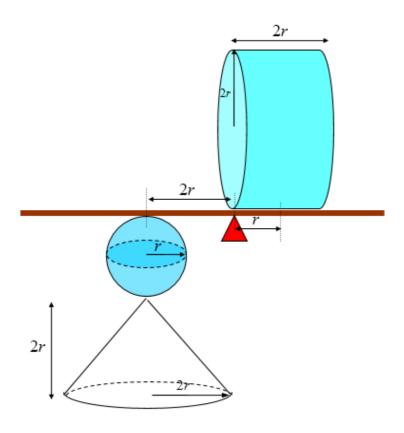
數千年以來,不少傑出的數學家和科學家如歐幾里德、柏拉圖、牛頓、祖沖之等等於數學和科學領域有不同的貢獻。基於站在眾多巨人的肩膀上,老師如何帶領學生證明球體的體積公式?本篇將會與同工一同探索不同的方法來證明此公式,當中包括我國數學家所研究的牟合方蓋,讓學生一睹中國數學家對數學的付出。

### 探索不同方法來證明和驗證球體的體積公式

阿基米德曾寫給朋友的信,後來被稱為 "On the sphere and the cylinder",他是第一個推導出球體的表面面積和體積的人。阿基米德指出,在相同高度和半徑的圓柱體內有一個球體,那麼球體的體積與圓柱體的體積之比為 2:3。因此,讓我們先由此證明球體體積公式。

## 方法1-- 槓桿原理

阿基米德將兩個著名的體積公式(圓錐和圓柱)與槓桿定律 結合使用,他發現距離槓桿支點 2r 個單位的實心圓錐和實 心球將平衡距離槓桿支點 r 個單位的實心圓柱。支點如下 圖(三個固體的密度(Q)相同):

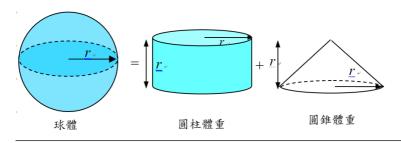


圓柱體的重心位於支點右側 r 個單位的點,而球體和圓錐組合體的重心位於支點左側 2r 個單位的點。由於固體們平衡,所以

$$(V_{(i m m)} + V_{(i m m m)}) \cdot 2r = V_{(i m m m)} \cdot r$$
 $(V_{(i m m)} + \frac{1}{3}\pi(2r^2)(2r)) \cdot (2r) = (\pi(2r)^2(2r)) \cdot r$ 
 $2 r V_{(i m m)} + \frac{16}{3}\pi r^4 = 8\pi r^4$ 
 $V_{(i m m)} = 4\pi r^4 - \frac{8}{3}\pi r^3$ 
 $V_{(i m m)} = \frac{4}{3}\pi r^3$ 

#### 方法 2 -- 透過量度重量

方法 2 與方法 1 的概念十分相似。我們透過三個具有相同密度(p) 的固體:球體、圓柱體和圓錐體,尺寸如下圖:



School Mathematics Newsletter · Issue No. 27

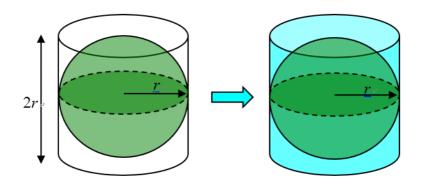
透過量度固體們的重量,我們發現:

球體的重量 = 圓柱體和圓錐體的重量之和

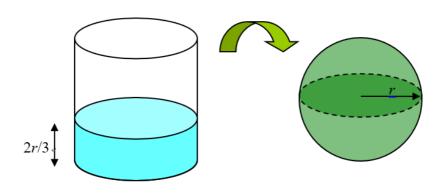
$$V_{(
mathridge]}$$
 ・  $ho$  =  $V_{(
mathridge]}$  ・  $ho$  +  $V_{(
mathridge]}$  ・  $ho$   $V_{(
mathridge]}$  =  $\pi r^3 + rac{1}{3}\pi r^3$   $V_{(
mathridge]}$  =  $rac{4}{3}\pi r^3$ 

### 方法 3 -- 通過測量水的高度

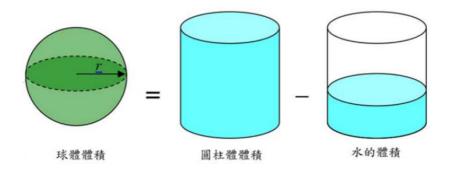
此方法是根據具有圓柱體形狀容器中水的高度來推導出球體和圓柱體之間的關係。現有一個半徑為 r 的球體,可以由具有相同半徑 r 和高度 2r 的容器外接。將水倒入容器中,直至滿為止,如下圖所示。



然後取出球體,測量剩餘水的高度,便得出其高度是容器高度的 1/3。



所以

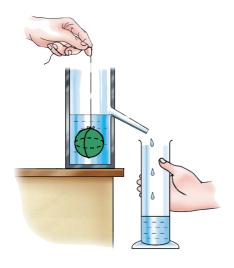


球體體積 = 圓柱體體積 - 水的體積 
$$= \pi r^2 \cdot 2r - \pi r^2 \cdot \frac{2}{3}r$$
 
$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

# 方法 4 -- 排水罐

在該方法中,球體的體積是通過從排水罐中排出的水的體積 來測量的,通過球體不同半徑的體積導出球體體積與  $r^3$  之 間的關係。



首先,測量從排水罐中排出球體的水的體積。並且用不同半徑的球體重複該過程。其次,將球體的體積除以  $r \cdot r^2 \rightarrow r^3$ ,它們的關係如下表所示。

	<i>r</i> 1	r <sub>2</sub>	<i>r</i> 3
$\frac{V_{x}}{r_{x}}$			
$\frac{V_x}{(r_x)^2}$			
$\frac{V_{x}}{(r_{x})^{3}}$			

讓學生利用  $\frac{\mathbf{V}_x}{(r_x)^3}$  的關係,發現

$$V = k r^3$$
  $(k \ \text{\textit{E}} \, \text{\textit{m}} \, \text{\textit{m}})$ 

並得出 k 與  $\pi$  的關係為  $\frac{k}{\pi} = \frac{4}{3}$  ,而推算出

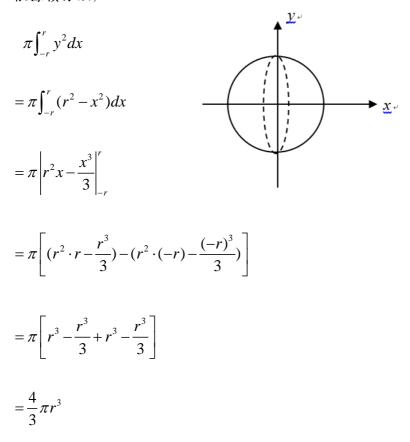
球體體積 
$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

# 方法 5 - 透過積分法

球體的體積公式可利用圓方程透過積分法而證明。以原點為 圓心、半徑為 r 的圓的方程如下所示。

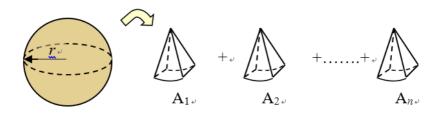
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

根據積分法,



## 方法 6-- 透過球體的曲面面積

將球體拆解成許多個"金字塔",已知球體曲面面積公式,便可以推導出球體體積公式。將球體拆解為高度為 $\Gamma$ 、面積為 $A_1$ 、 $A_2$ 、...、 $A_n$ 的"金字塔",如下所示。



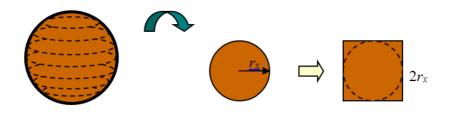
如果把球體拆解成更多的"金字塔",而各"金字塔"的底 是一個"平面",那麼

球體體積 = 
$$\frac{1}{3} \times A_1 r + \frac{1}{3} \times A_2 r + ... + \frac{1}{3} \times A_n r$$
  
=  $\frac{1}{3} (A_1 + A_2 + ... + A_n) r$   
( $\therefore A_1 + A_2 + ... + A_n = 4\pi r^2$ )  
=  $\frac{4\pi}{3} r^3$ 

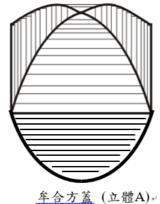
# 方法7-- 牟合方蓋

在我國,有不少數學家求球體體積,如張衡、劉徽、祖沖之、 祖晅等。劉徽得出球體體積與牟合方蓋體積之比;而大約兩 百多年後,祖沖之和他的兒子祖暅根據劉徽的牟合方蓋概念 導出了球體的體積。

當球體的每個橫截面(半徑為 $r_x$ 的圓)變換為邊長為 $2r_x$ 的正方形時,如下圖所示:



每個變換後的正方形合併而成的立體稱為牟合方蓋,如下所示。



School Mathematics Newsletter · Issue No. 27

## 球體橫切面面積

立體A橫切面面積

$$=\frac{\pi r^2}{\left(2r\right)^2}=\frac{\pi}{4}$$





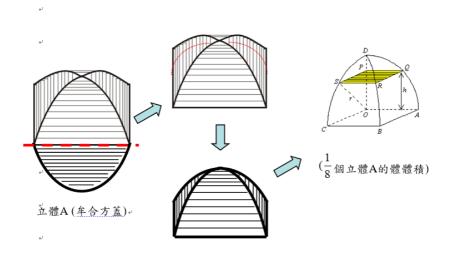
根據祖晅原理,立體 A 和半徑為 r 的球體的體積等於固體 相應橫截面的比值。

球體體積

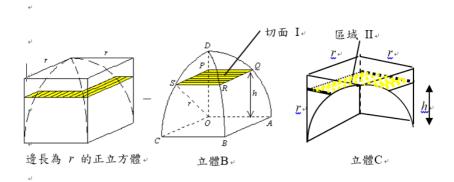
立體A體積

$$=\frac{\pi}{4}$$

將立體 A 切成 8 等份,得到立體 B,稱為小牟合方蓋,立體 B 的體積為立體 A 體積的 1/8,如下圖所示。



# 如圖所示,當立體 B 從正立方體中移除時,得出立體 C 。



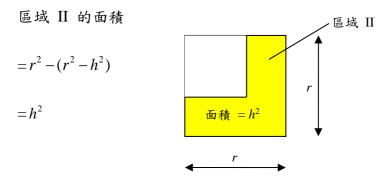
School Mathematics Newsletter · Issue No. 27

立體 B 中的水平横切面 I 是正方形;

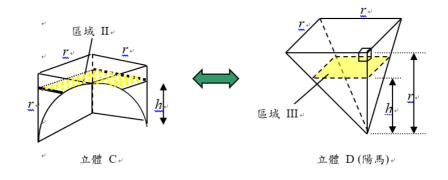
$$SP=\sqrt{r^2-h^2}$$
 (由勾股定理)

切面I的面積

$$=r^2-h^2$$



一個立體 D 稱為陽馬,它的底邊是 r, 高是 r, 如下圖所示。



由於這與立體 C 和立體 D 相應截面的面積相同,因此根據 祖暅原理,兩個立體的體積相同。

區域 II 的面積 = 區域 III 的面積

$$h^2 = h^2$$

立體 C 的體積 = 立體 D 的體積

$$=\frac{1}{3}r^3$$

:: 立體 B 的體積

= 立方體體積 - 立體 C 的體積

$$= r^3 - \frac{1}{3}r^3$$

$$=\frac{2}{3}r^3$$

## :: 立體 A 的體積

## = 8 (立體 B 的體積)

$$=8 imesrac{2}{3}r^3$$
 $=rac{16}{3}r^3$ 
 $=8 imes$ 
 $\pm 8 imes$ 

## 根據球體體積與立體 A 的體積之比:

立體 A 的體積 
$$\frac{球積 體積}{\frac{16}{3}r^3} = \frac{\pi}{4}$$
 球體體積 
$$= \frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}r^3$$
 
$$= \frac{4\pi}{3}r^3$$

球體體積

科技日新月異,世界現在談及 AI,學校邁向 STEAM 教育,期待老師們於未來的日子帶領學生發現或發明更多探究更多數學的知識。

## 6. 以數學科為起點的 STEM 教育學習活動

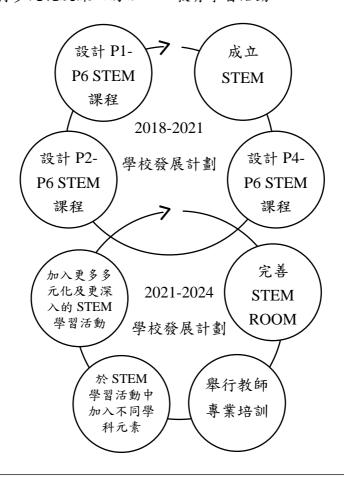
陳志剛、徐璟昕 元朗公立中學校友會小學

## 校本 STEM 教育發展背景

在 2015 年的施政報告中,政府首次提出推動 STEM 教育,並在 2016 年施政報告中獲得進一步的支持。除了培養學生對科學、科技和數學的興趣,以及讓學生建立穩固的知識基礎外,我們旨在加強學生綜合和應用不同 STEM 學科知識與技能的能力,培養他們的創造力、協作和解決問題能力,以及促進發展二十一世紀所需的創新思維和開拓與創新精神。(教育局,2016)

