

高中数学课程阐释:

单元一 (微积分与统计)



教育局
课程发展处
数学教育组
二零零九年 (二零一八年八月更新)

（空白頁）

目 录

	页 数
前言	i
基础知识	1
学习单位 1 二项展式	2
学习单位 2 指数函数和对数函数	4
微积分	7
学习单位 3 函数的导数	8
学习单位 4 函数的求导法	10
学习单位 5 二阶导数	12
学习单位 6 求导法的应用	13
学习单位 7 不定积分法及其应用	14
学习单位 8 定积分法及其应用	16
学习单位 9 运用梯形法则计算定积分的近似值	18
统计	19
学习单位 10 条件概率和贝叶斯定理	20
学习单位 11 离散随机变量	21
学习单位 12 概率分布、期望值和方差	22
学习单位 13 二项分布	24
学习单位 14 泊松分布	25
学习单位 15 二项分布和泊松分布的应用	26
学习单位 16 正态分布的基本定义及其性质	27
学习单位 17 正态变量的标准化及标准正态分布表的运用	29
学习单位 18 正态分布的应用	31

	页 数
学习单位 19 抽样分布和点估计	32
学习单位 20 总体平均值的置信区间	34
进阶学习单位	
学习单位 21 探索与研究	36
鸣 谢	37

前 言

为配合学校课程持续发展，《数学课程及评估指引（中四至中六）》（以下简称《课程及评估指引》）于 2017 年 12 月更新。高中数学课程包括必修部分和延伸部分。延伸部分包括两个单元，分别是单元一（微积分与统计）和单元二（代数与微积分）。

在《课程及评估指引》中，单元一的学习重点以表列形式归于不同学习单位内。表中「注释」栏的内容为学习重点的补充资料。本小册子内的课程阐释旨在进一步解释：

- （一） 单元一学习重点的要求；
- （二） 单元一的教学建议；
- （三） 单元一学习单位之间的关系和结构；及
- （四） 必修部分与单元一的课程衔接。

本小册子内的课程阐释配合《课程及评估指引》内每一学习单位的「注释」栏及教学时数，可作为教师规划该学习单位教学的阔度和深度之参考。教师宜在施教单元一时，把必修部分和单元一的内容视为连贯的数学知识，并培养学生运用数学解决问题、推理及传意的能力。此外，教师须留意，《课程及评估指引》中的学习单位及学习重点的编排次序并不等同于学与教的次序，教师可因应学生需要有系统地编排学习内容。

欢迎各界人士就本小册子提供意见和建议。来函请寄：

九龙油麻地弥敦道 405 号

九龙政府合署 4 楼

教育局课程发展处

总课程发展主任（数学）收

传真：3426 9265

电邮：ccdoma@edb.gov.hk

（空白页）

基础知识

基础知识内容由两个部分组成：二项展式、指数函数和对数函数。二项展式为掌握二项分布的基础。很多和自然现象有关的数学模型皆涉及指数函数。正态分布的概率分布函数亦涉及指数函数。

基础知识的内容是单元一内微积分和统计的先备知识。教师教授基础知识内的课题时应避免严谨的处理。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
1. 二项展式	1.1 认识展式 $(a+b)^n$ ，其中 n 为正整数	3

课程阐释：

学生已在第三学习阶段学习 a^0 的定义和整数指数定律，并进行多项式的加、减、乘及其混合运算和多项式的因式分解。

介绍二项展式有多种方法，诸如以乘法展开 $(a+b)^n$ 或利用组合的概念解释二项展式等。

学生须认识 $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^n C_r^n a^{n-r} b^r$ ，其中 n 为正

整数。“ C_r^n ”、“ ${}_nC_r$ ”、“ nC_r ”、“ $\binom{n}{r}$ ”等记法皆可使用。

为方便表达二项展式，学生须认识求和记法“ Σ ”，诸如 $\sum_{i=1}^n 2$ 、 $\sum_{i=0}^n 4^i$ 和 $\sum_{k=1}^7 k^3$ 。学

生亦须认识关系式： $\sum_{i=1}^n a = na$ 和 $\sum_{r=1}^n (ax_r \pm by_r) = a \sum_{r=1}^n x_r \pm b \sum_{r=1}^n y_r$ ，其中 a 、 b 为常数。

