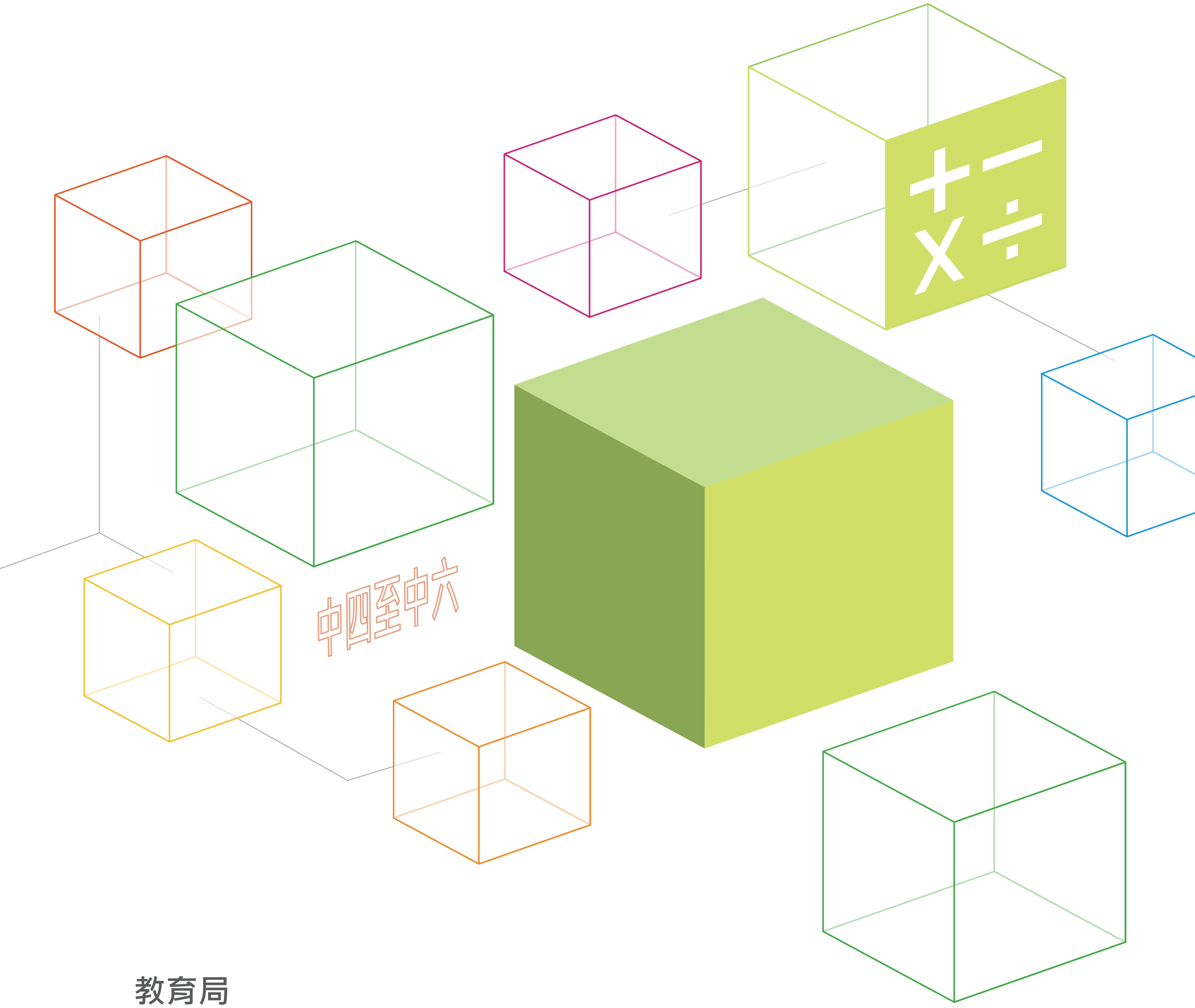
高中数学课程阐释:

单元二 (代数与微积分)



教育局
课程发展处
数学教育组
二零零九年 (二零一八年八月更新)

(空白页)

目　录

（空白页）

前 言

为配合学校课程持续发展，《数学课程及评估指引（中四至中六）》（以下简称《课程及评估指引》）于 2017 年 12 月更新。高中数学课程包括必修部分和延伸部分。延伸部分包括两个单元，分别是单元一（微积分与统计）和单元二（代数与微积分）。

