

示例一： 函数的基本概念(一)

- 目标** :
1. 联系初中数列「输入 - 处理 - 输出」的概念与应变
量及独立变量的关系；
 2. 从函数的图像、表列和符号方面来理解函数的基本
概念。

学习阶段 : 4

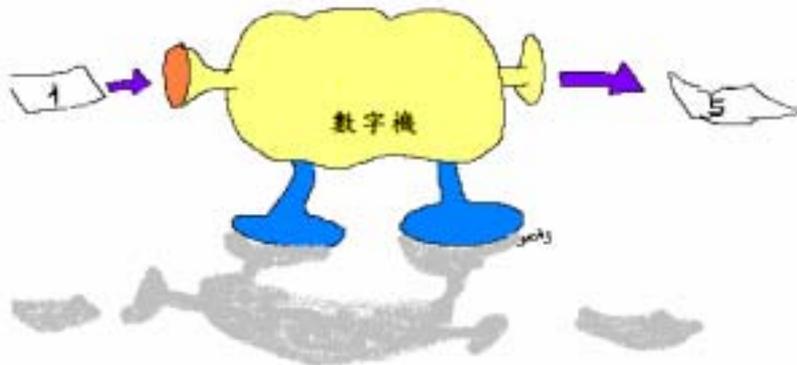
学习单位 : 函数及其图像

所需教材 : 工作纸

- 预备知识** :
- (1) 数列的项数与项值的意义
 - (2) 由给出点的坐标，在直角坐标平面上画出对应点
 - (3) 理解代数语言并懂得代入法

教学内容 :

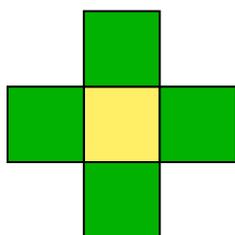
1. 教师与学生重温数列的概念，并让学生观察工作纸第 1 题的图
案并完成第 2 题。
2. 教师与学生讨论工作纸内第 2(a)及 2(b)的答案，并与学生讨论
解题策略及如何得出有关答案；由此引出“砖的数目”受“图
案编号”的影响，并用以下数字机器图像介绍应变变量及自变量的
名称。



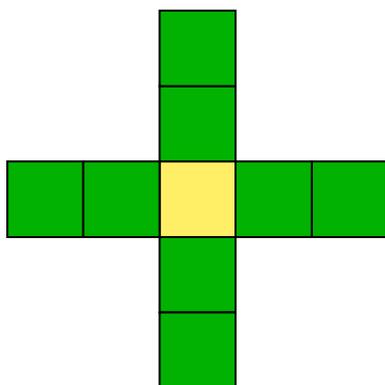
3. 教师着学生完成工作纸第 3 题，与学生讨论答案。从 x 与 y 图像观察每一 x 值得出唯一的 y 值，从而介绍函数的概念及讨论函数中「自变量决定应变量」的概念。教师与学生讨论“砖的数目”是否是“图案编号”的函数，及以代数式表示上述 x 与 y 关系。
4. 介绍 $f(x)$ 的符号及 $f(1)$ 、 $f(2)$ 等符号的意义并由表一的数值验算及运用以上符号的做法。
5. 教师向学生强调两点：
 - (a) x 所表示的是一变量，而非一个固定或未知数；
 - (b) 我们不一定用「 x 」表输入值，例如，我们可用「 z 」表输入值，这时候，“砖的数目”与“图案数目”的关系则表示为：
$$f(z) = 4z + 1。$$
6. 教师须提醒学生初中数列内以及本示例活动的输入值必须为自然数，但一般函数的自变量并不局限于自然数，在中学阶段往往以实数为定义域。同时，教师亦提出工作纸第 3 题图像应为 8 点而不是一条直线，然而，若扩阔输入值为实数时，而满足函数 $f(x) = 4x + 1$ 的图像则为连续直线。