以下内容不属课程所需：

- 三项式的展开
- 求最大系数和最大项
- 二项式系数的性质
- 求近似值的应用，例如求 $(1.01)^{10}$ 的近似值

教师可引导学生透过帕斯卡三角展开二项式，并可介绍以下的历史事实：帕斯卡于 1653 年出版的《算术三角论》介绍二项式系数的三角形排列方法及其应用。因此，一般称这个三角形的排列方法为帕斯卡三角。事实上，早于

13 世纪，中国数学家杨辉在他的著作《详解九章算法》(1261) 已展示相同的三角形，并指出「贾宪用此术」。故此，这个三角形的排列方法亦称为「杨辉三角」或「贾宪三角」。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
2. 指数函数和对数函数	2.1 认识 e 的定义和指数级数 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ 2.2 理解指数函数和对数函数 2.3 运用指数函数和对数函数解应用题 2.4 将 $y = ka^x$ 和 $y = k[f(x)]^n$ 化为线性关系式，其中 a 、 n 和 k 为实数， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $f(x) > 0$ 和 $f(x) \neq 1$	8

课程阐释：

学生须认识当 n 的值增大时， $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 愈来愈接近一个固定的数 e 。当学生

认识极限概念后，他们须认识 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。

学生可运用计算机或电脑软件，求 e 的近似值。

教师可利用人口增长、放射性衰变、利息计算等现实生活上的例子介绍 e 的概念。

学生须认识指数级数：
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

学生须能把诸如 e^{-x} ， e^{kx} ， e^{-x^2} 和 e^{x+k} 等指数函数展开成指数级数，其中 k 为常数。

学生已在必修部分的学习单位「指数函数和对数函数」中学习指数函数 $y = a^x$ 和对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ ， $a \neq 1$) 的性质及其图像。学生须理解指数函数 $y = e^x$ 和自然对数函数 $y = \ln x$ ($x > 0$) 分别是指数函数 $y = a^x$ 和对数函

数 $y = \log_a x$ 的特例。

学生须理解指数函数图像和对数函数图像之间的关系。为巩固学生对 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 的理解,教师可要求学生探究 $y = 2^x$ 、 $y = e^x$ 、 $y = 3^x$ 、 $y = 2^{-x}$ 、 $y = e^{-x}$ 、 $y = 3^{-x}$ 、 $y = \log_2 x$ 、 $y = \ln x$ 和 $y = \log_3 x$ 等图像之间的关系。

学生须理解 $e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$ 和 $a^x = e^{x \ln a}$ 这三个等式。

指数函数可用于模拟许多自然现象,诸如连续增长、细菌增长、物质冷却率、放射性元素衰变等。教师可透过学生在第三学习阶段所学习的复利息概念介绍连续增长的概念。

学生须懂得解涉及以下公式的应用题:

连续增长: $f(t) = P_0 e^{rt}$, $r > 0$

人口增长: $f(t) = P_0 e^{kt}$, $k > 0$

放射性衰变: $f(t) = P_0 e^{-kt}$, $k > 0$

学生须能将 $y = ka^x$ 和 $y = k[f(x)]^n$, 其中 a 、 n 和 k 是实数, $a > 0$, $a \neq 1$,

$f(x) > 0$ 和 $f(x) \neq 1$ 化为线性关系式。当给出 x 及 y 的实验数据时,学生须能描绘对应的直线图像,并从图像的斜率和截距来确定未知常数的值。函数 $f(x)$ 并不局限于多项式函数。

（空白页）

微积分

微积分内容分为两部分：求导法（或称「微分法」）及其应用、积分法及其应用。函数的导数概念涉及函数极限的概念。在求导法及其应用这部分，学生须理解导数的定义，求导法的基本公式及运算法则。学生亦须能利用导数求曲线的切线方程和研究函数极大值和极小值的问题。

在许多涉及科学、科技和经济情况的问题，学生须由已知函数的导数 $f'(x)$ 求函数 $f(x)$ 。这逆运算的做法就是不定积分的概念。同时，教师应介绍以长方形面积总和的极限作为定积分概念。教师可引导学生认识微积分基本定理，将两看似不同的概念(不定积分和定积分)联系起来。