在《课程及评估指引》中，单元二的学习重点以表列形式归于不同学习单位内。表中「注释」栏的内容为学习重点的补充资料。本小册子内的课程阐释旨在进一步解释：

（一） 单元二学习重点的要求；

（二） 单元二的教学建议；

（三） 单元二学习单位之间的关系和结构；及

（四） 必修部分与单元二的课程衔接。

本小册子内的课程阐释配合《课程及评估指引》内每一学习单位的「注释」栏及教学时数，可作为教师规划该学习单位教学的阔度和深度之参考。教师宜在施教单元二时，把必修部分和单元二的内容视为连贯的数学知识，并培养学生运用数学解决问题、推理及传意的能力。此外，教师须留意，《课程及评估指引》中的学习单位及学习重点的编排次序并不等同于学与教的次序，教师可因应学生需要有系统地编排学习内容。

欢迎各界人士就本小册子提供意见和建议。来函请寄：

九龙油麻地弥敦道 405 号

九龙政府合署 4 楼

教育局课程发展处

总课程发展主任（数学）收

传真：3426 9265

电邮：ccdoma@edb.gov.hk

（空白页）

基础知识

基础知识内容包括五个学习单位，可作为单元二内微积分和代数的先备知识。这些基础知识能贯通必修部分及单元二。因此，深入处理此领域内的课题并非本课程的重点。

学习单位「奇函数和偶函数」提供基础知识协助学生理解涉及奇函数和偶函数的定积分的性质。学习单位「二项式定理」是证明学习单位「求导法」内的一些法则的基础。学生须能运用数学归纳法证明命题。学习单位「续三角函数」介绍弧度法、三个新的三角函数和一些在学习微积分常用的三角公式。学生须理解弧度法在微积分中的重要性。学习单位「e 的简介」帮助学生理解 e 和自然对数为重要的数学概念，特别是在微积分求导法及积分法中十分重要。

由于基础知识与微积分和代数有很强的联系，教师应编排合适的教学次序以照顾学生的学习需要。例如，教师在教授 e 的定义时，可将学习单位「e 的简介」融入学习单位「极限」中，使学习内容更为连贯。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
1. 奇函数和偶函数	1.1 认识奇函数和偶函数及它们的图像	2

课程阐释：

学生已在必修部分学习单位「函数及其图像」学习函数的概念。在本学习单位中，学生须认识奇函数和偶函数的定义及其图像。学习重点 10.2 中有部分定积分的性质涉及奇函数和偶函数的概念。但例如，奇函数 + 奇函数 = 奇函数和偶函数 + 偶函数 = 偶函数等奇函数和偶函数的性质则不属课程所需。

学生须认识绝对值函数 $y=|x|$ 的定义及其图像，并认识它是偶函数的一个例子。此外，在学习重点 9.2 中，公式 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ 及其证明亦涉及绝对值函数的概念。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
2. 数学归纳法	2.1　理解数学归纳法原理	3

课程阐释：

数学归纳法是证明数学命题的一个重要工具。在本学习单位中，学生须能运用数学归纳法证明与有限数列求和有关的命题。学生须理解数学归纳法的原理，懂得数学归纳法的步骤并能运用数学归纳法解决问题。运用数学归纳法证明与不等式和整除性有关的命题不属课程所需。

教师可引导学生猜想一些有限数列求和的公式并让学生验证他们有关的猜想。教师应指出若已知一个命题对一些正整数为真，这仍然不足以保证该命题对所有正整数均为真。例如：当 n = 1、2、3、4 和 5 时，

命题 $1+3+5+...+(2n-1)=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ 成立。但该命题对其他正整数不为真。

当运用数学归纳法证明数学命题 $P(n)$ 对所有正整数 n 为真时，学生须注意在数学归纳法原理中以下两个步骤的重要性：

(1)　证明 $P(1)$为真。

(2)　证明对任意正整数 k，若 $P(k)$为真，则 $P(k+1)$亦为真。

教师可运用反例阐释若不能完成上述其中一个步骤时，我们不能证明命题 $P(n)$对所有正整数 n 均为真，例如：

(a)　对于任意正整数 n，$1+2+3+...+n=\frac{1+n}{2}$。

(b)　对于任意正整数 n，$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}+2$。

在例(a)中，虽然可以完成第 1 个步骤，但不能完成上述的第 2 个步骤，所以不能运用数学归纳法证明 $P(n)$对于任意正整数 n 均为真。

在例(b)中，虽然可以完成第 2 个步骤，但由于 $P(1)$不为真，所以不能运用数学归纳法证明 $P(n)$对于任意正整数 n 均为真。

学生已在必修部分学习单位「等差数列与等比数列及其求和法」学习等差和等比数列的求和公式。学生可尝试运用数学归纳法来证明有关公式。

学生须能运用数学归纳法证明学习单位 3 中的二项式定理。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
3. 二项式定理	3.1 以二项式定理展开指数为正整数的二项式	3