為此,本校於 2018-2021 年度的學校發展計劃中,首次加入「推行校本 STEM 教育」作為其中一項關注事項。在這三個學年間,本校先組成一個由課程發展主任及資訊科技主任帶領的 STEM 小組,成員包括數學科、常識科及電腦科的科主任及各科的一位高年級科任老師。STEM 小組每兩星期召開會議一次。其間,小組成員先聚焦設計四至六年級的STEM 教育學習活動,循序漸進地把 STEM 教育推展至一至六年級。而於 2021-2024 年度的學校發展計劃中,本校續把「完善校本 STEM 教育」作為其中一項關注事項,先優化

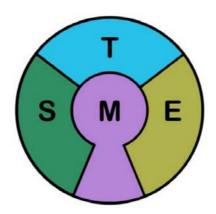
了學習環境:把電腦室及常識室改建成設備更完善的 STEM Room 及 GS Room,而兩間獨立課室中間的牆更可因應活動需要而靈活收合,貫通為一間空間更廣闊的活動場地,方便進行不同的 STEM 活動及比賽。另外,本校又多次舉辦教師專業培訓,增加教師對 STEM 教育的深度與廣度,令教師可更容易設計出科本的 STEM 教育學習活動,也能與學生進行多元化及深入的 STEM 教育學習活動。



School Mathematics Newsletter · Issue No. 27

#### 推展數學科科本 STEM 教育學習活動

於 2021-2024 學校發展三年計劃,本校的數學、常識及電腦科分別開始設計科本 STEM 教育學習活動。羅浩源 (2017)指出,數學本身既是窺視 STEM 的鑰匙孔,亦是打開 STEM 之門的鑰匙(圖一)。Wells (2016) 又指出,學生習得的科學和數學科知識,宜透過科技及工程設計為本的方式進行學習,綜合地運用不同的學科知識和技能,手腦並用,從實踐中了解各知識之間的聯繫。因此,根據數學科課程及本校學生的學習需要,於上學年,數學科於一至六年級都設計了一個科本的 STEM 教育學習活動,以下會分享其中兩個教學設計,分別是一年級的「自製玩具車」及二年級的「我的社區地圖」。



圖一:M(數學)在 STEM 的角色

## 一年級:自製玩具車

#### 學習目標

- ◆ 認識角柱、角錐、圓柱、圓錐和球
- ◇ 認識不同物料的特性
- ◆ 運用家中的物品去製作車輪可滾動的玩具車

#### STEM 元素

S 科學: 認識不同物料的特性,然後選用合適的物料去製作 玩具車

T 科技: 使用工具(剪刀、膠水等) 去製作玩具車

E工程:設計車輪可滾動的玩具車測試玩具車的車輪是否 可滾動

M 數學:認識角柱、角錐、圓柱、圓錐和球,然後根據立體 的特性及形狀,選用合適的物料去製作玩具車

#### 學習能力

動手做:利用模型/設計圖以發展工程概念

創意:製作玩具車設計圖,構思需要使用家中的那些物品

設計循環:設計及進行測試及改良

自評:結論、傳意及反思

#### 活動流程

活動一: 汽車設計師

教學重點: 能根據立體的特性(可疊高、可滾動)來設計玩

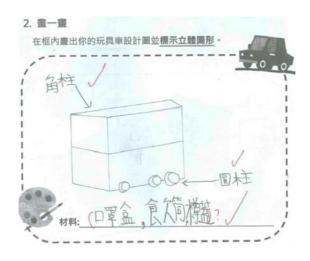
具車

活動流程: 1. 透過實物操作,讓學生探究出柱體能疊高,

圓柱、圓錐及球可滾動

2. 運用不同的立體圖形去設計一部簡單的玩

具車



活動二: 物料測試員

教學重點: 能根據不同物料的特性(輕重、軟硬、防水、易

碎)來選材

活動流程: 1. 透過屈曲測試、噴水測試及量度測試,發現

不同的物料有不同的特性

2. 收集家中防水、軟硬適中、輕巧而形狀又 合適的物品,以作稍後製作玩具車之用

活動三: 汽車工程師

教學重點: 能根據立體的特性(可滾動)來設計車輪及車

軸,運用不同粗幼的飲管去造出可轉動的車軸

活動流程: 1. 收集家中硬、輕及可滾動的物品來作車輪

2. 教師派發的不同粗幼的飲管,學生思考如何配搭,才能造出可轉動的車軸



活動四: 組裝、測試及改良

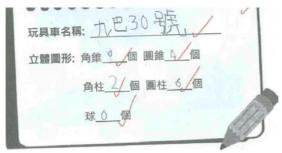
教學重點: 自行組裝玩具車,然後進行測試,找出不足之 處,加以改良

活動流程: 1. 運用收集到的物品去製作玩具車

 測試玩具車是否能向前後推拉,如果未能 成功運作,就要自行找出錯處,作出修正

3. 成功製作出可向前後推拉的玩具車





# 學生表現

學生能用合適的立體完成製作,部份作品的質素還很好,堅固且美觀;但部份作品的車輪未能滾動。大部分學生表示喜歡此活動,有少部份學生會感到困難,但尚能解決困難。





#### 檢討

此探究活動成效顯著,大部份學生透過畫玩具車的設計圖和動手做製作玩具車,更能掌握辨認立體圖形的技巧及認識能滾動的立體圖形,且能發揮創造力及訓練解難能力。而學生對此探究活動甚感興趣,積極投入,值得繼續進行此活動。

## 二年級:我的社區地圖

#### 學習目標

- ◆ 認識四個主要方向
- ◆ 認識用來辨別方向的工具
- ◆ 運用 Google Maps 尋找指定的地點
- ◆ 說出完善的社區應包括的設施

## STEM 元素

S 科學: 認識我國的四大發明之一--指南車

T 科技: 運用 Google Maps

E工程:繪畫地圖

M 數學:運用對四個主要方向的認識,在地圖中找出學校附

近的社區設施

#### 學習能力

動手做:自製地圖去發掘學校附近的社區設施,並找出可完善的地方

生活:就生活中的問題,提出解決方案

自評:藉着自製的地圖,反思自己社區的設施是否完善

#### 活動流程

活動一: 前後左右、東南西北

教學重點: 認識四個主要方向

活動流程: 1. 教師由課室座位表作引入,說出除了用前 後左右去表達方向之外,亦可用東南西北來表 示

教師先着兩位學生面對面站在課室的中間,然後提問方向題,着兩位學生以前後左右及東南西北兩種方式去作答。最後學生會發現用東南西北來表示方向的好處

活動二: 我國的四大發明之一—指南車

教學重點: 認識我國的四大發明之一—指南車

活動流程: 1. 教師讓學生認識除了用太陽和月亮的位置 來分辨方向外,還可以用指南針來辨別方向

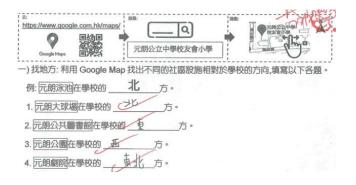
2. 教師向學生說出指南針的起源是源於我國的四大發明之一指南車,向學生說出發明指南車的故事

活動三: Google Maps

教學重點: 認識及運用 Google Maps

活動流程: 1. 教師向學生介紹網上地圖工具 Google Maps

2. 教師教授學生如何運用 Google Maps 去找 出指定的地點



活動四: 製作我的社區地圖

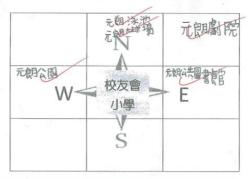
教學重點: 運用四個主要方向及 Google Maps 的知識,製

作我的社區地圖

活動流程: 1. 教師派發 iPad, 請學生在 Google Maps 內 找出學校的位置

- 2. 教師派發工作紙,請學生先看看 Google Maps 中,以學校為中心,四個主要方向有甚 麼社區設施,然後記錄於工作紙上
- 3. 教師着學生思考一下學校附近的社區設施 是否完善,如要優化,可加入甚麼設施,並說 出原因

二) 地圖製作: 利用以上不同社區設施的資料,製作簡單的地圖,標示出它們的位置。



三) 分享: 如果要優化元朗市,你會建議增加一項甚麽設施。為甚麼。

增建監院。因為可成少病人論侵的時間。

## 學生表現

學生能在 Google Maps 中找出指定的地點。除此之外,學生 更在進行此活動時主動探索其他從未到訪過的地方及其方 位。

#### 檢討

這個活動有趣,而且與學生的生活息息相關,大大增加了他們學習方向知識的動機及主動性。若有更多時間,教師可就學生的興趣展開話題,並與地區、城市、國家等連繫起來,讓他們看看世界地圖,擴闊他們的知識層面。

## 參考資料

[1] 教育局(2016)。《推動 STEM 教育-發揮創意潛 能》報告。取自

http://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/renewal/STEM\_Education\_Report\_Chi\_20 170303.pdf

- [2] 羅浩源(2017)。STEM 教育:以數學作起點來推動 STEM 教育的挑戰。《學校數學通訊》,21,6-11。
- [3] Wells, John G. (2016). Integrative STEM Education exemplar: Implementation of the PIRPOSAL model. Technology and Engineering Teacher, 75(10), 16-23.

## 7. 「把數學課堂帶到數據時代」活動分享

王兆雄、毛偉豪、馬翠薇 東華三院甲寅年總理中學

#### 一. 前言

在現今的大數據時代,學生會在日常生活中接觸不同類型的數據。因此,本校在 2022 至 2023 學年,參加了教育局「把數學課堂帶到數據時代」的種籽計劃,並設計了一些「數據處理範疇」的教學活動,藉此提高學生對數據處理的能力及培養學生的解決問題、溝通及協作能力。

本校是位於北區的英文中學,學生主要是來自第一組別,本 文將會分享相關的教學活動。

# 二. 活動內容 1 --- 數據科學簡介: 分類數據及量化數據; 離散數據及連續數據

(Introduction to Data Science: Categorical or Quantitative; Discrete or Continuous data.)

## 活動簡介

學生於小學階段已掌握了一些統計技巧,但老師甚少與學生說明數據的分類。我們認為若學生明白數據的類別會有助學

生學習數據科學。因此,我們設計了一些教學活動,讓學生明白分類數據(Categorical data)與量化數據(Quantitative data)的分別和離散數據(Discrete data)與連續數據(Continuous data)的分別。

## 基本資料

涉及數學課題:數據的組織

課堂對象:中一

前備知識:平均數

需用課節:1節(40分鐘)



## 課堂設計

學生需於課堂前,完成一份 Microsoft Form,該 Microsoft Form 共有 14 題,問題如下:

class number

1. Surname 2.

3. gender 4. number of siblings

5. wearing glasses or not 6. extent of nearsightedness / farsightedness

7. keeping pets or not 8. number of pets

9. weight 10. color preference

11. zodiac sign 12. lunch fee yesterday

13. mark of last chapter test 14. height

學生需要把所有問題的答案以數值表示,例如填寫性別,男性是1,女性是0;姓氏(Surname)的數值則可參閱下圖。

課堂開始時,學生分組計 算其中 2 條問題的平均 數。其後,老師與學生一起 探討每條問題計算出來的 平均數是否有意義。從而 讓學生明白分類數據 (Categorical data)與量化數 據(Quantitative data)的分 別。

The table digitalizing alphabet:

A	01
В	02
С	03
D	04
Е	05
F	06
G	07
Н	08

I	09
J	10
K	11
L	12
M	13
N	14
0	15
P	16

Q	17
R	18
S	19
T	20
U	21
V	22
W	23
X	24

Since FC is F03 i

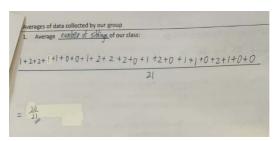
TH<sub>d</sub> is T08<sub>d</sub>

"A』 is "01』 "N』 is "14』

Then the digitalized data you should input is \$\ \^{\mathbb{G}}\$ 03080114 \, \mathbb{J}\$

Microsoft Form 有關姓氏 (Surname) 的數值換算方式

接著,學生需完成工作紙,鞏固分類數據與量化數據的分別。 最後,老師與學生說明離散數據(Discrete data)與連續數據 (Continuous data)的概念,並完成工作紙以作鞏固知識。



學生堂課



學生分組活動的情況

#### D. Categorical or Quantitative?

- Quantitative data measures an amount and can be ordered from smallest to largest.
- Categorical data specifies qualities and is not subject to the laws of arithmetic for example, it
  is meaningless to take "average" of a list of colors.