教师应采用直观但概念正确的介绍方法。对于学生较难掌握的内容如极限的概念，教师可配合计算机或电脑软件的数值方法，帮助学生认识相关概念。教师可协助学生透过动态数学软件的互动介面，理解数学概念。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
3. 函数的导数	3.1 认识函数极限的直观概念 3.2 求代数函数,指数函数和对数函数的极限 3.3 透过基本原理认识函数的导数的概念 3.4 认识曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的切线的斜率	5

课程阐释：

函数极限是微积分中的一个基本概念。在介绍函数的极限的概念前，教师应简略地重温函数的概念和记法。

教师可利用列表显示函数值在 $x = x_0$ 附近的微小变化，以帮助学生认识当 x 趋向 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限概念。

学生须认识对某些函数 $f(x)$ ，当 x 趋向 x_0 时， $f(x)$ 的极限可能不存在，诸如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}。$$

学生须认识有关函数的和、差、积、商、纯量乘法和复合函数极限的定理，但其中的证明不属课程所需。学生须能运用这些定理求代数函数、指数函数和对数函数的极限。代数函数须包括多项式函数、有理函数、幂函数 x^α 和由上述各函数的加、减、乘、除和复合而成的其他函数，诸如 $\sqrt{x^2+1}$ 。学

生亦须能求当 x 趋向无穷大时，诸如 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^3}$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x}{x}$ 等函数极限。

学生须认识当给定函数 $f(x)$ ，若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 存在，则此极限定义为 $f(x)$ 在 x 的导数。教师可向学生展示如何运用基本原理求诸如 x^2 和

$\frac{1}{x-1}$ 等函数的导数，但运用基本原理求导数不属课程所需。

学生须认识导数的记法，例如： y' 、 $f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$ 。学生须认识 $\frac{d}{dx}$ 只是一个算子，而 $\frac{dy}{dx}$ 不是一个分数。

学生须认识曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线的斜率为 $f'(x_0)$ 和它的记法

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 及须能求取曲线在该点的切线方程。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
4. 函数的求导法	4.1 理解求导法的加法法则、积法则、商法则和链式法则 4.2 求代数函数,指数函数和对数函数的导数	8

课程阐释:

学生须理解以下求导法的法则:

- 加法法则: $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
- 积法则: $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$
- 商法则: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
- 链式法则: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$

学生须能结合以下公式求诸如 $f(x) = (2x^2 + 5x + 3)^8$ 、 $f(x) = \sqrt{5x^2 + 2x - 1}$ 、

$f(x) = e^{x^2+1}$ 和 $f(x) = \ln \sqrt{x^3-1}$ 等代数函数、指数函数和对数函数的导数:

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

- $(a^x)' = a^x \ln a$

反函数求导法、参数方程求导法、隐函数求导法和对数求导法均不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
5. 二阶导数	5.1 认识函数的二阶导数的概念 5.2 求显函数的二阶导数	2

课程阐释：

学生须认识函数 $y = f(x)$ 的二阶导数的概念及其记法： $f''(x)$ 、 y'' 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

求隐函数的二阶导数和求三阶或以上的导数不属课程所需。

教师可指出一般来说 $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 。

学生须能运用函数 $f(x)$ 的二阶导数判别该函数的图像在 $a \leq x \leq b$ 的凹性。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
6. 求导法的应用	6.1 运用求导法解涉及切线、变率、极大值和极小值的应用题	10

课程阐释：

学生须能运用求导法解涉及切线和变率的应用题，须包括位移、速度和加速度的概念。

学生须能运用一阶导数或二阶导数解涉及极大值和极小值的应用题。极值须包括全域和局部的极值。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
7. 不定积分法及其应用	7.1 认识不定积分法的概念 7.2 理解不定积分的基本性质及不定积分法的基本公式 7.3 运用不定积分法的基本公式求代数函数和指数函数的不定积分 7.4 运用代换积分法求不定积分 7.5 运用不定积分法解应用题	10

课程阐释：

学生须认识不定积分是求导法的逆运算，并理解 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 这关系式中积分常数 C 的意义。

学生须认识记法： $\int f(x) dx$ 和「被积函数」、「积分常数」和「原函数」这些名词。

学生须理解不定积分的基本性质和基本公式：
性质包括：

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ ，其中 k 为常数
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

公式包括：

- $\int k dx = kx + C$ ，其中 k 和 C 为常数
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ，其中 $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ， $x \neq 0$ (学生须认识绝对值的概念)