课程阐释：

学生已在第三学习阶段学习整数指数定律、多项式的运算和恒等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。在这学习单位介绍二项式定理时，教师可让学生认识到，当 n 很大时，运用在第三学习阶段所学的方法展开 $(a+b)^n$，运算会变得非常繁复。

学生须能运用在学习单位 2 的数学归纳法证明二项式定理。

为使二项展式的表达更加简洁，学生须认识求和记法（Σ）：

$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$，其中 n 为正整数。

学生亦须认识关系式：$\sum_{i=1}^{n} a = na$ 和 $\sum_{r=1}^{n}(ax_r \pm by_r) = a\sum_{r=1}^{n} x_r \pm b\sum_{r=1}^{n} y_r$，其中 a、b 为常数。

由于二项式定理是属于基础知识内的学习单位，涉及这定理的有关问题和例子应简单和直接。因此，以下内容不属课程所需：

- 三项式的展开
- 最大系数、最大项和二项式系数性质
- 求近似值的应用

在学习单位 7 中，学生从基本原理证明公式 $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ 时须能运用二项式定理，其中 n 为正整数。

此外，教师可向学生介绍以下的历史事实：

帕斯卡于 1654 年出版的《算术三角论》介绍二项式系数的三角形排列方法及其应用。因此，一般称这个三角形的排列方法为帕斯卡三角。事实上，早于 13 世纪，中国数学家杨辉在他的著作《详解九章算术》(1261) 已展示相同的三角形，并指出「贾宪用此术」。故此，这个三角形的排列方法亦称为「杨辉三角」或「贾宪三角」。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
4. 续三角函数	4.1 理解弧度法的概念 4.2 理解余割函数、正割函数和余切函数 4.3 理解正弦、余弦、正切函数的复角公式、二倍角公式及正弦、余弦函数的和积互化公式	15

课程阐释：

在单元二，学生须能以弧度表示角的大小并能进行弧度与角度之间的转换。在学习单位 6 和 7 中，教师可解释学习弧度法在推导公式 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 和求三角函数导数时的意义。

学生已在必修部分学习单位「续三角学」学习正弦、余弦和正切这些三角函数及其图像和性质(包括极大值、极小值和周期性)。在本学习单位中，学生须理解另外三个三角函数，即余割函数、正割函数和余切函数的定义及两个相关恒等式：$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$。学生亦须能运用这些恒等式简化其他三角数式。

学生须理解以下的公式：

- $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$
- $\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$
- $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$
- $\sin 2A=2\sin A\cos A$
- $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$
- $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

- $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$
- $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$
- $\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- $\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
- $\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- $\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

此外，教师可介绍亚历山大的克劳狄乌斯・托勒密(约公元 100 年－170 年)所构作的弦表与复角公式之间的关系和弦表中主要运用的定理为托勒密定理，而此定理是必修部分进阶学习单位中一个可探究的课题。

学生会发现 $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$、$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ 与和积互化公式是计算积分时的重要工具。

学生已在必修部分学习单位「续三角学」学习解简易三角方程，其中答案限于 0° 至 360°。在此，学生亦须能解三角方程，其中答案限于 0 至 2π 而此内容可应用到解学习重点 8.4 内有关极值的问题。

辅助角的形式不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
基础知识		
5. e 的简介	5.1 认识 e 和自然对数的定义及其记法	2

课程阐释：

学生会发现在本学习单位所学习的 e 和自然对数在微积分的学习中有重要的意义。学生已在必修部分学习单位「指数函数与对数函数」学习指数函数、对数函数和它们的图像。在本学习单位中，学生须理解指数函数 e^x 和自然对数函数 $\ln x$。

教师可用不同方法介绍 e。例如：

(1) $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

学生须认识当 n 的值增加时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 会愈来愈接近一个数而那个数就是 e。

当学生学习极限的概念后，应认识 $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。然而，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的存在不属课程所需。

教师可让学生利用计算机或试算表，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的近似值。此外，教师亦可使用动态数学软件绘制 $y = (1+\frac{1}{n})^n$ 的图像以协助学生观察当 n 增加时的 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的趋势并估计 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的值。

学生须认识 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$，并可将 $x = 1$ 代入这个数式以求 e 的近似

值。

学生须认识自然对数函数具有必修部分学习单位「指数函数与对数函数」中对数函数的所有性质。换底公式在微积分求导法中求不同底的对数函数的导数是重要的。

因本学习单位可能涉及极限概念，本学习单位的教授可安排在教授学习重点 6.1 之前。

微积分

微积分由六个有关极限、求导法（或称「微分法」）和积分法及其应用的学习单位组成。

在学习极限和求导法前，学生须掌握函数的概念、图像及性质。函数极限是微积分的一个重要部分，透过函数极限的知识，学生可理解函数导数的概念及求导法有关的法则。在求导法的应用中，学生须能解关于变率、极大值及极小值等应用题。