Note: Numbers can sometimes be categorical rather than quantitative.

E. For each piece of data below, circle whether it is Categorical or Quantitative data.

1.	Hair color	Categorical	/	Quantitative
2.	Age	Categorical	/	Quantitative
3.	Street Name	Categorical	/	Quantitative
4.	Length of tongue	Categorical	/	Quantitative
5.	Favorite teacher	Categorical	/	Quantitative
6.	Mobile phone number	Categorical	/	Quantitative

# 課堂工作紙樣本

#### 活動反思

從學生的問卷所得,95%學生滿意課堂活動;並認為課堂能提升他們的數據處理能力。不過,學生在計算平均數的時候較為費時,可以讓學生利用 Excel 幫助計算,讓課堂更有效率。

## 三. 活動內容 2 --- 續概率 (More about Probability)

## 活動簡介

多年前,政府統計處曾利用「隨機回應法」調查港人於內地 非婚生子女的數目,作為處理「敏感性調查」的方法。是次 的教學活動參考了「隨機回應法」,於校內設計「敏感性調 查」,讓學生明白該調查方法,同時亦應用了概率乘法定律 解決此問題。

是次活動要求中五學生調查部份中一學生在某一段時間內抄襲數學家課的百分比。

## 基本資料

涉及數學課題:續概率、統計的應用

課堂對象: 中五修讀單元一的學生

前備知識:概率乘法定律

需用課節:3節(每節40分鐘)

## 課堂設計(第1節)

老師先講解「隨機回應法」。然後,老師要求學生就敏感性問題設計調查方法。學生須於課堂討論,並把結果拍攝短片,講解設計的調查方法。是次短片為假期功課。



## 課堂設計(第2節)

老師收集各組片段後,向學生分析各組方法的利弊。

完成後,我們採納的調查方法如下:

- 利用密封的環保袋,放入3個高爾夫球和7個乒乓球。
   中一學生不用抽出球,只需隨機觸摸其中一球。
- 2. 若中一學生觸摸高爾夫球,他便回答問題「在 2023 年 2 月 1 日至 2023 年 3 月 31 日期間,你是否曾抄襲數學功課?」,學生只需於紙上寫上「是」或「否」。
- 3. 若中一學生觸摸乒乓球,他便回答問題「你的出生月份 是偶數(Even number)嗎?」,學生只需於紙上寫上「是」 或「否」。
- 4. 每次完成後,中五學生須把環保袋「搖勻」,確保中一

學生是隨機選取其中一球。

最後,我們選取約10名中五學生於早會時間到其中1班中一班進行調查。在收集中一學生的數據後,有學生發現高爾夫球和乒乓球的大小並不一樣。因此,中五學生做了200次抽球,並求出「在3個高爾夫球和7個乒乓球中,觸摸到高爾夫球」的實驗概率為0.43。







中一學生做調查的情況







學生找「抽1個高爾夫球實驗概率」的情況

#### 課堂設計(第3節)

老師先與學生重溫調查方法,並提供以下數據給學生。數據如下:

- 在環保袋中,觸摸到高爾夫球的實驗概率
- 被調查的中一學生於偶數月份生日的百分比
- 被調查的中一學生回答「是」的百分比

然後,中五學生分組討論及推算「在 2023 年 2 月 1 日至 2023 年 3 月 31 日期間,你是否曾抄襲數學功課?」的百分數。

經討論後,大部份學生懂得畫樹形圖(Tree diagram),推算以上問題的百分數。此外,老師利用 Microsoft form 向其餘中一級別詢問同樣的問題,以作為對照組(Control Group)。 老師經與學生討論後,發現利用以上的調查方法得出的百分比較對照組為高,數字亦較合理。最後,讓學生完成工作紙問題(利用樹形圖解決的概率問題)以鞏固知識。



學生於課堂討論的情況



學生完成堂課的情況

# 活動反思

由學生問卷所得,全部學生滿意課堂活動;並認為課堂能 提升他們的數據處理能力。 此外,是次活動涉及敏感問題,活動前宜與學校討論,避 免家長或學生有過大反應。

#### 四. 總結

從過往的教學經驗中,老師教授「數據處理」的課題時往往 因課時關係,便很快完成而忽略了相關的教學活動,這大大 削弱學生對「數據處理」的概念。此外,老師教授高中「續 概率」時,學生只能用紙筆計算,因此學生對此課題感到枯 燥乏味。

完成種籽計劃後,我們發現學生透過數學活動能加深對「數據處理」的概念,亦能提高他們對數學的興趣。此外,這些數學活動亦可以培養學生的解決問題、溝通及協作能力。

因此,本校會於下年度繼續推行以上2個教學活動。本校亦會推行不同數學活動,以加強學生的數學概念及提升學生的數學興趣。

# 參考資料

- [1] Introduction to Data Science. (2022)
  <a href="https://bootstrapworld.org/materials/fall2022/en-us/lessons/ds-intro/index.shtml?pathway=data-science">https://bootstrapworld.org/materials/fall2022/en-us/lessons/ds-intro/index.shtml?pathway=data-science</a>
- [2] 鄧進財。〈數學傳播 ---- 談統計的應用〉。
  https://web.math.sinica.edu.tw/math\_media/d33/3310.pdf

# 8. 三角形外心和垂心公式-你可曾見過、用過?

#### 鄭仕文

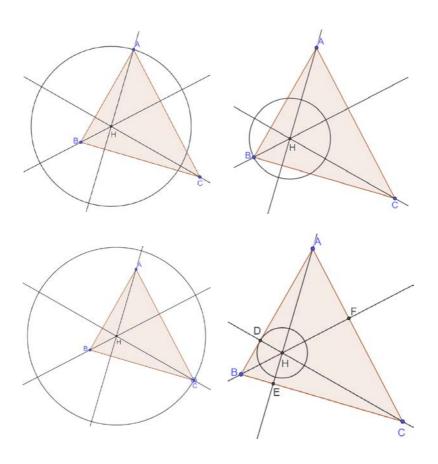
#### 教育局數學教育組

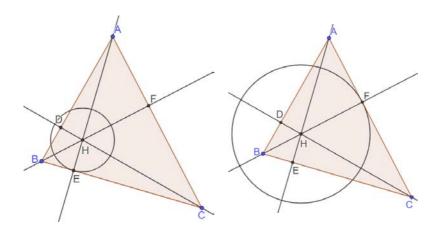
在 2022 年的中學文憑試數學科必修部分卷一,筆者(下稱「我」)曾見到部分學生使用公式計算三角形內心的座標後,不其然的想到三角形的其餘兩心(即外心和垂心)是否有相類近的公式?於是利用互聯網搜尋多遍,終於找到了這些公式。雖然我已於 5 月 29 日的講座中分享了這些資訊,但始終參與講座的同工們人數有限,未能跟所有同工分享,所以只好借機會再和大家分享一遍,希望有更多同工知道多些有關的「增潤」知識。

## 三角形外心

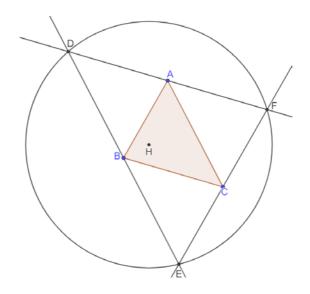
在開啟我們的三角形三心(形心的公式比較普遍,在此不談) 之旅前,大家可以先行想一想以下問題:對一個任意三角形, 不論是它的外心或內心,都有一個相對應的外接圓和內切 圓,(三角形的形心是沒有相對應的圓呢!)那麼,對一個 任意三角形的垂心,是否也有一個相對應的圓?

首先,如果我運用幾何軟件 GeoGebra 進行探究,會發現對 一個任意三角形,若以它的垂心作為圓心,不論以該圓心至 三角形的任一頂點或任一邊的距離作為半徑,都找不到一個 相對應的圓。

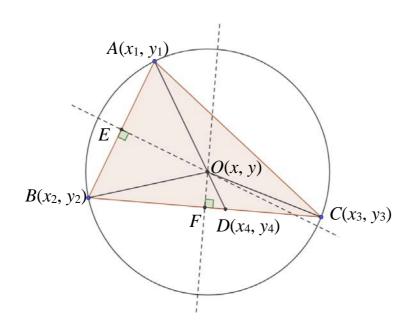




那麼,垂心是沒有相對應的圓?但我不太相信此結果,所以繼續努力尋找。最後,我終於找到了一個突破點:如果這個三角形的頂點  $A \times B$  和 C,是另一個三角形 DEF 三邊的中點,則  $AB // FE \times AC // DE \times BC // DF$ ,由此,不難證明  $\Delta DAB \cong \Delta BCE \cong \Delta AFC \cong \Delta CBA$ 。最後,點 H 既是  $\Delta ABC$  的 垂心,也是  $\Delta DEF$  的外心,即點 H 是有相對應的圓的,它對應的是三角形 DEF 的外接圓。



接下來,讓我們探索一下三角形外心的公式吧!



設  $A(x_1, y_1) \cdot B(x_2, y_2)$  及  $C(x_3, y_3)$  為三角形的頂點,其中 AB = c, BC = a 及  $CA = b \circ E$  和 F 分別為 AB 和 BC 的中點, O 是  $\Delta ABC$  的圓心。AO 與 BC 相交於點  $D(x_4, y_4)$ 。 OE 及 OF 分別是 AB 及 BC 的垂直平分線。

考慮  $\triangle ADB$  和  $\triangle ADC$ ,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\text{Area of } \Delta ABD}{\text{Area of } \Delta ADC} = \frac{AB \cdot AD \sin \angle BAD}{AC \cdot AD \sin \angle CAD} \dots (1)$$

由於  $\angle BOD = 2 \times \angle BAD$  及  $\angle BOD = 180^{\circ} - \angle AOB = 180^{\circ}$  $-2 \times \angle ACB = 180^{\circ} - 2C$ ,因此,  $\angle BAD = 90^{\circ} - C$ 。同樣地,  $\angle CAD = 90^{\circ} - B$ 。

把上述結果代入公式 (1) 中,我們有

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB\sin(90^{\circ} - C)}{AC\sin(90^{\circ} - B)}$$

$$= \frac{c\cos C}{b\cos B}$$

$$= \frac{\sin C \cdot \cos C}{\sin B \cdot \cos B}$$

$$= \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$$

 $\Rightarrow BD:DC = \sin 2C:\sin 2B$ 

利用內分點公式,若  $D = (x_4, y_4)$ ,則

$$x_4 = \frac{x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}$$
  $y_4 = \frac{y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}$ 

同時,利用簡單比例 
$$\frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD + DC} = \frac{\sin 2C}{\sin 2C + \sin 2B}$$

可得出

$$BD = \frac{(BD + DC)\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C} = \frac{a\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}$$

考慮 ΔAOB 和 ΔBOD

$$\frac{OD}{OA} = \frac{\text{Area of } \triangle OBD}{\text{Area of } \triangle OAB} = \frac{BD \cdot OF}{AB \cdot OE} = \frac{BD \cdot OB \cos \angle BAC}{AB \cdot OB \cos \angle BCA}$$