- $\int e^x dx = e^x + C$

学生须能运用代换积分法求诸如 $\int \left(3 + \frac{x}{2}\right)^3 dx$ 和 $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ 等不定积分。

以分部积分法求不定积分不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
8. 定积分法及其应用	8.1 认识定积分法概念 8.2 认识微积分基本定理及理解定积分的性质 8.3 求代数函数和指数函数的定积分 8.4 运用代换积分法求定积分 8.5 运用定积分法求平面图形的面积 8.6 运用定积分法解应用题	12

课程阐释：

学生须认识定积分的定义为曲线下矩形条的面积和的极限，并能区分定积分与不定积分的概念。

学生须认识记法： $\int_a^b f(x)dx$ 和哑变量的概念，例如： $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ 。

学生须认识微积分基本定理： $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ，其中 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ，并透过这定理认识定积分和不定积分的关系。

学生须理解以下定积分的性质：

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ ，其中 k 为常数
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

教师可帮助学生探讨这些性质的几何意义。

学生须能计算代数函数和指数函数的定积分，及能运用代换积分法求定积分。当学生运用代换积分法计算定积分时，他们须能相应地改变定积分的上限和下限。

学生须能运用定积分法求平面图形的面积，例如：求曲线 $y = f(x)$ 、 x 轴与直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成区域的面积。

运用定积分法求曲线与 y 轴之间的面积和两条曲线之间的面积不属课程所需。

学生须能运用定积分法解诸如直线运动、增长模型等现实生活的应用题。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
9. 运用梯形法则计算定积分的近似值	9.1 理解梯形法则及运用它计算定积分的近似值	4

课程阐释：

学生不容易，甚至不可能，求取一些诸如 $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 等定积分的数值。梯形法则是计算定积分的近似值其中的一种方法。

在运用梯形法则时，学生只须用阔度相同的子区间计算定积分的近似值。学生须理解子区间数目愈多，所得的近似值愈准确。

梯形法则的误差估值不属课程所需。

学生须能运用二阶导数判别法及凹性判别估计值是过高还是过低，例如：

- 若函数 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 凹向上的，则梯形法则便会高估了定积分

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 的值。}$$

- 若函数 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 凹向下的，则梯形法则便会低估了定积分

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 的值。}$$



统计

统计内容由四个部分组成：条件概率和贝叶斯定理、离散概率分布及其应用、正态分布及其应用、点及区间估计。

单元一统计中的概率既基本又重要。随机变量的概念对于学生来说是新的知识。学习二项分布、泊松分布和正态分布有助加深学生对概率分布的认识。课程亦包括统计推断的讨论。

研究学习总体参数及样本统计量有助找出总体及样本之间的关系。这部分包括点估计和区间估计。

点估计是利用样本数据计算样本统计量，作为未知的总体参数的猜测。置信区间则是总体参数的区间估计。置信区间的阔度因应所选的置信水平而决定。

学习单位	学习重点	时间
统计		
10. 条件概率和贝叶斯定理	10.1 理解条件概率的概念 10.2 运用贝叶斯定理理解简单应用题	6

课程阐释：

学生已在必修部分的学习单位「续概率」中学习了独立事件的概念，并能运用这概念判别两个事件是否独立。学生亦已在必修部分学习了条件概率的概念、记法及法则 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ 。学生在这学习单位须进一步理解条件概率的概念，并结合「续概率」中的定律，得出如果 A 和 B 为独立事件时，则 $P(A|B) = P(A)$ 和 $P(B|A) = P(B)$ ，且反之亦然。