工作纸：函数的基本概念

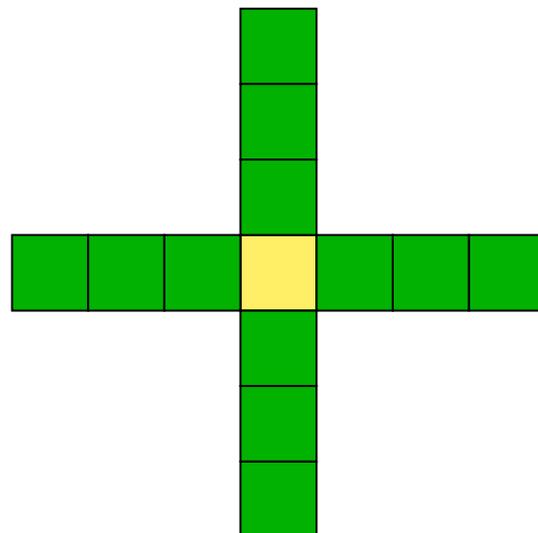
1. 一工人按以下规律砌阶砖图案。



图案 1



图案 2



图案 3

2. (a) 根据此规律，完成下面的表格。

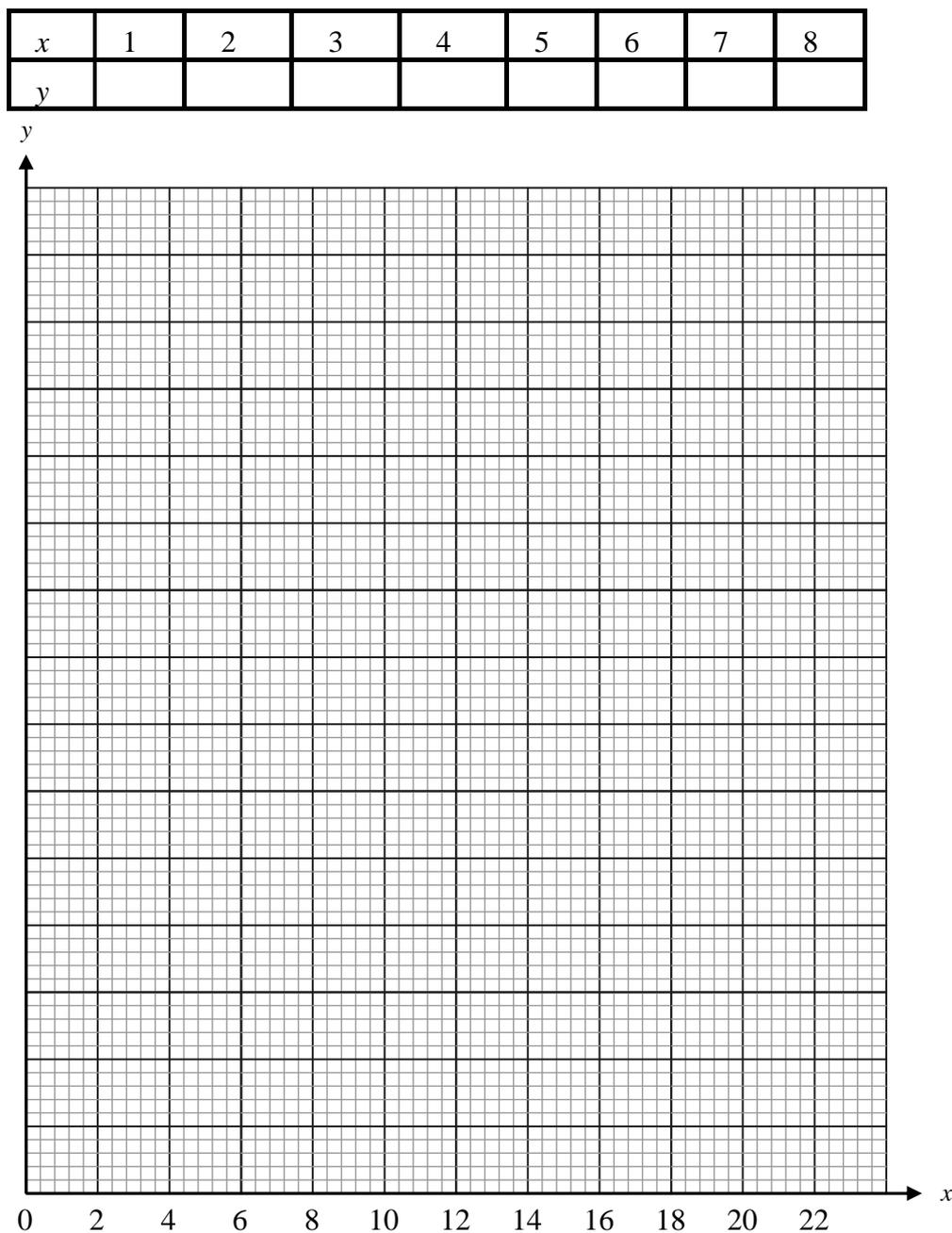
图案编号	砖的数目	图案编号	砖的数目
1	5	5	
2		6	
3		7	
4		8	