Since  $\angle BOC = 2 \times \angle BAC$  及 OB = OC (半徑)。因此,利用等腰三角形性質,我們有

$$\angle BOF = \angle COF = \frac{1}{2} \times \angle BOC = \angle BAC$$
, RP

$$OF = OB \cos \angle BOF = OB \cos \angle BAC$$

同樣地,我們也可以證明

$$OE = OB \cos \angle BOE = OB \cos \angle BCA$$
。由此得出

$$\frac{OD}{OA} = \frac{BD \cdot OF}{AB \cdot OE} = \frac{BD \cdot OB \cos \angle BAC}{AB \cdot OB \cos \angle BCA}$$

$$= \frac{BD\cos A}{c\cos C}$$

$$= \frac{a\sin 2C}{(\sin 2B + \sin 2C)} \cdot \frac{\cos A}{c\cos C}$$

$$= \frac{a}{c} \times \frac{\cos A \sin 2C}{\cos C(\sin 2B + \sin 2C)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A \sin 2C}{2\sin C\cos C(\sin 2B + \sin 2C)}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\sin 2B + \sin 2C}$$

再次運用內分點公式,若 O=(x,y),則

$$x = \frac{x_1 \sin 2A + x_4 (\sin 2B + \sin 2C)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

$$= \frac{x_1 \sin 2A + \left(\frac{x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}\right) (\sin 2B + \sin 2C)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

$$= \frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

及 
$$y = \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$
。所以,三角形的外心座標公式是

$$(x,y) = \left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}\right)$$
...(1)

行文至此,也得多謝<u>孔德偉</u>老師的提點。確實是三角形外心的公式還有另一個版本,那是利用坐標幾何及矩陣的概念計算出來的:

$$x = \frac{\left(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\right)\left(y_1 - y_3\right) - \left(x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2\right)\left(y_1 - y_2\right)}{2\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right) - 2\left(x_1 - x_3\right)\left(y_1 - y_2\right)}$$

及

$$y = \frac{\left(x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2\right)\left(x_1 - x_2\right) - \left(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\right)\left(x_1 - x_3\right)}{2\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right) - 2\left(x_1 - x_3\right)\left(y_1 - y_2\right)}$$

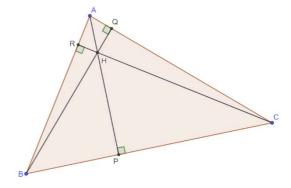
但我覺得這個版本難以牢記且容易出錯,所以今次不作討論。

## 三角形垂心

設  $\triangle ABC$  的頂點分別為  $A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_2)$ , $C(x_3, y_3)$ 。若 P = (x, y),利用簡易三角學,

$$BP = c \cos B$$

$$PC = b \cos C$$



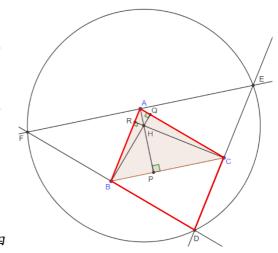
$$x = \frac{(b\cos C)x_2 + (c\cos B)x_3}{b\cos C + c\cos B} = \frac{(b\cos C)x_2 + (c\cos B)x_3}{a}$$

利用之前的結果, $A \times B$  及 C 分別為  $EF \times FD$  及 DE 的中點,其中  $AP \perp EF$ , $BQ \perp DF$ , $CR \perp DE$ ,利用中點定理,我們有 CA //DF, AB //ED, BC //FE,

$$BC = \frac{1}{2}EF$$

$$AB = \frac{1}{2}ED$$

$$CA = \frac{1}{2}DF$$



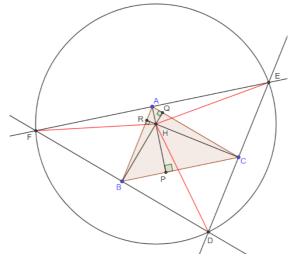
因此, CABD 是平行四 邊形 (一組對邊相等且 //)

$$A = \angle CAB = \angle CDB = \angle EDF$$
(平行四邊形對角)

$$\angle EHF = 2 \times \angle EDF$$
 (圓心角兩倍於圓周角)

由於  $\angle EHF = 2 \times \angle EHA$ ,因此  $\angle EHA = \angle EDF = A$ 

所以  $AH = EH \cos A = r \cos A$ , 其中 r = EH 是圓的半徑



同樣地, 
$$CH = DH \cos C = r \cos C$$

$$\angle CHP = 180^{\circ} - \angle CHE - \angle EHA = 180^{\circ} - C - A = B$$

$$\therefore HP = r \cos C \cos B \Rightarrow \frac{AH}{HP} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}$$

留意 
$$BP = c \cos B$$
 及  $CP = b \cos C$ 

$$\therefore BC = a = BP + PC = c \cos B + b \cos C$$

若 
$$P=(m,n)$$
,則

$$m = \frac{x_2(b\cos C) + x_3(C\cos B)}{b\cos C + C\cos B} = \frac{x_2b\cos C + x_3C\cos B}{a}$$

$$n = \frac{y_2(b\cos C) + y_3(C\cos B)}{b\cos C + C\cos B} = \frac{y_2b\cos C + y_3C\cos B}{a}$$

$$若$$
  $H=(x, y)$ ,則

$$x = \frac{\left(\frac{x_2 b \cos C + x_3 c \cos B}{a}\right) (\cos A) + x_1 \cos B \cos C}{\cos A + \cos B \cos C}$$
$$= \frac{x_1 a \cos B \cos C + x_2 b \cos A \cos C + x_3 c \cos A \cos B}{a \cos A + a \cos B \cos C}$$

若把分子及分母同時除以  $\cos A \cos B \cos C$ , 我們有

$$x = \frac{\frac{x_1 a}{\cos A} + \frac{x_2 b}{\cos B} + \frac{x_3 c}{\cos C}}{\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C}}$$

 $\ddot{A}$  R 是  $\Delta ABC$  的外接圓半徑,則根據正弦定理,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \circ \text{ fight}$$

$$\frac{x_1 a}{\cos A} = \frac{2x_1 R \sin A}{\cos A} = 2x_1 R \tan A$$

$$\frac{x_2 b}{\cos B} = \frac{2x_2 R \sin B}{\cos B} = 2x_2 R \tan B$$

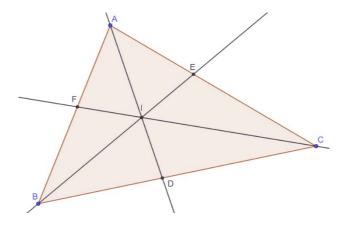
$$\frac{x_3 c}{\cos C} = \frac{2x_3 R \sin C}{\cos C} = 2x_3 R \tan C$$

然後對消分子及分母的公因子 2R 得到

$$H(x, y) = \left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}\right)$$
...(2)

#### 三角形內心

設  $\angle A$  的角平分線通過 BC 於點 D,根據角平分線定理,



## 我們有

DB:DC=c:b

因此利用內分點公式:  $D = \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C$  °

同樣地,我們可以寫出點 E 和 F 的對應公式。

 $\triangle ABC$  的內心 I 則是角平分線  $AD \setminus BE$  和 CF 的交點,亦即點  $A \setminus B$  和 C 的加權平均數。由於 I 是在線段 AD 上,

$$I=(1-t)A+tD=(1-t)A+\frac{tb}{b+c}B+\frac{tc}{b+c}C\text{ , 其中 }t\in[0,1]$$
 的任意數。

我們也可以利用I是在線段BE上及線段CF上寫出I的公式,不難發現當互換 $A \setminus B \setminus C$ 的位置時,I的對稱性

質。由此推斷出
$$t = \frac{b+c}{a+b+c}$$
,所以
$$I = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C$$
,即當
$$A = (x_1, y_1) , B = (x_2, y_2) , C = (x_3, y_3) ,$$

$$AB = c$$
,  $BC = a$ ,  $AC = b$   $\oplus$ ,

$$I = (x, y) = \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right) \dots (3)$$

縱觀上述三條公式,除卻最後在 2022 年及 2023 年的中學文憑試 (HKDSE)數學科必修部分卷一第 19 題都見到與這些三角形的心相關的題目,例如:2023 年第 19 題分別問到外心、重心和內心:

點 P 及點 Q 的坐標分別為 (50,0) 及 (32,t) ,其中 t> 0 。將原點記為 O 。設 R 為一點使得 OQ 為  $\Delta OPR$  的中線。假定 G 及 H 分別為 $\Delta OPR$  的外心及垂心。

- (a) 以t表G及H的坐標。
- (b) 設 S 為 OP 上的一點使得 QS 垂直於 OP。已知  $\angle PQS = \angle POQ$ 。
  - (i) 藉考慮  $tan \angle PQS$  , 證明 t = 24。
  - (ii)  $O \setminus G$  與 Q 是否共線?試解釋你的答案。
  - (iii) 將  $\Delta OPQ$  的內心記為 I 。求 $\Delta GHR$  的面積與  $\Delta IPO$  的面積之比。

首先,(a) 部問到外心及垂心的坐標,這裡本可以分別利用公式(1)及(2),並運用三角公式(當中包括使用正弦的二倍角公式)計算出  $\sin(2\angle OPR)$ 、  $\sin(2\angle POR)$ 、  $\sin(2\angle ROP)$ ,但過程非常複雜,到後來我只好放棄。之後又想起三角形的外心坐標等如它的三個中點所約成的三角形的垂心坐標,所以我直接用公式(2)找出 G和 H 的坐標。如圖一,利用正切函數的複角公式可以求得

$$\tan \angle QMN = \frac{-25t}{126 - t^2} \quad \text{tan } \angle MQN = \frac{t}{7} \mathcal{R}$$

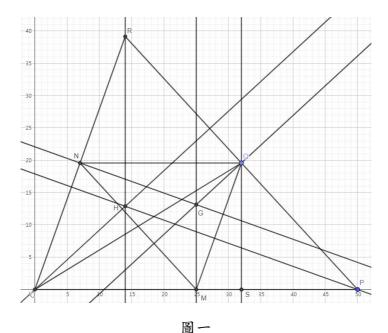
 $\tan \angle MNQ = \frac{t}{18}$ ,由此計出 G 的 y 坐標是

$$y = \frac{0\left(\frac{-25t}{126-t^2}\right) + t\left(\frac{t}{7}\right) + t\left(\frac{t}{18}\right)}{\frac{-25t}{126-t^2} + \frac{t}{7} + \frac{t}{18}} = \frac{t^2 - 126}{t} , \text{ mak is } 1222 ;$$

G的x坐標為25(如果同樣運用垂心的公式計算的話,

$$x = \frac{25\left(\frac{-25t}{126-t^2}\right) + 32\left(\frac{t}{7}\right) + 7\left(\frac{t}{18}\right)}{\frac{-25t}{126-t^2} + \frac{t}{7} + \frac{t}{18}} = 25) \quad , \text{ IT IX}$$

$$G = (x, y) = \left(25, \frac{t^2 - 126}{t}\right) \circ$$



-

另一方面,同樣運用垂心的公式,可求得 H 的坐標:

$$x = \frac{14\left(\frac{-25t}{126-t^2}\right) + 0\left(\frac{t}{7}\right) + 50\left(\frac{t}{18}\right)}{\frac{-25t}{126-t^2} + \frac{t}{7} + \frac{t}{18}} = 14$$

$$y = \frac{2t\left(\frac{-25t}{126-t^2}\right) + 0\left(\frac{t}{7}\right) + 0\left(\frac{t}{18}\right)}{\frac{-25t}{126-t^2} + \frac{t}{7} + \frac{t}{18}} = \frac{252}{t}, \text{ Pff } \text{ IX}$$

$$H = (x, y) = \left(14, \frac{252}{t}\right) \circ$$

圖二

至於(b)(iii) 部題目牽涉的內心坐標,如圖二所示,由於已知t=24,所以R的坐標也確定了。這裡並不難算出OP=50、OR=50及PR=60。因此,利用公式(3) 便能找到I的坐標:

$$x = \frac{(60)(0) + (50)(50) + (50)(14)}{60 + 50 + 50} = 20$$

$$y = \frac{(60)(0) + (50)(0) + (50)(48)}{60 + 50 + 50} = 15$$

所以 I = (20, 15) 。

其餘的步驟不在此多談了。

## 用後感

感覺上,使用這些公式並沒有節省多少時間和功夫,尤其是在考試時。但是對這些公式有點兒認識也不失為一件樂事。對比三角形四心的坐標公式,形心和內心的公式的確比較易用,因為在計算相關的數學題時,其他需要用到的數值已計算出來或很容易計算出來。相對而言,外心和垂心的公式則因牽涉到三角函數的二倍角公式或複角公式,如果只知道三角形三個頂點的坐標,便需要花上不少時間計算這些角的三角比,再運用到公式中,感覺上較難使用。(相較之下,如果利用外心的坐標幾何公式,只要知道三角形三個頂點的坐