学生须认识若 A 和 B 为独立事件，则 A' 和 B ， B' 和 A ， A' 和 B' 也为独立事件。

在处理那些只有有限数目的结果的应用题时，绘制树形图可有效地列出所有可能的结果。学生运用贝叶斯定理理解简单应用题时，可透过绘画树形图或其他图形列出所需的条件概率。

教师可透过日常生活例子解释条件概率和独立事件的概念。

学习单位	学习重点	时间
统计		
11. 离散随机变量	11.1 认识离散随机变量的概念	1

课程阐释：

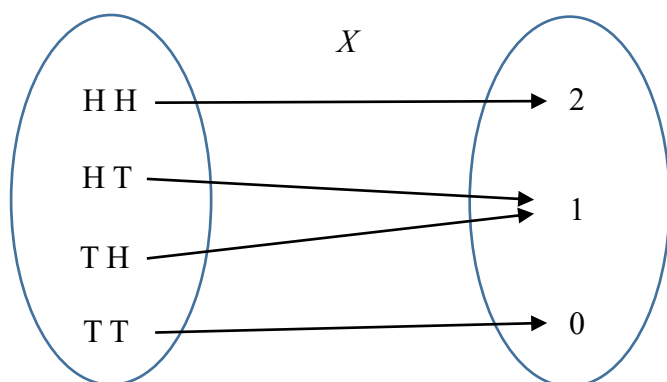
教师可透过日常生活的例子和必修部分中函数的概念介绍随机变量的概念，及可引导学生认识随机变量与代数中的变量在概念上有甚么分别。

学习单位	学习重点	时间
统计		
12. 概率分布，期望值和方差	12.1 认识离散概率分布的概念及以表列、图像和数学公式表示离散概率分布 12.2 认识期望值 $E[X]$ 和方差 $\text{Var}(X)$ 的概念及运用它们解简单应用题	7

课程阐释：

教师可透过诸如以下的日常生活例子介绍离散概率分布的概念：

设我们投掷两枚匀称硬币一次，有四个可能的结果：HH、HT、TH、TT。考虑掷得正面的数目，有以下随机变量 X ：



随机变量 X 的概率分布以表列表示：

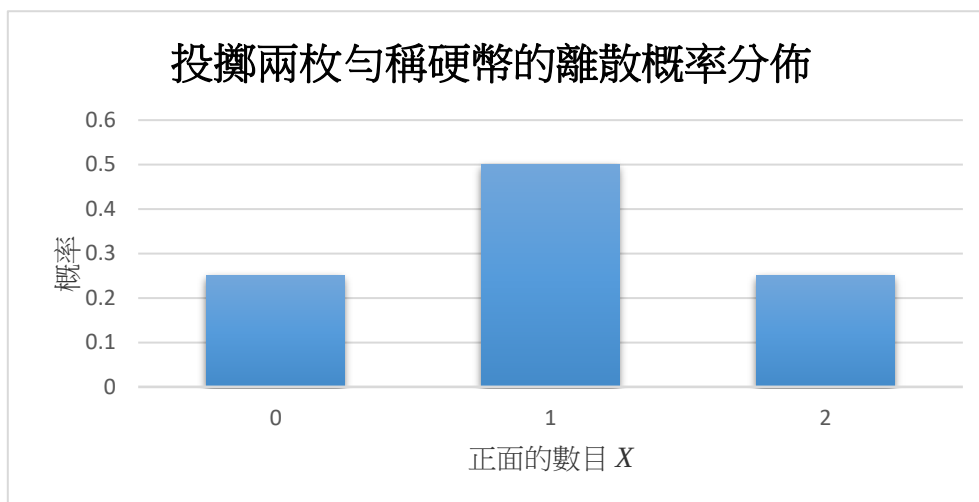
x	0	1	2
$P(X=x)$	0.25	0.5	0.25

其中 $P(X=x)$ 表示随机变量 X 取值 x 时的概率，且 $0 \leq P(X=x) \leq 1$ 和 $\sum_x P(X=x) = 1$ 。

随机变量 X 的概率分布亦可以用公式表示：

$$f(x) = P(X=x) = C_x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}, \text{ 其中 } x=0,1,2$$

随机变量 X 的概率分布也可以用棒形图表示。



学生已在必修部分学习平均值和标准差的概念和应用。在介绍离散随机变量的期望值与方差前，教师可简要地重温这些概念。

学生须能运用以下的公式解简单应用题：

- $E[X] = \sum xP(X = x)$
- $\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$
- $E[g(X)] = \sum g(x)P(X = x)$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
- $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$

$E(X)$ 这记法亦可使用。

随机变量的和与差及联合概率分布均不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
统计		
13. 二项分布	13.1 认识二项分布的概念及其性质 13.2 计算涉及二项分布的概率	5

课程阐释：

学习二项分布前，学生须认识伯努利分布。

学生须认识二项实验具有以下特性：

- 有 n 次相同的试验。
- 每次试验只有两种可能结果：成功和失败。
- 每次试验，成功的概率为 p 和失败的概率为 $1-p$ 。概率 p 在实验中保持不变。
- 试验彼此相互独立。