不定积分与求导法有一个互逆的联系，而微积分基本定理将这两个表面上不同的概念连系起来。在这阶段，定积分的应用则集中于求平面图形的面积和旋转体的体积。学生更可欣赏如何使用定积分来计算一些由非直线所组成的图形面积，例如圆面积等。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
6. 极限	6.1 理解函数极限的直观概念 6.2 求函数的极限	3

课程阐释：

学生已在必修部分学习单位「函数及其图像」和「续函数图像」学习不同函数的概念和图像。动态数学软件在探究函数图像时是十分有用的。函数极限是微积分的一个重要部分。学生须以代数方法和函数图像理解函数极限的直观概念。教师可利用动态数学软件帮助学生掌握相关概念。但须注意，函数极限的严格定义不属课程所需。

学生须认识对某些函数 $f(x)$，当 x 趋向 a 时，$f(x)$ 的极限可能不存在，诸如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 x 趋向 0 时，$f(x)$ 的极限不存在。

从函数的图像区分连续函数和不连续函数不属课程所需。

学生须认识有关函数的和、差、积、商、纯量乘法极限和复合函数极限的定理，但其证明不属课程所需。学生亦须认识这些定理所需的条件，例如，学生须认识如果定理 $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$ 成立须预设 $\lim_{x\to a}f(x)$ 和 $\lim_{x\to a}g(x)$ 同时存在。

另一方面，教师可以要求学生举出 $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$ 不成立的例子。

在本学习单位中，教师应介绍复合函数的概念。

学生须能把诸如 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ 与 $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)$ 的数式互相转化。教师可在这学习单位中当计算诸如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ 、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{5}}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{x}$ 等时介绍上述有关数式互相转化的方法。

学生须能运用两个重要的公式 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ (θ是以弧度为单位)和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ 求三角函数的导数和指数函数的导数。

教师可用不同的方法，例如运用图像或动态数学软件等方法解释上述两个公式成立的理由。

此时，学生须能求有理函数在无穷大时的极限。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
7. 求导法	7.1 理解函数导数的概念 7.2 理解求导法的加法法则、积法则、商法则及链式法则 7.3 求包含代数函数、三角函数、指数函数和对数函数的函数之导数 7.4 以隐函数求导法求导数 7.5 求显函数的二阶导数	13

课程阐释：

学生已在学习单位 6 学习函数极限的概念。在本学习单位中，学生须理解：给定函数 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，则此极限定义为 $y=f(x)$ 在 x 的导数。同时，学生须能运用函数 $y=f(x)$ 的图像来解释函数 $y=f(x)$ 在 x 的导数是当 Δx 趋向 0，通过 $(x, f(x))$ 和 $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ 的割线斜率的极限。教师亦应介绍曲线的切线的概念。

学生须能从基本原理求初等函数的导数，例如，常数函数、x^n (其中 n 为正整数)、$\sqrt{x}$ 、$\sin x$、$\cos x$、e^x 和 $\ln x$ 等。他们亦须能运用诸如互相转化数式 $\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}$ 与 $\dfrac{-\Delta x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}}$ 的方法从基本原理求函数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的导数。

学生须能从基本原理并运用二项式定理证明 $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$，其中 n 为正整数。学生亦可运用数学归纳法证明此公式。

学生须认识导数的记法：y'，$f'(x)$ 和 $\dfrac{dy}{dx}$。

判别函数的可导性不属课程所需。

学生须理解加法法则、积法则、商法则和链式法则，及能运用这些法则求函数的导数。

法则包括：

- 加法法则：$\dfrac{d}{dx}(u+v)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$
- 积法则：$\dfrac{d}{dx}(uv)=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}$
- 商法则：$\dfrac{d}{dx}(\dfrac{u}{v})=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
- 链式法则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

教师可选用诸如 $\dfrac{d\left(\sin^2 x\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\sin^2 x\right)}{d\left(\sin x\right)}\cdot\dfrac{d\left(\sin x\right)}{dx}=2\sin x\cos x$ 等适当的例子以助学生理解链式法则。

学生须理解以下的公式：

- $(C)'=0$
- $(x^n)'=nx^{n-1}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\tan x)'=\sec^2 x$
- $(e^x)'=e^x$
- $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