標,便很容易計算出外心的坐標。但正如前文所說,該公式 比較複雜,容易記錯。)所以一般認為,在考試時,還是利 用傳統的方法(即直線方程)去計算外心和垂心比較好掌控 一切。

### 9. 統計與機器學習

#### 陳秀騰

### 教育局數學教育組

近十年,筆者相信部分讀者應聽聞大數據、機器學習、數據科學、數據素養、軟件 R、軟件 Power BI 、區塊鏈、雲端和人工智能等新的詞彙。讀者們有幾認識這些事物呢? 教育局數學教育組於這幾年間分別舉辦數個知識增益課程和工作坊,邀請一些大學教授或這方面的專家作演講嘉賓,深入淺出地向中學數學教師介紹相關知識,其背後所運用的數學原理。筆者期望參與的教師們能把這些內容帶回課堂,讓同學們有基本認知,為他們迎接新時代作準備。筆者有幸參與部分研討會,並在預備這些研討會的筆記時,製作了數個示例。筆者想透過本文把部分內容與讀者們交流,期望當中有些教材能幫助教師向同學們講解相關知識,提升同學們學習數學的興趣,並明白到數學的重要性。這些新的科學技術將會全面改變個人的活動、選擇、商業的運作模式等。

筆者想從培養學生「數據素養」這部分先開始。根據學者 (Carretero, Vuorikari, & Punie (2017))的定義,數據素養分 為三個程度,由基本的瀏覽、搜尋和篩選數據、資訊及數碼 內容,到中等的評估數據資訊與數字內容,以及進階的管理 數據資訊與數字內容能力。在國外,克勞爾(Krall)從學習者 的角度指出,具備數據素養的學生能夠提出有意義的問題, 找到相關的數據用以解釋問題,能夠鑑別有用的數據資源並 以合理的方式收集和分析數據。簡言之,「數據素養」的意 思是運用數據與人溝通的能力,目前已是商業世界必備的素 質。

舉例來說,一些金融機構遇到壞帳問題時,當部門同事具備搜集、分析及理解簡單數據的能力之後,就能迅速找到盲點,並有效運用數據可視化(data visualisation)與說故事(data storytelling)的溝通方法解說問題及提出解決辦法,為公司創造更多價值。又例如在銷售投資產品方面,銷售部門的同事可以透過分析數據,預測哪些產品將較受客戶歡迎,然後集中發展這些產品,並把它們推薦給客戶,以衍生更多商機。

「數據素養」的重視離不開大數據的興起。大數據(Big Data) 是指隨著網際網絡與資訊科技 (IT)技術發達而產生的龐大資料、架構。資料的形式也很多元,有文字、動畫和影像等,特徵就是 3「V」,即 Volume (大容量)、Variety (多樣性)和 Velocity (即時性),這些特徵決定了大數據的特殊性。一般來說,對於龐大而未經整理的資訊,我們並不能理解,我們需要學懂一套有系統的處理方式才能從中找出有用的資訊。

傳統統計分析通常採用歸納法,即從樣本中歸納出總體特徵,而大數據通常採用演繹法,即根據大數據中隱含的規律進行預測和模型建構。在大數據時代,一般資訊可量化、可記錄,降低處理數據時主觀假設的影響,而完全依靠數據間的相關性來闡述。

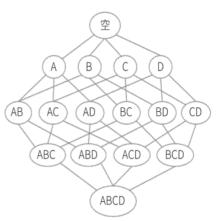
舉例來說,若我們想知道每日攝取綠茶的數量和身體血壓值的相互關係。傳統的做法是招募測試者,跟著把他們分成「每天飲綠茶組」和「每天不飲綠茶組」,並長期追蹤他們的血壓值,做下去就會發現因外部因素而出現的變數。有些人因為遺傳,肥胖,飲食偏濃味,工作時間長或個人較為緊張,均會導致血壓值偏高。如果要減低這些變數的影響,就要盡可能找更多的受試者,但現實狀況往往是預算不足,較難做到。若我們知道所有工廠出產的綠茶數量、所有批發商的綠茶銷售量、所有顧客於實體店或線上購買綠茶的數量,也能獲取那些顧客測量血壓的數值,那麼只要分析這些大數據,我們幾乎可以正確掌握綠茶的攝取量和血壓數值之間的相互關係。

透過個人的網絡活動紀錄、信用卡消費紀錄、醫院診斷紀錄, 收集得來的數據可廣泛地運用各個層面,如:公司針對目標 客群發放廣告,工廠要決定生產哪種產品的數量、消費者的 消費模式、公司該向顧客推薦甚麼商品等等。接下來我會舉 兩個與機器學習(Machine Learning)有關的示例。「機器 學習」 是人工智能的一個子集,著重「算法」和「統計模 型」, 旨在從「數據」中學習,並根據「該數據」做出預測或決策。

第一個是有關分析商品之間的關係的「關聯分析」,店主想從顧客的購物資訊找出購物模式,並推算同時購買概率高的產品。有一位辦館的店主想提高銷售業績,他可從堆積如山的收據中整理出數據,就能得出有用的信息。設該店只有四

茶,C.汽水,D.朱古力,而累積一段時間後的收據有1000 張。我們先求出這四件商品之間的所有可能搭配組合,總共有24-1=15 種。其組合情況如右圖所示:

種商品,分別是 A.餅乾, B.



圖片來源:《數商》

進行分析之前,我們先設定一個支援門檻(Support Threshold)作為篩選,判斷何者是熱銷產品,如:計次超過400,或頻率大於40%。

商品	計次	頻率
(A)	386	38.6%
(B)	498	49.8%
(C)	527	52.7%
(D)	603	60.3%

店主發現汽水和朱古力比較熱銷,但它們之間未必有關聯性。兩個商品的組合情況又如何呢?我們可同樣先設定一個參數作篩選,如:計次超過250,或頻率大於25%,從而判斷何者是適合熱銷兩項組合的商品。

商品	計次	頻率
(A , B)	183	18.3%
(A , C)	195	19.5%
(A , D)	216	21.6%
(B , C)	237	23.7%
(B , D)	248	24.8%
(C , D)	299	29.9%

三個商品的熱銷組合也可以用相同的方式找出來,不再詳述。這個方法只是統計結果,數數並作簡單計算。

從上表得知,汽水與朱古力這個組合較熱銷。除了這個詳列 每項的方式並作比較外,我們也可以運用條件概率找出買汽 水的條件下,同時買另外三種商品組合各自的概率:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

$$P(A|C) = \frac{195}{527} = 0.37$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$P(B|C) = \frac{237}{527} = 0.45$$

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

$$P(D|C) = \frac{330}{527} = 0.63$$

從以上結果所見,我們可以對買汽水的顧客,建議他買朱古力,會有較大機會成功。

讀者可能會發現,現在的事例假設辦館只有 4 種商品,與現實不符。若商品的種類增加,有上千、上萬種的話,哪有多少個組合呢?即使運用電腦幫忙,計算量亦會十分大。於1993 年數據科學家 Rajesh Agrawal 設計一套 Apriori 演算法,可有效地減少計算量。其原理為:如果某個集合{C,D}是頻繁的,其子集{C} {D}也一定是頻繁的。反過來說,若一個集合{A,B}是非頻繁的,那麼它的所有超集合{A,B,C}{A,B,D} {A,B,C,D}也是非頻繁的。運用這個算法,計算量因而大大地減少了。

我們亦可透過以下的方法找出較受歡迎的商品組合。考慮買了 A.餅乾和 B.茶的情況,並製作下表以作關聯分析。

	買了B的	沒買B的	總計(人)
	人數	人數	
買了A的人數	183	203	386
沒買A的人數	315	299	614
總計(人)	498	502	1000

在上表的數據中,餅乾出現 386 次,茶出現 498 次。我們計算 3 項指標。

指標1:支持度(Support),就是一件商品或一個商品組,在整個數據集中出現的次數占總商品次數的比例,即:(A)的支持度為 0.386; (B)的支持度為 0.498; (A, B)的支持度為 0.183。數學公式以概率來表示

$$P(A) = 0.386$$
;  $P(B) = 0.498$ ;  $P(A \cap B) = 0.183$ 

指標 2: 在關聯分析中,同時購買其他商品的概率稱為「可信度(Confidence),我們用可信度來衡量一種關聯性的有效程度,即在已確定買了餅乾的訂單中,也選擇茶的訂單比例,數學公式以條件概率表示之

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{183}{386} = 0.47$$

同一原理,在已確定買了茶的訂單中,也選擇餅乾的訂單比例,數學公式以條件概率表示之

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{183}{498} = 0.37$$

先決條件不同,可信度也會不同。

指標 3: 增益(Lift),即商品 A和商品 B 同時出現的頻率, 與各項目各自出現的頻率的比例,以數學公式表示:

$$Lift(A,B) = \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)P(A)}$$

Lift(A,B)=
$$\frac{0.183}{0.386 \times 0.498} = 0.95$$

有些統計學家用以下準則作判斷:

Lift < 0.8,表示 A 的出現與 B 的出現是負相關。

Lift > 1.2,表示 A 的出現與 B 的出現是正相關。

介於 0.8 至 1.2 之間,表示 A 與 B 為完全獨立個體無相關。

根據這個準則購買餅乾的顧客與購買茶的顧客為完全獨立個體無相關。

某商店的店主根據以上的方法計算三項指標,得到如下的結果:

交易	支持度
茶	7.77%
汽水	17.44%
草莓	3.32%
男士化妝品	0.46%

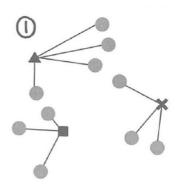
交易	支持度	可信度	增益
茶 → 汽水	1.38 %	17.8 %	1.0
茶 → 草莓	0.08%	1.0%	0.3
茶 → 男士化妝品	0.09%	1.2%	2.6

店主發現購買男士化妝品的人次不多,但與購買茶的顧客 正相關,因此可將男士化妝品和茶擺放在同一架上,刺激 消費者同時添購兩項商品。 第二個示例是有關「集群分析」,在商業領域可將商品和顧客分類,得到對行銷有用的資訊,如市場行銷領域,對不同消費者進行客戶分類,進而做到精準行銷。K-means(平均)法就是代表性的方法。一開始先決定要分成幾個群集,再將個體分類。假設現在有10個機種的相機,我們想向不同種類的顧客(入門者、高階業餘人士、專業人士)作分類展示以增加銷量,可以怎樣作呢?首先,公司可以向試用者調查、就著各機種的價格(Price)、設計(Design)、畫質(Quality)、機能性(Functionality)攜帶方便性(Portability)這些項目以5級評價。揀選當中兩個項目價格(Price)和機能性(Functionality)作比較,根據某位受訪者的評價,我們可製作以下表格:

變數	X價格	Y機能性
機種 A	2	5
機種 B	3	5
機種C	1	4
機種 D	1	2
機種E	3	3
機種F	5	4
機種G	4	3
機種H	4	2

變數	X價格	Y機能性
機種I	3	2
機種J	2	1

把這些數據製成散點圖。根據圖像的顯示,我們假設分成 3 群。首先隨機配置基點( $\triangle$ , $\blacksquare$ , $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ )。然後計算各個機種到基點的距離(即直線距離公式)= $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ),將離基點近的機種分類為同一群集。將每筆資料分類判給距離最近的那個基點。



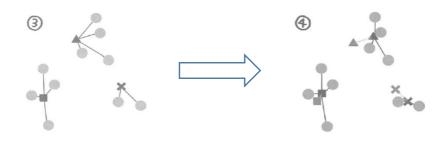
圖片來源:《統計學圖鑑》



計算各集群的**重心\***,以算出的 重心為新基點(▲,■,**★**)。計 算各個個體到新基點的距離, 再次分群。

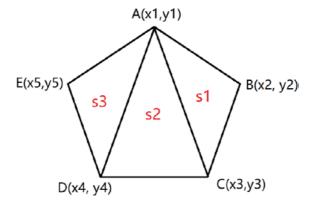
圖片來源: 《統計學圖鑑》

再次計算群集重心,如果計算後分類結果不變,就結束分群 作業。若分類結果改變,就重複以上各步驟直至分類結果不 變。



圖片來源:《統計學圖鑑》

[\* 註: 下圖所示為一個五邊形,把其分成3個三角形,S<sub>1</sub>、S<sub>2</sub>和S<sub>3</sub>分別表示各個三角形的面積)