二项随机变量 X 表示 n 个试验的成功次数。学生须认识 $E[X]=np$ 及 $\text{Var}(X)=np(1-p)$ ，但这两公式的证明均不属课程所需。

此外，运用二项分布表求相关的概率不属课程所需。

二项分布公式涉及很耗时的运算。教师可使用免费在线计算机或诸如 `BINOM.DIST(r, n, p, T)` 等试算表软件的内置功能，求个别和累积二项分布的概率。

学习单位	学习重点	时间
统计		
14. 泊松分布	14.1 认识泊松分布的概念及其性质 14.2 计算涉及泊松分布的概率	5

课程阐释：

教师可透过现实生活例子介绍泊松分布，并可与学生讨论泊松分布其实为二项分布的极限形态，并在 n 很大和 p 很小时，泊松分布可用来逼近二项分布。

学生须认识泊松实验具有以下特性：

- 在某区间内任何一个事件的出现皆独立于在其他非重叠区间内事件的出现。
- 在任何区间内，事件出现的平均值与该区间的大小成正比。
- 超过一个事件出现于一个非常小的区间的概率是微不足道的。

学生须认识若 X 依循泊松分布，其中 λ 代表事件在某段时段所出现的平均值，则 $E[X] = \lambda$ 及 $\text{Var}(X) = \lambda$ 。但这两公式的证明不属课程所需。

此外，运用泊松分布表求相关的概率不属课程所需。

泊松分布公式涉及耗时的运算。教师可使用免费的在线计算机或诸如 POISSON.DIST (x, n, T) 等试算表软件的内置功能，求个别和累积泊松分布的概率。

学习单位	学习重点	时间
统计		
15. 二项分布和泊松分布的应用	15.1 运用二项分布和泊松分布解应用题	5

课程阐释：

为判断随机变量依循哪种离散概率分布，学生须认识离散概率分布的特征。二项分布的特征包括方差小于平均值，而泊松分布的特征包括方差等于平均值。这些概念提供判断两种分布的线索。若搜集数个随机样本，比较它们的平均值及方差有助于拣选适当的概率分布。

学习单位	学习重点	时间
统计		
16. 正态分布的基本定义及其性质	16.1 通过正态分布，认识连续随机变量及连续概率分布的概念 16.2 认识正态分布的概念及其性质	3

课程阐释：

学生已掌握离散随机变量和离散概率分布的概念，教师应将此概念延伸至连续随机变量和连续概率分布。

学生须认识离散随机变量的概率分布与连续随机变量的概率分布的分别。

教师可介绍有关概率密度函数(p.d.f.) $f(x)$ 的概念和性质。

计算连续概率分布的期望值和方差及推导正态分布的平均值和方差均不属课程所需。

学生须认识学习重点 12.2 的公式亦适用于连续随机变量。

学生须认识正态分布的概念，当中 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 代表 X 依循正态分布，其中平均值为 μ ，标准差为 σ 。

教师可介绍正态分布的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，其中 $x \in (-\infty, \infty)$ ，平均值为 μ 和标准差为 σ 。

学生须认识正态分布的以下性质：

- 正态曲线为钟形并对称于平均值
- 平均值、众数和中位数均相等
- 正态曲线的平坦度取决于 σ 值
- 正态曲线下的面积为 1

学习单位	学习重点	时间
统计		
17. 正态变量的标准化及标准正态分布表的运用	17.1 将正态变量标准化并运用标准正态分布表求涉及正态分布的概率	2

课程阐释：

学生须认识 $Z \sim N(0,1)$ 代表 Z 依循标准正态分布，其中平均值为 $\mu=0$ 和标准差为 $\sigma=1$ 。 $N(0,1)$ 称为「标准正态分布」。

对于 $Z \sim N(0,1)$ ，学生须能运用标准正态分布表求 $P(Z > a)$ 、 $P(Z \leq b)$ 和 $P(a \leq Z \leq b)$ 等值。学生亦须能在查表前将这些分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 变换为 $N(0,1)$ 。

学生须认识若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 及 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ，则

- $Z \sim N(0,1)$
- $E[Z] = 0$ 和 $\text{Var}(Z) = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P(z_1 \leq Z \leq z_2)$