学生须能运用以上的法则和公式求包含代数函数、三角函数、指数函数和对数函数的函数之导数。代数函数须包括以下函数：

- 多项式函数
- 有理函数

- 幂函数 x^{α}
- 由上述各函数的加、减、乘、除和复合而成的其他函数，诸如 $\sqrt{x^2+1}$

当求诸如 $y=\log_2 x$ 等底不是 e 的对数函数的导数时，学生须能运用必修部分学习单位「指数函数与对数函数」所学的换底公式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_2 x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x\ln 2}\text{。}$$

学生须能运用隐函数求导法求导数。方程诸如 $x^3-3xy+y^3=3$ 和 $x=y+y^2$ 可作为说明运用隐函数求导法求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子。对一些方程，y 是不容易或不可能以 x 表示 y。若目的只是求导，学生不须一定要以 x 表示 y。

学生须能运用对数求导法的技巧求诸如 $y=(x^2+2)(3x-2)^2(4x+5)^6$ 和 $y=\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^4$ 等函数的导数。

学生须能求显函数的二阶导数并认识记法：y''、$f''(x)$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。学生须能运用函数 $f(x)$ 的二阶导数判别该函数的图像在 $a\le x\le b$ 的凹性。在学习重点 8.2 中，二阶导数对判别函数的凹性和求函数的极值是十分有用的。

三阶及更高阶的导数不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
8. 求导法的应用	8.1 求曲线的切线方程 8.2 求函数的极大值和极小值 8.3 描绘多项式函数及有理函数的曲线 8.4 解与变率、极大值和极小值有关的应用题	14

课程阐释：

学生已在必修部分学习求直线方程。在学习重点 8.1 中，学生不单须能找出曲线上一点的切线方程，亦能求曲线外一点至曲线的切线方程。

学生已在必修部分学习单位「函数及其图像」学习运用图解法和代数方法求二次函数的极大值和极小值。在本学习单位中，学生须能运用求导法求其他函数的极大值和极小值。

学生须理解函数递增、递减和凹性的概念并能运用有关概念求函数的极大值和极小值。

学生须能运用一阶导数和二阶导数判断函数的转向点是极大点或极小点并求函数的局部极值（即是局部极大值和局部极小值）和全局极值（即是全局极大值和全局极小值）。若 $f''(x_0)=0$，二阶导数不适用于判别在 $x=x_0$ 的极值。在这情况下，学生须采用一阶导数求函数的极值。

学生须能描绘多项式函数及有理函数的曲线。当描绘曲线时，学生须注意：

- 曲线的对称性
- x 值和 y 值的限制
- 曲线与两轴的截距

- 极大点和极小点
- 拐点
- 曲线的垂直、水平和斜渐近线

学生须能运用二阶导数判别函数的凹性，并使用这些性质求曲线上的拐点。学生可利用动态数学软件探索曲线上拐点的切线是否可以是水平或斜的。对于能力较佳的学生，教师还可进一步讨论曲线上拐点的切线是否可以是垂直的。

学生应注意到当描绘函数的曲线时，他们不一定须要考虑上述所有的特征。

求有理函数的斜渐近线方程有可能涉及长除法。教师教授这学习重点前，可巩固学生在必修部分学习单位「续多项式」中的有关多项式除法的知识。

教师应注意在学习重点 8.4 中，学生须解与变率、极大值和极小值的应用题，其中须包括涉及位移、速度和加速度的应用题。

如果应用题涉及其他学科的用语，则须在问题中提供该用语的定义，而这些用语并非在学习重点 8.4 中的「位移」、「速度」和「加速度」。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
9. 不定积分法及其应用	9.1 认识不定积分法的概念 9.2 理解不定积分的性质及运用代数函数积分公式、三角函数积分公式和指数函数积分公式求不定积分 9.3 理解不定积分在数学情境的应用 9.4 运用代换积分法求不定积分 9.5 运用三角代换法求含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 、$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 或 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 形式的不定积分 9.6 运用分部积分法求不定积分	15

课程阐释：

学生须认识不定积分是求导法的逆运算。

学生须认识不定积分的记法为：$\int f(x)dx$ 和关系式 $\int f(x)dx = F(x)+C$ 并理解这关系式中积分常数 C 的意义。

学生须认识「被积函数」、「原函数」和「积分常数」等名词。

学生须认识不同方法计算不定积分可得出看似不同答案，诸如

$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2+2x+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C_1$ 和

$\int (x+1)^2 dx = \int (x+1)^2 d(x+1) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_2$。

学生须理解以下不定积分的性质：

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，其中 k 为常数
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

学生须理解并能运用以下公式求不定积分：

- $\int k\ dx = kx + C$ ，其中 k 和 C 为常数。
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ，其中 $n \neq -1$。
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

学生须理解涉及不定积分在诸如几何学方面等数学情境的应用。如果应用题涉及其他学科的用语，则须在问题中提供该用语的定义，而这些用语并非在学习重点 8.4 中的「位移」、「速度」和「加速度」。