它的重心公式:

$$x = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)s_1 + (x_1 + x_3 + x_4)s_2 + (x_1 + x_4 + x_5)s_3}{3(s_1 + s_2 + s_3)}$$

$$y = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)s_1 + (y_1 + y_3 + y_4)s_2 + (y_1 + y_4 + y_5)s_3}{3(s_1 + s_2 + s_3)}$$

等同求出3個三角形的重心,再根據三角形的面積去均分權重。同一道理,n 邊形重心公式為

$$\chi = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} s_i * (\bigcup s_i$$
為面積的三個點橫坐標之和) 3  $\sum_{i=1}^{n-2} s_i$ 

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} s_{i}*(以 s_{i}$$
為面積的三個點縱坐標之和)
$$3 \sum_{i=1}^{n-2} s_{i}$$

筆者只初步介紹了2維度分三群的 K-mean 演算法的數學原理,可是於生活上的應用很多時都是高維度的問題,難以用視覺方法觀察出 K 值,須借助電腦軟件的幫忙。

以上所提及的兩個示例簡化了現實情景,但背後的數學原理於中學數學課程中也有提到,一般的同學們應能理解, 筆者期望能成為教師教學上的補充材料。

## 參考資料

- [1] 涂子沛 (2021)。《數商:向阿里巴巴前副總裁學習數 據時代的生存商數》台北:時報文化出版企業。
- [2] 吳作樂 吳秉翰 (2020)。《圖解統計與大數據》台 北:五南圖書出版股份有限公司。
- [3] 栗原伸一、丸山敦史(2019)。《統計學圖鑑》台北: 楓葉社文化事業有限公司。

### 10. LaTeX: 有效提升數學教學效能的工具

蘇志峰

### 沙田蘇浙公學

#### 前言

「LaTeX」對一些數學老師來說並不陌生,這是我們在攻讀 大學數學時期曾使用的一個工具,而大多數人對 LaTeX 的 印象,可能就是一個能「寫出漂亮工式」的工具。事實上, 作為一種與電腦溝通的語言,LaTeX 的功能實在不至於此。 本文將簡介如何將 LaTeX 應用於製作數學科的教學材料 上,並分享一些使用 LaTeX 與人工智能工具溝通的例子。

### 其麽是 LaTeX

LaTeX 是一種基於 TEX 的排版系統,由美國電腦科學家萊斯利蘭伯特 (Leslie Lamport) 在 20 世紀 80 年代初期開發。有別於今天我們使用的 Microsoft word / Google document 等文字編緝系統,LaTeX 並非「所見即所得」 (What you see is what you get),而是遵循「呈現與內容分離」的設計理念,以便作者可以專注其編寫的內容。LaTeX 以

一種類似 HTML 的模式,是用來處理排版和彩現的標記式語言 $(Markup\ language)$ 。 $^1$ 

## LaTeX 的套件(package)

LaTeX 的一大優勢是有很多強大的套件(package),免費供大家使用。我曾於另一篇文章<sup>2</sup>中提及使用套件「polynom」幫助老師及學生計算多項式長除的編碼,與及設計一些簡單function 如 coefficient, number,及 simFrac 等,註 2 中有該文章的位置,有興趣的老師們可在此查閱。

LaTeX 另一個強大的套件,可以算是用作繪圖的 pgfplot 與及能寫下條件判斷式的 ifthen,再加上可以使用 forloop, 讓老師們可以按學生的需要,設計更多的題目讓學生練習。 善用 LaTeX 的語法,亦可以同時製作答案,讓同學能獲得

-

https://gccce2022.ilst.nthu.edu.tw/wp-content/uploads/2022/08/GCCCE-2022\_教師論壇論文集\_0811.pdf

https://zh.wikipedia.org/zh-hk/LaTeX

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Implementation of Deliberate and Purposeful Practice in Mathematics Education by LaTeX, P.80

即時回饋,促進學生更有效進行自主學習。而由於題目和答案皆由老師設計,教材更切合學生需要。

### 使用 pgfplot 及 forloop 設計課業

相信不少同工都有相似的經歷:當我們教到一些課題,如十字相乘、一元一次不等式的時候,有些能力稍弱,但十分勤力的同學希望能多做一些練習,但奈何書本中的練習未必能讓他們覺得「足夠」。這個時候,其實可運用 LaTeX 製作一系列的題目予學生。以下是其中一個簡單的例子:

1. Factorize  $20x^2 + 9x + 1$ 

**Solution:**  $20x^2 + 9x + 1 = (4x + 1)(5x + 1)$ 

2. Factorize  $12x^2 - 31x + 20$ 

**Solution:**  $12x^2 - 31x + 20 = (4x - 5)(3x - 4)$ 

3. Factorize  $5x^2 + 3x - 2$ 

**Solution:**  $5x^2 + 3x - 2 = (5x - 2)(x + 1)$ 

4. Factorize  $2x^2 - 7x + 3$ 

**Solution:**  $2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$ 

以上的題目是使用 forloop 製作,由一段程式編寫出來的。當中有編程的部分,亦有以數學為主的部分。首先,題目的設計是由右方開始,我先定義四個數字,a,b,c,d,這四個數字則是答案所顯示的 (ax+b)(cx+d),將之拆開就成了題目 $acx^2 + (ad+bc)x + bd$ 。所以,題目中的數字其實是由答案的四個數字做出來。

套件「pgfplot」 中有一個叫 pgfmathrandominteger 的 function,可以在某一個範圍中抽出一個數字。我們可以按學生的需要,抽出不同範圍的數字。在以上的範例中,我所抽出的數字如下:

Line	Command
1	$\pgfmathrandominteger\{\a\}\{1\}\{5\}$
2	$\parbox{$\backslash$pgfmathrandominteger} $$ \parbox{$\backslash$b} {-5} {5} $$$
3	$\parbox{$\langle c \rangle_{1}_{5}$}$
4	$\pgfmathrandominteger\{\d\}\{-5\}\{5\}$

而「\pgfmathrandominteger{\a}{1}{5}」這句的意思就是在 1-5 中抽出一個整數出來,放進 \a 之中。不過,如果按以上的情況,有機會 b 或 d 會抽出 0,那麼題目就會變成  $2x^2+x$  之類的數式,這個實在不是我們設計的本意。有見及此,我使用 ifthenelse 來避免這個情況:如果 b 或 d 是 0 ,就在 1-10 中抽出另一個數來。

Line	Command
5	$\label{lem:limit} $$ \left( b=0 \right)_{\pgfmathrandominteger(b)_{1}_{10}_{1}_{10}_{10}_{10}_{10}_{10}_{$
6	$\label{lem:limit} $$ \left(d=0\right)_{\operatorname{mathrandominteger}}_{1}_{1}_{10}_{1}. $$$

同一時間,(ax + b)(cx + d) 當中,我們也希望 a,b,c,d 這四個數字中,a,b 和 c,d 應該是互質(relatively prime)的,故此,我們需要多寫幾句:

Line	Command
7	$\label{eq:GCD} $$ \GCD_{a}_{\b}_{\ABGCD} $$$
8	$\label{eq:condition} $$ \GCD_{c}_{c}_{d}_{CDGCD}$$$
9	lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:

Line	Command
10	$\label{lem:lem:lem:cob} $$ \pgfmathtruncatemacro\b{\b/\ABGCD}$$
11	$\label{lem:lem:condition} $$ \operatorname{\colored}_{\c}(\c) = \operatorname{\colored}_{\$
12	lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:lem:

當中的 \GCD 是套件 「calculator」 中的 function,以便 我們能找出數字中的最大公因數。

當隨機抽取數字的工作完成,就落到編寫題目的部分。當中的語法亦很簡單,就是使用\foreach,這是 LaTeX 語法中forloop 的寫法:

Line	Command
1	\foreach \i in {1,,20}
2	{
3	%按剛才的 line 1 - 12 設計 <i>a, b, c, d</i>

Line	Command
4	\question Factorize \$\leadingCoefficient{\a*\c}
	$x^2 \setminus \{a*\d+\b*\c\}x \setminus \{b*\d\} $
5	\begin{solutionordottedlines}[\stretch{1}]
6	
	$\label{leadingCoefficient} $\ \ x^2 \subset \{\ a*\ + \ a*\$
	$\b^*\c\}x\Number\{\b^*\d$
	$= (\langle leadingCoefficient\{ \a \} x \rangle \{ b \}$
	$(\label{leadingCoefficient} \c) x\Number{\d})$
7	\end{solutionordottedlines}
8	}

程式碼當中的「\foreach\i in  $\{1,...,20\}$ 」就是將之後 $\{\}$ 中第 2 行至第 8 行中的東西做 20 次,而題目中的「leadingCoefficient」、「coefficient」和「Number」則是一些自定的 function,主要是使用 ifthen 來處理一些我們寫數學式的習慣,例如將  $1x^2+-5x+4$  寫成  $x^2-5x+4$ 。

而由於我在設定「leadingCoefficient」等 function 時使用了 pgfmathtruncatemacro 的 指 令 , 當 我 輸 入 \leadingCoefficient{\a\*\c} 的時候,pgfmathtruncatemacro 就 自動會將之相乘,得出我所期望的結果。這樣的設計讓我們 更容易設定不同的題目,而不需每一個步驟均要作另外的計算。

不過當我製作更多題目時,發現了一些問題。雖然 b 和 d 已設定為非零的數字,但 ad+bc 仍有機會是 0 ,結果會出現  $x^2+0x-4$  等情況(而在這個況,題目應該為  $x^2-4$ )。為解決問題,我在題目設定中先計算 ad+bc ,然後加多一句 ifthen:

 $\protect\pro$ 

 $\label{leadingCoefficient} $$\operatorname{\cox}=0}{}$ 

 ${\operatorname{\coefficient}} x}\Number{\b*\d}$ 

以確保奇怪的情況不會出現。

我已將整段程式碼上載至 overleaf.com,有興趣的同工可參考此網址: https://www.overleaf.com/read/gzdfwdnnshdh

# LaTeX 作為與 A.I. 溝通的工具

另一個使用 LaTeX 的例子,則是用於與 A.I. 的溝通。我於上一個學年與聖公會李福慶中學(亦是教育局資訊科技教育卓越中心(CoE)成員之一)的資訊科技主任陳俊銘老師辦了一場在數學科使用 LaTeX 的工作坊,在預備的過程中,陳老師提議,我們可以嘗試利用 LaTeX 輸入一些數學的問題與 A.I. 溝通。

為了進行測試,我們使用了一些平常的工作紙,將當中的 LaTeX 編碼輸入當時的 Poe,得出的結果有些驚喜。

### 以下是當時我輸入的題目:

The following table shows the number of cakes sold each day in a shop.

Number of cakes sold	11	12	13	14	15
Frequency	20	45	83	39	13

Find the mean of the number of cakes sold each day.



#### 這是 Poe 的回應:

To find the mean of the number of cakes sold each day, we need to calculate the sum of all the values and divide by the total number of values. However, since we are given the frequency of each value instead of the actual values, we need to first find the sum of the values using the frequency.

```
The sum of the values can be found as follows:
\begin{align*}
\text{Sum of values} &= (11\times 20) + (12\times 45) + (13\times 83) +
(14\times 39) + (15\times 13) \
&= 220 + 540 + 1079 + 546 + 195 \
&= 2580
\end{align*}
The total number of values is the sum of the frequencies:
\begin{align*}
\text{Total number of values} \&= 20 + 45 + 83 + 39 + 13 \
&= 200
\end{align*}
Therefore, the mean of the number of cakes sold each day is:
\begin{align*}
\text{Mean} &= \frac{\text{Sum of values}}{\text{Total number of values}} \
&= \frac{2580}{200} \
&= 12.9
\end{align*}
```

Therefore, the mean number of cakes sold each day is \$12.9\$.