教师可介绍免费的在线计算机或诸如以下的试算表软件的内置功能求标准分、正态随机变量的个别和累积概率：

- **NORMDIST (x, μ, σ, T):** 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，当 $T = 1$ ，我们得到 $P(X \leq x)$
- **NORMINV(p, μ, σ):** 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，我们得到 $P(X \leq x) = p$ 中 x 的值
- **NORMSDIST(z):** 若 $Z \sim N(0,1)$ ，我们得到 $P(Z \leq z)$
- **NORMSINV(p):** 若 $Z \sim N(0,1)$ ，我们得到 $P(Z \leq z) = p$ 中的 z 的值

- **STANDARDIZE** (x, μ, σ): 我们得到 $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

学习单位	学习重点	时间
统计		
18. 正态分布的应用	18.1 在已知 x_1, x_2, μ 和 σ 的值的条件下，求 $P(X > x_1)$、$P(X < x_2)$、$P(x_1 < X < x_2)$ 及相关概率的值，其中 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 18.2 在已知 $P(X > x)$、$P(X < x)$、$P(a < X < x)$、$P(x < X < b)$ 或相关概率的值的条件下，求 x 的值，其中 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 18.3 运用正态分布解应用题	7

课程阐释：

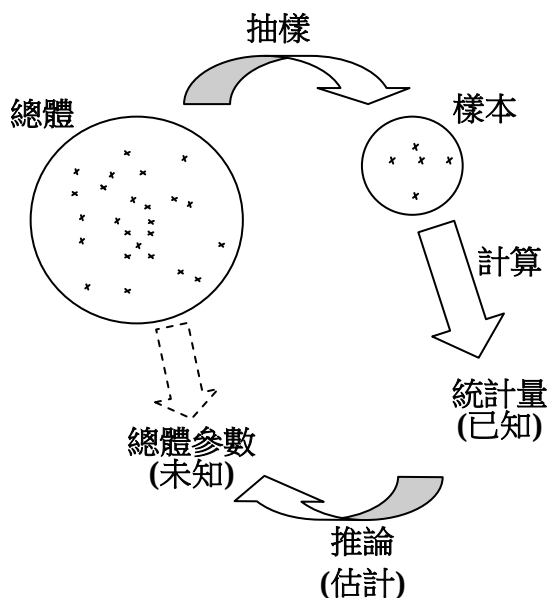
在计算有关概率的值时，学生须认识：

- $P(X > x_1) = P(X \geq x_1)$
- $P(X < x_2) = P(X \leq x_2)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$
- $P(X = x_1) = 0$

学习单位	学习重点	时间
统计		
19. 抽样分布和点估计	19.1 认识样本统计量和总体参数的概念 19.2 当随机样本大小为 n 时，认识样本平均值 $\bar{X}$ 的抽样分布 19.3 当样本大小 n 足够大时，运用中心极限定理把 $\bar{X}$ 的分布当成正态分布 19.4 认识点估计的概念，当中包括样本平均值和样本方差	9

课程阐释：

学生已在必修部分学习总体和样本的概念。学生在这学习单位须认识样本统计量和总体参数的概念及这些概念之间的关系：



学生须认识：

- 样本统计量未必与总体参数相同，但它可以提供与参数有关的讯息。
- 大部分样本统计量与总体参数的数值相近。只有少数是非常大于或非常小于总体参数。
- 一般而言，较大样本所提供的样本统计量与总体参数较接近。

学生须认识以下有关总体平均值 μ 和总体方差 σ^2 的公式：

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mu &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \\ \bullet \quad \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} \end{aligned}$$

教师可通过进行一些抽样活动，帮助学生认识样本平均值 $\bar{X}$ 的抽样分布的概念及认识若总体平均值为 μ 和总体方差为 σ^2 ，则 $E[\bar{X}] = \mu$ 和 $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 。

学生须认识若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ，但证明不属课程所需。

教师可透过一些诸如 $n=1$ 或 $n=N$ 等极端的例子或电脑的模拟程式，帮助学生认识：

- 不论甚么的概率分布，当样本大小足够大时，样本平均值的抽样分布近似正态分布
- 当样本大小增加时，大多数概率分布很快近似正态分布
- 在抽样分布中，样本的数量假设为无限
- 当样本大小增加时，概率分布的伸展幅度减少