表一

(b) 求图案 12 所需砖的数目。

(c) 求图案 n 所需砖的数目。

3. 以 x 代表图案编号，以 y 代表砖的数目，并利用表一的数据，在以下的直角坐标平面画出表示 x 与 y 的关系的图像。



- (a) 描述上图的特征。
-
- (b) 从图像的趋势，试猜测当 $x = 12$ 及 $x = 16$ 时， y 的对应值。
-
- (c) 观察图像，每个 x 的数值是否有唯一对应的 y 值？
-

教师注意事项：

1. 本示例活动估计需时约 20-30 分钟。
2. 教师提到「函数」这名称时，可交代「函数」是‘function’的中译。一般相信，「函数」这中译是出自清代数学家李善兰的手笔，有关李的背景，可参考：

<http://www.dyu.edu.tw/~mfht206/history/19/china.htm>

当时，「函」与「含」两字互通，李把‘function’译作「函数」，取其有「含有变量」的意思。用李的话说，「凡式中含天，为天_之函数」（「天」、「地」、「人」、「物」是当时表示未知数或变量的 4 个字）；「凡此变量中函彼变量，则此为彼之函数」（此为李对 ‘If the variable quantity contains another variable quantity, then the former is a function of the latter’ 之中译）。因此，函数不是一个数。今天，我们知道，函数是一种特定的对应 (correspondence) 或关系 (relation) (今天函数的概念不是一蹴而就的，它的历史发展，可参阅 Kleiner, 1989)。事实上，有人(如台大刘福增)建议，‘function’应译作「函应」而非「函数」。

3. 本示例由学生初中所接触的数列观念作起点，带出输出值（应变_量）由输入值（自变量）决定的函数观念；再辅以表列式（工作纸第 2(a) 题）、代数式（工作纸第 2(c) 题）及图像（第 3 题）作比对。教师可让学生从这函数例子的不同表达式去初步接触函数的概念。更详细函数不同表达式的讨论可参阅示例四。
4. 在讨论函数的概念时，教师可引入日常生活例子，如汽水机为例，有关例子可参阅示例二及示例三。

5. 工作纸答案建议如下：

2. (a)