令人感到驚喜的是,當我們使用 LaTeX 詢問時,Poe 也是同樣使用 LaTeX 作回應,如果我們將他的回應利用 LaTeX 進行排版,出來的結果如下:

To find the mean of the number of cakes sold each day, we need to calculate the sum of all the values and divide by the total number of values. However, since we are given the frequency of each value instead of the actual values, we need to first find the sum of the values using the frequency.

The sum of the values can be found as follows:

Sum of values = 
$$(11 \times 20) + (12 \times 45) + (13 \times 83) + (14 \times 39) + (15 \times 13)$$
  
=  $220 + 540 + 1079 + 546 + 195$   
=  $2580$ 

The total number of values is the sum of the frequencies:

Total number of values = 
$$20 + 45 + 83 + 39 + 13$$
  
=  $200$ 

Therefore, the mean of the number of cakes sold each day is:

$$\begin{aligned} \text{Mean} &= \frac{\text{Sum of values}}{\text{Total number of values}} \\ &= \frac{2580}{200} \\ &= 12.9 \end{aligned}$$

Therefore, the mean number of cakes sold each day is 12.9.

整個感覺就像是 LaTeX 能將數學變成 A.I. 能聽得懂的語言,然後 A.I. 同樣的使用 LaTeX 的語言告訴你他的想法。LaTeX 在當中成為了人與 A.I. 的翻譯。

### 除了一些表格外,我亦嘗試輸入一些 Matrix 的問題:



#### ChatGPT >

Let \$M\$ be a \$3\times3\$ real matrix such that \$M^T=-M\$, where \$M^T\$ is the transpose of \$M\$. Prove that \$IM|=0\$.

Since  $M^T = -M$ , we have that:

 $\$ \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^3 \det(M) = -\det(M)$ 

On the other hand, since  $\det(M^T) = \det(M)$ , we have that:

\$\$\det(M) = -\det(M)\$\$

which implies that det(M) = 0. Therefore, we have proved that M=0.



#### ChatGPT >

Let \$A=\begin{pmatrix}-1&a&b\-a&-1&-8\-b&8&-1\end{pmatrix}\\$, where \$a\$ and \$b\$ are real numbers. Denote the \$3\time3\$ identity matrix by \$I\$. Using the above result, prove that \$IA+II=0\$.

To prove that |A+I| = 0, we need to show that  $\det(A+I) = 0$ . We have:  $\frac{1}{4}$ 

A+I &= \begin{pmatrix}-1&a&b\-a&-1&-8\-b&8&-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\0&1&0\0&0&1\end{pmatrix} \

&= \begin{pmatrix}0&a&b\-a&0&-8\-b&8&0\end{pmatrix} \end{align\*}

Let  $M = \left(\frac{3.8}{0.4}\right).$  Then we have:

\begin{align\*}

 $M^T = \left[ p_a - b_a 0 - 8 \right]$ 

 $&= -\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&-8\\-b&8&0\\end{pmatrix} \$ 

&=-M

\end{align\*}

Therefore, M satisfies the condition that  $M^T = -M$ . By the result proved in the previous question, we have det(M) = 0.

Since  $\det(A+I) = \det(M)$ , we have  $\det(A+I) = 0$ . Therefore, we have proved that |A+I| = 0.

# 「翻譯出來」的題目和回答是:

- (a) Let M be a  $3 \times 3$  real matrix such that  $M^T = -M$ , where  $M^T$  is the transpose of M. Prove that |M| = 0.
- (b) Let  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ -a & -1 & -8 \\ -b & 8 & -1 \end{pmatrix}$ , where a and b are real numbers. Denote the 3 identity matrix by
  - (i) Using (a), or otherwise, prove that |A + I| = 0.
  - (ii) Someone claims that  $A^3 + I$  is a singular matrix. Do you agree? Explain your answer.

#### 而答案則是:

Since 
$$M^T=-M$$
, we have that: 
$$\det(M^T)=\det(-M)=(-1)^3\det(M)=-\det(M)$$

On the other hand, since  $det(M^T) = det(M)$ , we have that:

$$\det(M) = -\det(M)$$

which implies that det(M) = 0. Therefore, we have proved that |M| = 0.

To prove that |A + I| = 0, we need to show that det(A + I) = 0. We have:

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ -a & -1 & -8 \\ -b & 8 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -8 \\ -b & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Let  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -8 \\ -b & 8 & 0 \end{pmatrix}$ . Then we have:

$$M^{T} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & 8 \\ b & -8 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -8 \\ -b & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -M$$

Therefore, M satisfies the condition that  $M^T = -M$ . By the result proved in the previous question, we have det(M) = 0.

### A.I. 的數學能力有待改善

眾多周知,A.I. 雖然有很好的語言能力,但數學能力仍有很大的進步空間。剛才提及的一些例子,只是個別一些 A.I. 表現得較好的題目,在很多時候,他表現出來的數學能力其實是極不可靠(例如 Poe 會花 10 行告訴我們  $\sqrt{1.44}$  「只是大約 1.2」、 $6\times8=42$  等等)。

剛才例子的重點是原來作為 plain text 的 LaTeX,可以作為人類與 A.I. 進行數學溝通的橋樑。我曾試過將一些以 LaTeX 繪畫圓形的 tikzpicture 編號輸入 Poe,亦試過向

Poe 問一些與向量有關的題目,雖然計算上有很多沙石,但整體而言,Poe 是能從 LaTeX 編碼中明白我想問的東西。

不能否應的是,科技日新月異,A.I. 的數學能力可能在他日 突飛猛進亦說不定。現時網上亦有一些外國的例子,他們使用 ChatGPT 4.0 連上 wolfarm alpha 的外掛來進行運算。如果我們能掌握一個與 A.I. 溝通的關鍵,可能有一天,A.I. 可以幫我們使用 LaTeX 製作更能切合學生需要的教材。

### A.I. 能否取代數學老師?

科技發展一日千里,老師會否被科技取代,一直都是人們有 興趣的話題。如果有一天,A.I. 可以收集學生數據,按學生 能力,使用 LaTeX 排版製作教材幫助學生學習,再模彷老 師的教學,這會否取代老師的工作?雖然 A.I. 無論在發展 潛力和能力上都相當強大,我亦相信 A.I. 有能力分析學生 難點,從不同老師身上「學習」能有效教導學生的最佳方法。 不過我仍相信,「教學法」是可以模彷,但我們這群數學老 師對數學的熱誠,我們對數學的喜愛,當中所散發出來的感 染力,是 A.I. 不能模彷和學習的。而正正是因為我們相信 這樣的熱誠和感染力能夠代代相傳,才會有不同教學法,不 同的教學工具推陳出新。我相信,帶著一份對數學的熱枕, 樂於學習新事物,或許會是我們面對未來 A.I. 世代中的其 一條出路。

### 11. 三角函數表史料鈎沉

陳泳昌博士 科學史工作者

#### 前言

近年學界提倡跨科協作,讓學生融匯各方面知識,激發多角 度思考,提高學習興趣。筆者認為科學史結合科學與歷史, 此方面的研究對教學有以下裨益:

- 1. 以說故事的形式,帶出科學知識,提升教學吸引力;
- 從古人的錯誤中學習,明白科學發展建基於歷代先哲的 努力,並非一蹴即至;
- 3. 結合中國歷史教育,了解國家優秀文化傳統,認識古代中國與世界各地的科學交流。

承蒙香港教育局課程發展處數學教育組邀請,筆者曾主講有 關三角測量之講座,其間談及三角函數表的歷史。本文乃以 此為基礎,擴充增補寫成。

# 古希臘《天文學大成》弦表

考諸歷史,三角學之發展,很大程度是與天文學相關。古希臘的天文學家,普遍使用弦 (Chord) 作三角運算,現今通

用之三角函數尚未創立。見圖 1,以圓心 O、半徑 r 作扇形 OAB,設 $\angle AOB=\theta$ ,則 AB 的長度,可以用弦函數(-般簡寫 crd) 表示: $AB = r \times crd \theta$ 。弦函數與現今通用 的正弦 (Sine) 函數,有以下關係式:

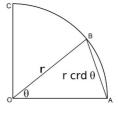


圖1:弦之定義

 $\operatorname{crd} \theta = 2\sin\frac{\theta}{2} \circ$ 

早於公元前 2 世紀,喜帕恰斯(或譯伊巴谷,Hipparchus,約前 190-約前 120)便曾經編訂弦表(Table of Chord),可惜已經佚失。現今尚存年代最早之弦表,見於公元 2 世紀托勒密(Claudius Ptolemy,約 100-約 170)的著作《天文學大成》(Almagest)第 1 章第 11 節。該表設圓半徑 r 長度為 60,設  $\theta$  由 0°至 180°,每½°列出相對應的弦長 AB。

# 公元 4-17 世紀印度、伊斯蘭及歐洲之三角函數表

古希臘數學及天文學知識,大約於公元 4 世紀或更早時期 輾轉傳入印度。此後印度數學家編訂正弦表 (Sine Table), 正弦之定義於現今通用的正弦函數相同。史上首張正弦表, 見於約公元  $4 \le 5$  世紀印度典籍《蘇利亞曆數書》(Surya Siddhanta)第 2 章,如附錄 1 所示。該表設圓半徑長度為 3438,由  $0° \le 90°$ ,每 3°45,列出正弦長度,例如當角度是 30°,正弦長度是 1719,用現代算式表示,即  $\sin 30° = \frac{1719}{3438} = 0.5。該表又列出差分(Finite Difference),即是表格中前後 兩正弦長度之差。$ 

伊斯蘭文明興起後,積極汲收古希臘及印度之科學知識,並創新發揚。從公元9世紀開始,哈西卜(Habash al-Hasib al-Marwazi,766-約869)、花拉子模(Al-Khwarizmi,約780-約850)、阿爾巴塔尼(al-Battani,約858-929)、阿布·瓦法(Abu al-Wafa' al-Buzjani,940-998)等數學家和天文學家,陸續提出新的三角函數,並編訂數表。及至公元10世紀,正弦、餘弦(Cosine)、正切(Tangent)、餘切(Cotangent)、正割(Secant)、餘割(Cosecant)的數表皆已齊備。

托勒密《天文學大成》原書以希臘文撰寫,於公元9世紀翻譯成阿拉伯文,備受伊斯蘭學者重視。但此時的歐洲正值黑暗時期,古希臘科學知識漸漸湮沒無聞。直至公元12世紀,歐洲掀起大規模翻譯阿拉伯文著作的風潮,伊斯蘭學者在三角學的成就,遂得以傳入歐洲,《天文學大成》亦由阿拉伯文譯成拉丁文,在歐洲重新流通。

此後歐洲數學家致力編訂新的三角函數表,隨著圓半徑增加,數表的精度不斷提高。舉其大者,有雷蒂庫斯(Georg Joachim Rheticus,1514-1574)所編之三角函數表,該表設圓半徑為  $10^{10}$ 、由  $0^{\circ}$ 至  $45^{\circ}$ 、每  $10^{\circ}$ 列出數值,可惜他去世時數表尚未完成。他的學生奧托(Valentinus Otho,1545-1603)完成餘下的計算,在 1596 年付梓出版。不幸的是,數表部份數值有誤,在 1607 年由皮蒂斯楚斯(Bartholomaeus Pitiscus,1561-1613) 更正並再版。

### 唐朝〈九執曆〉正弦表

唐朝時,有不少外族人士定居中國,甚至擔任官職。瞿曇悉達(Gautama Siddha,活躍於8世紀)是天竺(今印度)裔太史令,在開元六年(718)奉敕編撰《開元占經》,是為天文星占資料之彙編。該書曾於宋朝亡佚,但至明朝末年,有人在古佛像腹中發現抄本,本書才得以復傳於世。

《開元占經》卷 104 收錄〈九執曆〉,是為某部天竺曆法之 漢譯,但該曆未曾在中國頒用。饒有興味的是,〈九執曆〉 收錄一份正弦表,原文見附錄 2,與附錄 1 比對,可見這表 與印度《蘇利亞曆數書》正弦表完全相同。這份正弦表,揭 示了古代中國與印度之間的曆算知識交流。

# 唐朝〈大衍曆〉正切表

與瞿曇悉達同期的,有唐僧一行 (俗名張遂,683-727),他精通 天文曆算,編撰曆法〈大衍曆〉, 在開元十七年(729)至至德二年 (757)間行用。一行籌備修曆時, 曾主持大規模天地測量,數據精 度比前代大幅提高。〈大衍曆〉 原文,見於《舊唐書·曆志》及 《新唐書·曆志》。