学生须能运用代换积分法求不定积分。

学生须能运用三角代换法求含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 、$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 或 $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ 形式的不定积分，并认识记法： $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 和 $\tan^{-1} x$ 和它们主值的概念。被积函数包括 $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 和 $\tan^{-1} x$ 的积分不属课程所需。

学生须能运用分部积分法求不定积分。教师可利用 $\int \ln x\, dx$ 作例子解释分部

积分法。须注意在单元二求一个积分时只限使用最多两次分部积分法。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
10. 定积分法	10.1 认识定积分法的概念 10.2 理解定积分的性质 10.3 求代数函数、三角函数和指数函数的定积分 10.4 运用代换积分法求定积分 10.5 运用分部积分法求定积分	10

课程阐释：

学生须认识定积分作为和的极限及由此定义求定积分。学生须认识记法：$\int_a^b f(x)dx$ 和哑变量的概念，例如 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$。以定积分法求无穷数列之和不属课程所需。

学生须理解以下定积分的性质：

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$，其中 k 是常数
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$。
- 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$。

教师可和学生探讨这些性质的几何意义。

当定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 中的 $f(x)$ 涉及绝对值且为奇函数或偶函数时，学生可运用偶函数和奇函数定积分的性质得出诸如：

$\int_{-3}^{3} x|x|\,dx = 0$，其中 $y = x|x|$ 为奇函数。

求其他涉及绝对值的被积函数的定积分，则不属课程所需。

当运用代换积分法计算定积分时，学生须能相应地改变定积分的上限和下限。

学生须认识微积分基本定理并透过这定理认识定积分和不定积分的关系：

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$，其中 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$。

教师可介绍微积分基本定理的证明。

学生须能运用分部积分法求定积分，但求一个积分时最多运用分部积分法两次。

学习单位	学习重点	时间
微积分		
11. 定积分法的应用	11.1 理解以定积分求平面图形面积的应用 11.2 理解以定积分求沿坐标轴或平行于坐标轴的直线旋转而成的旋转体体积的应用	4

课程阐释：

在本学习单位中，定积分的应用只限于求平面图形面积和旋转体体积。教师可以几何方法表示定积分和平面图形面积之间的关系。

学生须理解及能运用圆盘法求旋转体体积，其中须包括求诸如以曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=e^{-x^2}$，其中 $1\le x\le 2$，围成的面积沿 y 轴旋转而成的旋转体体积。运用外壳法求旋转体体积不属课程所需。

为使学生欣赏定积分法的应用，教师可引导学生运用定积分法推导圆面积、直立圆锥体体积和球体体积公式。

代数

代数内容包括行列式、矩阵、线性方程组及向量。

学生须理解矩阵的概念、运算及性质、逆矩阵的存在及行列式。行列式是研究矩阵性质的重要工具。

学生已在第三学习阶段学习运用代数方法和图像法解联立二元一次方程。在单元二，学生须认识相容（有解）和不相容（无解）的概念并进一步探究线性方程组相容性或不相容性的条件。他们须能运用克莱玛法则、逆矩阵和高斯消去法解线性方程组。教师应让学生知道每一个方法的强项与弱项及如何选择合适的方法解题。

为进一步延伸学生在代数的知识，在这阶段向学生介绍向量的概念、运算及性质。纯量积和向量积是研究几何性质包括平行和正交的两个重要工具。此外，学生亦须能运用向量方法求得两向量的交角和三角形或平行四边形的面积等。

学习单位	学习重点	时间
代数		
12. 行列式	12.1 认识二阶及三阶行列式的概念	2

课程阐释：

行列式是在随后的两个学习单位中学习矩阵和线性方程组的重要先备知识。

教师应强调行列式在单元二的主要应用在求逆矩阵和解线性方程组。

学生须认识诸如以下二阶和三阶行列式的定义：

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

- 利用 $\begin{array}{cccccc} & & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ & & & + & + & + \end{array}$ 方法表示三阶行列式如下的结果：

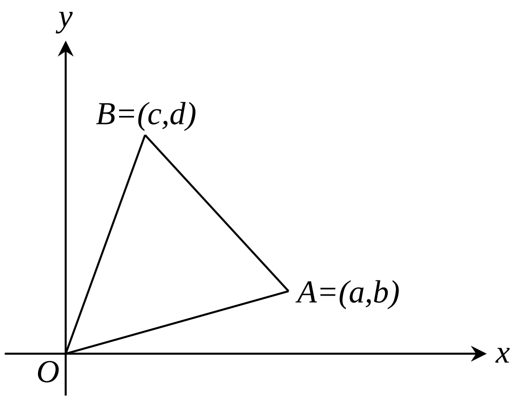
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