点估计是参数估计的其中一种方法。学生须认识运用样本统计量估计总体参数的概念，例如，运用样本平均值 $\bar{x}$ 估计总体平均值 μ 。教师可指出样本中位数或样本众数亦可作为点估计量。

在抽样的过程中，不同的样本可能会产生不同的估计量。我们很难决定哪一个估计量比较好。我们希望用一个无偏的估计量估计未知参数。长远来说，采自大量样本估计量的平均值会等同总体参数： $E(\text{样本估计量}) = \text{总体参数}$ 。学生须认识总体参数的无偏估计量不是唯一的。

学生须认识无偏估计量的概念，例如：样本平均值 $\bar{x}$ 是总体平均值 μ 的一个无偏估计量，而样本方差 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 则为总体方差 σ^2 的一个无偏估计量。

学习单位	学习重点	时间
统计		
20. 总体平均值的置信区间	20.1 认识置信区间的概念 20.2 求总体平均值的置信区间	6

课程阐释：

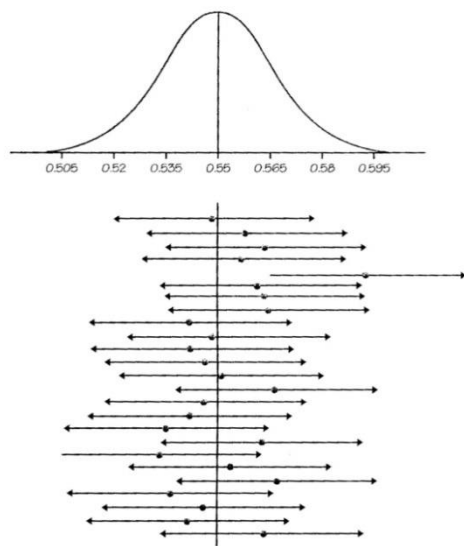
学生须认识置信区间的概念，并认识较常用的为 95% 及 99% 的置信区间。

在建立总体平均值 μ 的置信区间时，学生应考虑以下问题：

- 是否从正态分布选取随机样本？
- 总体方差是否已知？
- 样本大小是否足够大？

教师可透过电脑模拟程式绘画诸如以下置信区间的图像，帮助学生认识：

- 从总体随机抽样，从中构作一个总体参数为 95% 的置信区间，学生可预期 5% 的区间不包含该总体参数。若学生计算一置信区间，他们并不知道该区间是否包含该总体参数。
- 当样本大小增加，或选取较低的置信水平，置信区间的长度便会缩短。
- 在建立置信区间时，我们希望得到一个既狭窄(更准确的估计)及高置信水平的置信区间。惟在大部分情况下，这两个条件不能兼得。



学生须能在以下的条件下求总体平均值 μ 的置信区间：

条件	μ 的 95%置信区间	μ 的 99%置信区间
正态总体 • 已知总体方差 σ^2 • 不论样本大小 n • 样本平均值为 $\bar{x}$	$(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x} - 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
非正态总体 • 已知总体方差 σ^2 • 足够大的样本 n ($n \geq 30$) • 样本平均值为 $\bar{x}$	$(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x} - 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
非正态总体 • 不知总体方差 σ^2 • 足够大的样本 n ($n \geq 30$) • 样本平均值为 $\bar{x}$ • 样本方差为 s^2	$(\bar{x} - 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x} - 2.575 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575 \frac{s}{\sqrt{n}})$

学习单位	学习重点	时间
进阶学习单位		
21. 探索与研究	通过不同的学习活动，发现及建构知识，进一步提高探索、沟通、思考和形成数学概念的能力	7

课程阐释：

本学习单位旨在提供更多学习空间，让学生在学习其他学习单位的内容时，能参与更多有助发现及建构知识、提高探索、沟通、思考和形成数学概念的能力之活动。换句话说，这并非一个独立和割裂的学习单位，活动可在课堂中引起动机、发展、巩固或评估等不同环节进行。

鸣 谢

我们特别向下列委员会及工作小组的委员致谢，多谢他们对本小册子所提供的宝贵意见和建议。

课程发展议会数学教育委员会

课程发展议会－香港考试及评核局 数学教育委员会

检视中学数学课程专责委员会（高中延伸部分 / 选修科）

课程发展议会－香港考试及评核局 高中数学课程（单元一）工作小组