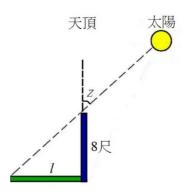


圖 2:中國傳統圭表

中國傳統天文學家,一般豎立 8 尺長的圭表,觀測太陽下的影長變化,掌握節氣更替。見圖 2,設太陽距天頂角度為 z,則圭表影長  $l=8 \times \tan z$ 。〈大衍曆〉內有一段文字,見附錄 3,記載太陽距天頂角度,與圭表影長的關係,英國學者古克禮(Christopher Cullen)認為這是世界最早的一份正切表(Tangent Table)。古克禮所言,或有商權之處,因為〈大衍曆〉該段文字,純粹用作推算圭表影長,未有談及一般直角三角形的邊角關係。雖則如此,這份數表備受科學史家關注,彰顯古代中國的數學成就。

古克禮及中國學者劉金沂、趙澄秋曾嘗試重構〈大衍曆〉這份正切表,然而由於原文十分簡約,解讀工作面對不少困難。後來中國學者曲安京發現這份數表同見於《高麗史》中有關另一部唐朝曆法〈宣明曆〉的記載,他比對二文,提出以下解讀:當太陽距天頂角度小於73度時,〈大衍曆〉正切表使用三階差分;當角度是73至81度時,則用五階差分。曲安京重構的〈大衍曆〉正切表,見附錄4。

# 明朝《崇禎曆書》割圓八線表

宋、元年間曾有伊斯蘭天文學家前來中國,那些人有可能具備三角學知識,惟未見相關史料,以資研究。及至明朝末年,歐洲天主教士來華傳教。利瑪竇(Matteo Ricci, 1552-1610)體會到中國社會十分重視天文曆算,遂發起向中國引進歐洲數學及天文學,希望提高傳教士的社會地位。

崇禎二年(1629),徐光啟(1562-1633)奉敕開設曆局,率領傳教士鄧玉函(Johann Schreck, 1576-1630)、羅雅谷(Giacomo Rho, 1593-1638)、湯若望(Johann Adam Schall von Bell, 1591-1666),翻譯歐洲數學及天文學書刊,彙編《崇禎曆書》。可惜鄧玉函及徐光啟先後病逝,李天經(1579-1659)接手曆局,與其餘傳教士合作,翻譯工作最終在崇禎八年(1635)完成。

《崇禎曆書》有系統地介紹三角學知識,收錄〈大測〉,即是三角學理論和計算範例;以及〈割圓八線表〉,即是正弦、正切、正割、餘弦、餘切、餘割的數表。該表設圓半徑長度為10萬,由0°至45°,每1'列出三角函數值。《崇禎曆書》對三角學推崇備至,〈割圓八線表〉序文曰:「〈割圓八線表〉,即〈大測〉表也。其數之多,其用之廣,於測量百法中,皆為第一,故名〈大測〉。」

《崇禎曆書》雖已成書,但尚未頒用而明朝已亡。清室入主後,湯若望供職於欽天監,對《崇禎曆書》修訂增刊,改名為《西洋新法曆書》,行用於全國。乾隆帝(愛新覺羅·弘曆,1711-1799)在位時,需要避「曆」字諱,書名復改為《新法算書》。

### 清朝《御製數理精蘊》八線表

康熙帝(愛新覺羅·玄燁,1654-1722)曾親自修習天文曆 算,亦致力培育本土人材,務求自立,因此清初數學家輩出。 另一方面,來華傳教士雖然通達天文曆算,但始終並非專才, 因此中國學者陸續發現《崇禎曆書》的內容,有一些含糊或 不自洽之處。康熙帝在晚年命陳厚耀(1648-1722)、何國宗 (?-1767)、明安圖(1692-1763)等人編纂《御製曆象考成》、 《御製律呂正義》、《御製數理精蘊》,合稱《御製律曆淵 源》。這些書刊是中國學者獨立編纂而成,並無傳教士參與。 中國學者雖未能閱讀以拉丁文寫成的歐洲天文學原著,但也 根據他們的理解,嘗試改寫《崇禎曆書》那些不自洽的內容。

《御製數理精蘊》收錄〈八線表〉,比《崇禎曆書》更進一步,設圓半徑長度為1千萬,由0°至45°,每10"列出三角函數值。〈八線表〉雖然部份數值有誤,但由中國數學家獨立完成,有其重要意義。

#### 結語

三角學及三角函數表的傳播歷史,揭示世界各地自古已有科學知識交流。中國、歐洲、印度及伊斯蘭數學家,在不同時代為三角學作出貢獻。有學者提出唐朝〈大衍曆〉載有世界最早的一份正切表,體現古代中國的數學成就。

作者電郵:

jsphchan@connect.hku.hk

# 参考文獻

- 1. Christopher Cullen, "An Eighth Century Chinese Table of Tangents", *Chinese Science*, Vol. 5 (1982), pp. 1-33.
- 2. 劉金沂、趙澄秋:〈唐代一行編成世界上最早的正切函 數表〉,《自然科學史研究》,第5卷第4期(1986年), 頁 298-309。
- 3. 曲安京:〈《大衍曆》晷影差分表的重構〉,《自然科學史研究》,第16卷第3期(1997年),頁233-244。

附錄1:印度《蘇利亞曆數書》正弦表

角度	正弦長度 (圓半徑 3438)	差分	角度	正弦長度 (圓半徑 3438)	差分
3°45'	225	_	48°45'	2585	154
7°30'	449	224	52°30'	2728	143
11°15'	671	222	56°15'	2859	131
15°	890	219	60°	2978	119
18°45'	1105	215	63°45'	3084	106
22°30'	1315	210	67°30'	3177	93
26°15'	1520	205	71°15'	3256	79
30°	1719	199	75°	3321	65
33°45'	1910	191	78°45'	3372	51
37°30'	2093	183	82°30'	3409	37
41°15'	2267	174	86°15'	3431	22
45°	2431	164	90°	3438	7

# 附錄 2: 唐朝〈九執曆〉正弦表原文

段法:凡一段管三度四十五分,每八段管一相。總有二十四 段,用管三相。其段下側注者,是積段,併成三數。

第一段:二百二十五。

第二段:二百二十四,併四百四十九,第一相。

第三段:二百二十二,併六百七十一。

(如此類推,第四段至第二十三段略)

第二十四段:七,併三千四百三十八。

# 附錄 3: 唐朝〈大衍曆〉正切表原文

南方戴日之下,正中無晷。自戴日之北一度,乃初數千三百七十九。自此起差,每度增一,終於二十五度,計增二十六分。又每度增二,終於四十度。又每度增六,終於四十四度。增六十八。又每度增二,終於五十度。又每度增七,終於五十五度。又每度增十九,終於六十度,增百六十。又每度增三十九,終於七十二度,增二百六十。又度增四百四十。又度增千六十。又度增千八百六十。又度增二千八百四十。又度增四千。又度增五千三百四十。各為每度差。因累其差,以遞加初數,滿百為分,分十為寸,各為每度晷差。又累其晷差,得戴日之北每度晷數。

# 附錄 4: 唐朝〈大衍曆〉正切表(據曲安京重構)

注意〈大衍曆〉定義一周天為  $365\frac{779\frac{3}{4}}{3040}$  度(此數字乃〈大 衍曆〉中太陽沿黃道繞行一周天的日數),而非現今通用的  $360^{\circ}$ ,因此在表中,1 度相當於現今  $0.9856^{\circ}$  。

太陽距天頂 角度 z	圭表 影長1	一階 差分	二階 差分	三階 差分	四階 差分	五階 差分		
(單位:度)	(單位:尺)	(單位	(單位:0.0001尺)					
0	0.0000	1379	1	1				
1	0.1379	1380	2	1				
2	0.2759	1382	3	1		_		
3	0.4141	1385	4	1		_		
4	0.5526	1389	5	1				
5	0.6915	1394	6	1		_		
6	0.8309	1400	7	1		_		
7	0.9709	1407	8	1	_			
8	1.1116	1415	9	1		_		
9	1.2531	1424	10	1		_		

太陽距天頂 角度 z	圭表 影長1	一階 差分	二階 差分	三階 差分	四階 差分	五階 差分	
(單位:度)	(單位:尺)	(單位:0.0001尺)					
10	1.3955	1434	11	1		_	
11	1.5389	1445	12	1	_		
12	1.6834	1457	13	1	_		
13	1.8291	1470	14	1		_	
14	1.9761	1484	15	1	_		
15	2.1245	1499	16	1		_	
16	2.2744	1515	17	1		_	
17	2.4259	1532	18	1		_	
18	2.5791	1550	19	1			
19	2.7341	1569	20	1		_	
20	2.8910	1589	21	1	_		
21	3.0499	1610	22	1	_		
22	3.2109	1632	23	1		_	
23	3.3741	1655	24	1		_	
24	3.5396	1679	25	1		_	

太陽距天頂 角度 z	圭表 影長1	一階 差分	二階 差分	三階 差分	四階 差分	五階 差分	
(單位:度)	(單位:尺)	(單位:0.0001尺)					
25	3.7075	1704	26	2		_	
26	3.8779	1730	28	2	_		
27	4.0509	1758	30	2	_	_	
28	4.2267	1788	32	2			
29	4.4055	1820	34	2	_	_	
30	4.5875	1854	36	2			
31	4.7729	1890	38	2	_	_	
32	4.9619	1928	40	2	_	_	
33	5.1547	1968	42	2			
34	5.3515	2010	44	2	_	_	
35	5.5525	2054	46	2			
36	5.7579	2100	48	2	_		
37	5.9679	2148	50	2	_	—	
38	6.1827	2198	52	2	_	—	
39	6.4025	2250	54	2		_	

太陽距天頂 角度 z	圭表 影長1	一階 差分	二階 差分	三階 差分	四階 差分	五階 差分	
(單位:度)	(單位:尺)	(單位:0.0001尺)					
40	6.6275	2304	56	6		_	
41	6.8579	2360	62	6	_		
42	7.0939	2422	68	6		_	
43	7.3361	2490	74	6		_	
44	7.5851	2564	80	68	_		
45	7.8415	2644	148	2		_	
46	8.1059	2792	150	2	_		
47	8.3851	2942	152	2	_		
48	8.6793	3094	154	2	_		
49	8.9887	3248	156	2		_	
50	9.3135	3404	158	7	_		
51	9.6539	3562	165	7	_		
52	10.0101	3727	172	7		_	
53	10.3828	3899	179	7		_	
54	10.7727	4078	186	7		_	

太陽距天頂 角度 z	<b>圭表</b> 影長1	一階 差分	二階 差分	三階 差分	四階 差分	五階 差分		
(單位:度)	(單位:尺)	(單位:0.0001尺)						
55	11.1805	4264	193	19	_	_		
56	11.6069	4457	212	19	_	_		
57	12.0526	4669	231	19	_	_		
58	12.5195	4900	250	19	_	_		
59	13.0095	5150	269	19	_	_		
60	13.5245	5419	288	160	_	_		
61	14.0664	5707	448	33		_		
62	14.6371	6155	481	33	_	_		
63	15.2526	6636	514	33	_	_		
64	15.9162	7150	547	33	_			
65	16.6312	7697	580	36	_	_		
66	17.4009	8277	616	36	_			
67	18.2286	8893	652	36	_	_		
68	19.1179	9545	688	36	_	_		
69	20.0724	10233	724	36		_		

太陽距天頂	圭表	一階	二階	三階	四階	五階		
角度 Z	影長1	差分	差分	差分	差分	差分		
(單位:度)	(單位:尺)	(單位:0.0001 尺)						
70	21.0957	10957	760	39	_	_		
71	22.1914	11717	799	39	_	_		
72	23.3631	12516	838	260	_	_		
73	24.6147	13354	1098	440	620	180		
74	25.9501	14452	1538	1060	800	180		
75	27.3953	15990	2598	1860	980	180		
76	28.9943	18588	4458	2840	1160	180		
77	30.8531	23046	7298	4000	1340	_		
78	33.1577	30344	11298	5340	_	_		
79	36.1921	41642	16638					
80	40.3563	58280						
81	46.1843	_	_		_	_		