教师可向学生解释以上三种三阶行列式的定义是相同的。

学生须认识 $|A|$ 和 $\det A$ 为矩阵 A 的行列式的两个常用记法。

教师可向学生介绍行列式的一些几何上的应用，例如：

如下图，OAB 为一经过原点 O 的三角形，其中 $A=(a,b)$，$B=(c,d)$，而 O、A 和 B 则按逆时针方向排列。



$$\text{三角形 } OAB \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\text{。}$$

行列式的性质不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
代数		
13. 矩阵	13.1 理解矩阵的概念、运算及其性质 13.2 理解二阶及三阶方阵逆矩阵的概念、运算及其性质	10

课程阐释：

学生须理解矩阵的一般形式，有 m 行和 n 列的矩阵称「$m \times n$ 矩阵」。学生须能对矩阵进行加法、减法、纯量乘法和乘法及理解以下性质：

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $A(BC)=(AB)C$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)C=AC+BC$
- $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)AB$
- $|AB|=|A||B|$

学生须理解矩阵乘法的不具交换性质，即 AB 不一定等于 BA。

$|AB|=|A||B|$，其中 A 和 B 为 n 阶方阵的一般证明不属课程所需。然而，对于二阶行列式的情况，其证明较为容易，教师可与学生进行较深入的讨论。

学生须认识「零矩阵」、「单位矩阵」、「转置矩阵」和「方阵」这些名词。学生须理解二阶和三阶方阵逆矩阵的概念、运算及以下性质：

- A 的逆矩阵是唯一的
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

其中 A 和 B 为可逆矩阵，λ 为非零纯量。

学生须能判断方阵的是否可逆，并能求可逆矩阵的逆矩阵，例如使用伴随矩阵和基本行运算等方法以求得逆矩阵。此外，在某些情况下，学生亦可能须要使用数学归纳法来证明一些有关涉及矩阵的命题。

学生在判断 2×2 矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是否可逆时，可考虑解以 x, y, z 及 w 为未知数的矩阵方程 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

学习单位	学习重点	时间
代数		
14. 线性方程组	14.1 以克莱玛法则、逆矩阵和高斯消去法解二元和三元线性方程组	6

课程阐释：

学生已在第三学习阶段学习运用代数方法和图像法解二元一次方程。在这学习单位中，学生须能运用克莱玛法则、逆矩阵和高斯消去法解二元和三元线性方程组，并须认识「齐次」、「非齐次」、「相容」和「不相容」等名词。

克莱玛法则是行列式中一个重要的课题。学生须认识到，由克莱玛法则，对于线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，若 Δ 为系数矩阵的行列式，其中 $\Delta \neq 0$，方程组有唯一解。若 $\Delta=0$，则不能使用克莱玛法则。教师可与学生讨论 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 与以下等式的逻辑关系：

$\Delta \cdot x = \Delta_x$，$\Delta \cdot y = \Delta_y$ 及 $\Delta \cdot z = \Delta_z$ (*)。

例如：

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解是否必然是(*)的解？

(*)的解是否必然是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解？

Δ_x 是以列矩阵 $\mathbf{b}$ 取代系数矩阵的第一列而得出的行列式；Δ_y 是以列矩阵 $\mathbf{b}$ 取代系数矩阵的第二列而得出的行列式；Δ_z 是以列矩阵 $\mathbf{b}$ 取代系数矩阵的第三列而得出的行列式。此外，学生须认识以下的一些结论：

情况	条件	结论
1	$\Delta \neq 0$	方程组有唯一解。
2	$\Delta = 0$ 及其中最少须须 Δ_x，Δ_y 或 $\Delta_z \neq 0$	方程组没有解。
3	$\Delta = 0$ 及 $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$	方程组没有解或有无限多个解。

在情况 1 中，方程组有唯一解及 $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$。

在情况 2 中，由于已知条件与(*)互相予盾，故方程组没有解。

在情况 3 中，可利用以下例子解释方程组没有解或有无限多个解。

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \text{(没有解)} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \\ 3x+3y+3z=9 \end{cases} \text{(无限多个解)}$$

矩阵是解线性方程组的另一个重要的工具。利用学习单位 13 所得知识，学生须能以矩阵形式表示线性方程组。若系数矩阵的逆矩阵存在，可运用逆矩阵方法解线性方程组。学生须认识在逆矩阵不存在时，这方法失效。