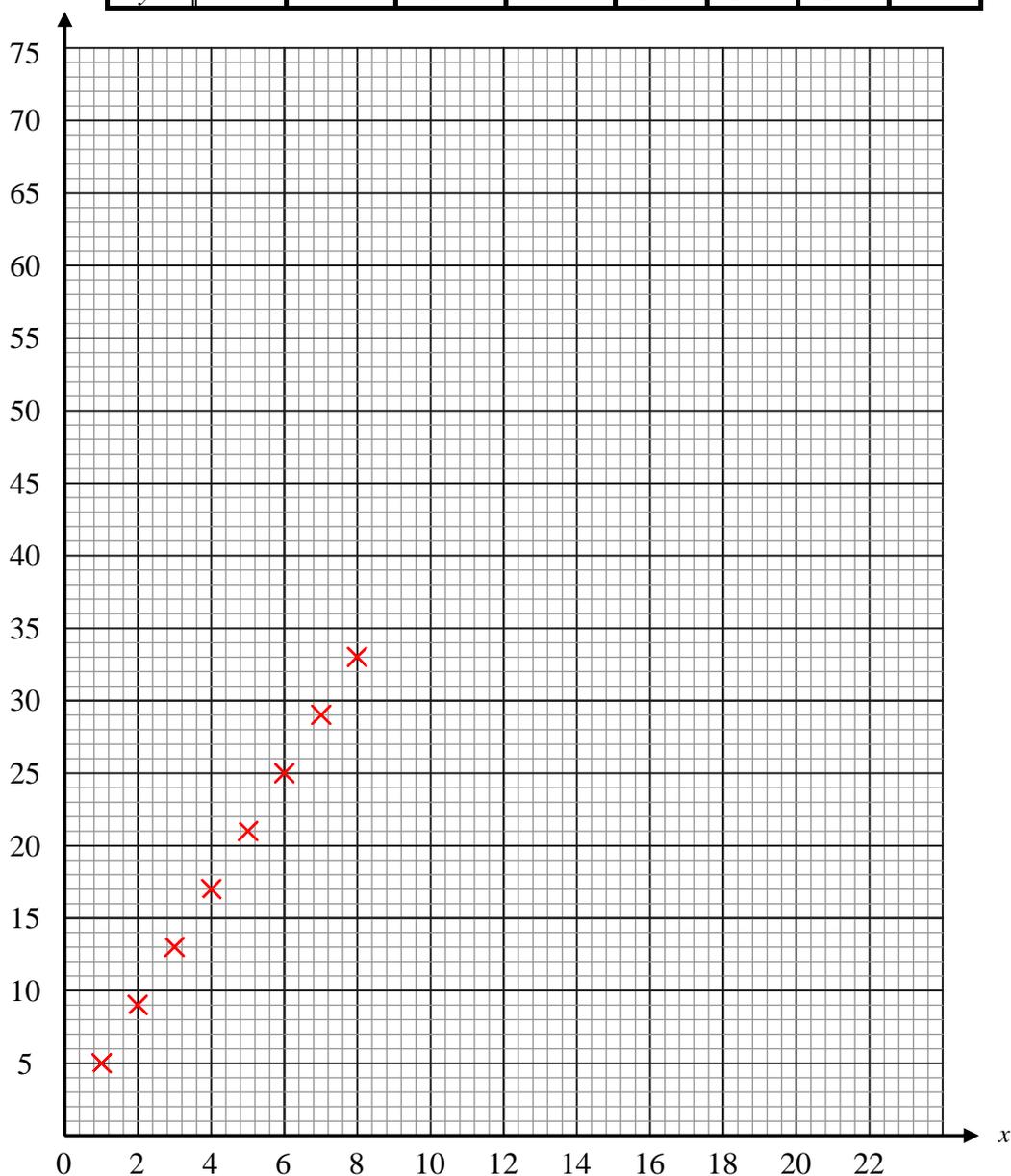
图案编号	砖的数目	图案编号	砖的数目
1	5	5	21
2	9	6	25
3	13	7	29
4	17	8	33

(b) 49

(c) $4n+1$

3.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	9	13	17	21	25	29	33



- (a) 该 8 点在一条直线上而此直线的 y -轴截距为 1。
- (b) 当 $x = 12$ 时, $y = 49$; 当 $x = 16$, $y = 65$ 。
- (c) 是。

参考书目 :

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept. *The college Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.

刘福增 (2003). 《逻辑思维》. 台北 : 心理出版社。