学生亦须能运用高斯消去法解线性方程组。借着建立增广矩阵，利用基本行运算解线性方程组。

、

教师可借着解线性方程组，展示矩阵、行列式和基本行运算之间的联系。

学生须理解：一个齐次二元或三元线性方程组有非平凡解当且仅当它的系数矩阵为奇异矩阵。教师可运用一些简单齐次二元线性方程组引导学生发现此定理。学生亦须理解一个齐次二元或三元线性方程组必定相容，且知道若它的系数矩阵为奇异矩阵时如何找出其非平凡解。

学习单位	学习重点	时间
代数		
15. 向量的简介	15.1 理解向量及纯量的概念 15.2 理解向量的运算及其性质 15.3 理解向量在直角坐标系统的表示法	5

课程阐释：

在本学习单位中，教师应强调模和方向是向量两个重要的概念。教师应向学生解释纯量和向量的不同之处。在讨论向量的性质时，向量只限于 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$。学生须理解零向量、单位向量、相等向量和负向量的概念。

学生须认识印刷时采用的向量记法(包括 $\mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{AB}$)以及书写时采用的记法(包括 $\vec{a}$、 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\underset{\sim}{a}$)和表示向量的模的记法(包括 $|\mathbf{a}|$ 和 $|\vec{a}|$)。

学生须理解向量的加法、减法和纯量乘法的概念，并理解以下有关向量的性质：

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
- $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$
- $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$
- $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$
- 若 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b}$ (当中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为非零并且互相不平行的向量)，则 $\alpha=\alpha_1$ 及 $\beta=\beta_1$。

教师可运用向量在直角坐标系统的表示法来讨论以上的向量性质。

教师应介绍方向分别与正 x 轴、正 y 轴和正 z 轴相同的单位向量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$。学生须能分别以 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ 和 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 表示任何在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 的向量。学生须理解以下公式：

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，当 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$。

2. $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 和 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， 当中 θ 是非零向量 $\overrightarrow{OP}$ 与正 x 轴的交角，而 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$。

3. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$。

方向余弦的概念不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
代数		
16. 纯量积与向量积	16.1 理解向量的纯量积（点积）的定义及其性质 16.2 理解在 $\mathbf{R}^3$ 中向量的向量积（叉积）的定义及其性质	5

课程阐释：

学生须理解向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的纯量积的定义及以下性质：

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
- $\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
- $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2\geq 0$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$ 当且仅当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\geq|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

教师可采用以下其中一个定义介绍向量积：

(1) 对于两个在 $\mathbf{R}^3$ 的非零及互不平行的向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$，其中 θ 为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的交角($0°<\theta<180°$)，$\hat{\mathbf{n}}$ 是一个与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均正交（垂直）的单位向量，且 $\mathbf{a}$ 、$\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 满足右手定则。否则，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ 。

(2) 若向量 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$，

则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$ 。

学生须理解以行列式表示向量积：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$。

学生须理解以下向量积的性质：

- $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
- $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
- $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
- $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$

教师应提醒学生在学习重点 16.2 中，所有关于向量的讨论只限于 $\mathbf{R}^3$。

教师应在本学习单位和学生讨论纯量积和向量积的几何意义，并在学习单位 17 中强调纯量积和向量积的几何应用。

纯量三重积的定义及其性质和「平行六面体」一词均不属课程所需。

学习单位	学习重点	时间
代数		
17. 向量的应用	17.1 理解向量的应用	6

课程阐释：

学生已在第三学习阶段学习在直角坐标系统下两线平行和垂直的条件。在本学习单位中，学生须能运用向量的性质来解决涉及平行和正交的问题。

例如：若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为非零向量，

1. $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ 其中 λ 为实数，当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相平行。
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 正交。
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$ 当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相平行。

学生亦须能运用向量的概念解涉及线段的分割和一个向量至另一向量的投影的问题。此外，学生须能运用纯量积和向量积分别求为两向量之间的夹角（或称「交角」）和三角形或平行四边形的面积。

学习单位	学习重点	时间
进阶学习单位		
18. 探索与研究	通过不同的学习活动，发现及建构知识，进一步提高探索、沟通、思考和形成数学概念的能力	7

课程阐释：

本学习单位旨在提供更多学习空间，让学生在学习其他学习单位的内容时，能参与更多有助发现及建构知识、提高探索、沟通、思考和形成数学概念的能力之活动。换句话说，这并非一个独立和割裂的学习单位，活动可在课堂中引起动机、发展、巩固或评估等不同环节进行。

鸣 谢

我们特别向下列委员会及工作小组的委员致谢，多谢他们对本小册子所提供的宝贵意见和建议。

课程发展议会数学教育委员会

课程发展议会 — 香港考试及评核局数学教育委员会

检视中学数学课程专责委员会（高中延伸部分／选修科）

课程发展议会 — 香港考试及评核局高中数学课程（单元二）工作小组

(空白页)