示例十：变换对函数图像的影响(三)

目　　标 ： 1. 认识反射对函数图像的影响与代数式对应的变化；
2. 认识函数 $y = f(kx)$ 及 $y = kf(x)$ 与 $y = f(x)$ 图像的关系。

学习阶段 ： 4

学习单位 ： 函数及其图像

所需教材 ： (1) 电子表格软件如微软 *Excel* (*graph.xls*)，绘图软件如 *Graphmatica* 和工作纸
(2) 印有二次及三次函数图像的图表纸和胶片

预备知识 ： (1) 认识 $f(x) = x^2$ 及 $f(x) = x^3$ 的图像
(2) 认识二次及三次函数的一般式

教学内容：

1. 教师先与学生重温函数图像平移与其相应代数式的关系。

函数 $f(x)$ 的改变	对应的图像变换
$y = f(x) + k$，其中 $k > 0$	向上移动 k 个单位
$y = f(x) - k$，其中 $k > 0$	向下移动 k 个单位

函数 $f(x)$ 的改变	对应的图像变换
$y = f(x+h)$，其中 $h > 0$	向左移动 h 个单位
$y = f(x-h)$，其中 $h > 0$	向右移动 h 个单位

教师可用例子，如 $y = f(x)$ 而 $f(x) = x^3$ 与 $y = (x-1)^3$ 及 $y = x^3 - 1$ 考查学生对平移变换的掌握。

2. 教师让学生猜想函数 $y = -x^3$ 即 $y = -f(x)$ 的图像与原有 $y = x^3$ 图像有何关系。教师可提供印有 $y = x^3$ 图像的胶片，让学生分组探究 $y = -x^3$ 的图像，并要求他们解释这两个图像各对应点的坐标关系。

3. 教师利用 *Excel* 档案 *graph.xls* 与学生探究不同二次及三次函数（如 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 图像）以 x-轴作反射与其代数式的关系。其中，让学生留意
   (a) 新图像与原有图像穿过 x-轴的点的数目及这些点的坐标；
   (b) 新图像与原有图像穿过 y-轴的点的数目及这些点的坐标；
   (c) 新图像与原有图像各对应点的坐标；
   (d) 新代数式与原有代数式各项系数的关系。

4. 教师与学生探讨若将函数 $y = f(x)$ 而 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ 改为 $y = (-x)^3 + 3(-x)^2 - 1$（即 $y = f(-x)$），新图像与原有图像的关系。教师可派发印有 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 的图像胶片，让学生探索图像的相应变化及与同学讨论两个图像各对应点的关系。

5. 教师由此带出 $y = f(-x)$ 是将 $y = f(x)$ 图像以 y-轴作反射变换，而 $y = -f(x)$ 则是将 $y = f(x)$ 图像以 x-轴作反射变换。
   教师利用 *Excel* 档案 *graph.xls* 探讨不同二次函数及三次函数作 x-轴反射及 y-轴反射的代数式、表列式及图像表示的关系，其中须比较：
   (a) 以 y-轴作反射的图像与原有图像与 x-轴／y-轴相交点的坐标；
   (b) 以 x-轴作反射及以 y-轴作反射两者图像的分别；
   (c) 以 x-轴作反射及以 y-轴作反射两者代数式的分别。

6. 教师可与学生进行以下游戏，以巩固他们对反射变换图像的认识：
   (a) 将印有 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 图像的胶片摆放在图表纸的不同位置而要求学生找出以 x-轴作反射／或以 y-轴作反射的对应图像；
   (b) 教师给出经变换的新函数的图像胶片要求辨析其所经的变换（即判断是以 x-轴／y-轴作反射）。

7. 教师指出 $y = -f(x)$ 只是 $y = kf(x)$ 的特殊例子，从而与学生讨论若函数 $y = f(x)$ 改为 $y = 2f(x)$，新函数的图像与原有图像的关系。教师用多项式函数如 $f(x) = x^2$ 作讨论。学生若已学了三角函数，可考虑用 $f(x) = \sin x$ 等作讨论。但是，教师亦可在学生未有三角函数的观念之先，纯以表列值或图像的变化而无须引入该函数为正弦函数来讨论 $y = 2f(x)$。

8. 教师亦可利用绘图软件 *Graphmatica* 显示不同 $k > 1$ 的值时，$y = kf(x)$ 是将图像作縱方向放大（即沿 y-轴伸展），反之，亦

须讨论当不同 k 值而 $0<k<1$ 时，$y=kf(x)$ 是将图像作縱方向缩小（即沿 y-轴收缩）。

9. 同样地，教师可利用软件 *Graphmatica* 与学生探讨 $y=f(x)$ 与 $y=f(kx)$（$k>1$）的图像变化。教师可与学生讨论
   (a) 两个图像的相似地方；
   (b) 两个图像与 x-轴相交点坐标的特点；
   (c) 若 $y=f(x)$ 有极大值，比较 $y=f(kx)$ 与 $y=f(x)$ 极大值；
   (d) 若函数有周期性，比较 $y=f(kx)$ 与 $y=f(x)$ 的周期；
   (e) 比较 $y=f(kx)$，$k>1$ 与 $0<k<1$ 时，两者的图像与以上(a)至(d)相似及不同的地方。

10. 最后，教师作出总结如下：

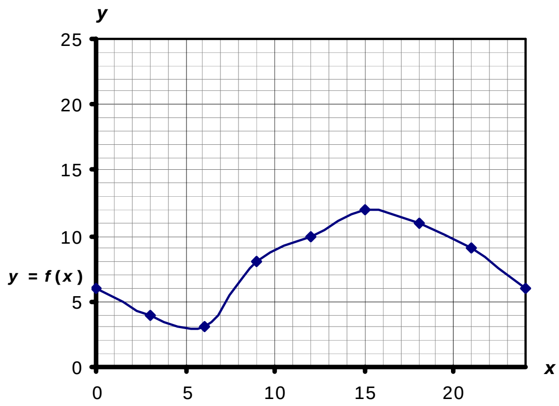
函数的代数式		函数的图像
$y=kf(x)$	$k>1$	沿纵轴（y-轴）伸展 k 倍
	$0<k<1$	沿纵轴（y-轴）缩少 k 倍
$y=f(kx)$	$k>1$	沿 x-轴伸展 k 倍
	$0<k<1$	沿 x-轴缩少 k 倍

11. 教师派发工作纸作巩固活动，要求学生
   (a) 由给出图像的变化，判断所经过变换及对应的代数式；
   (b) 由给出代数式的变化，画出对应变换图像的略图。

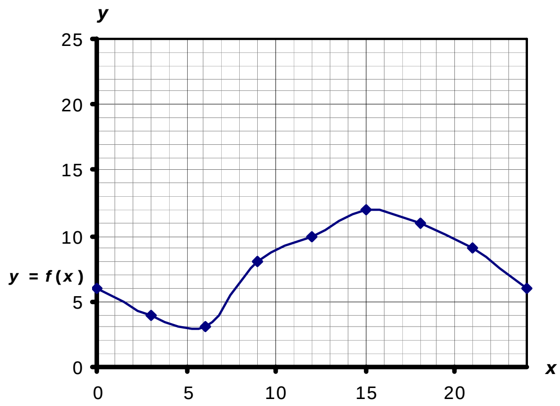
工作纸

1．　在问题(a)至(e)中，已给出 $y=f(x)$ 的图像，依给定的函数变换画出变换后的图像。

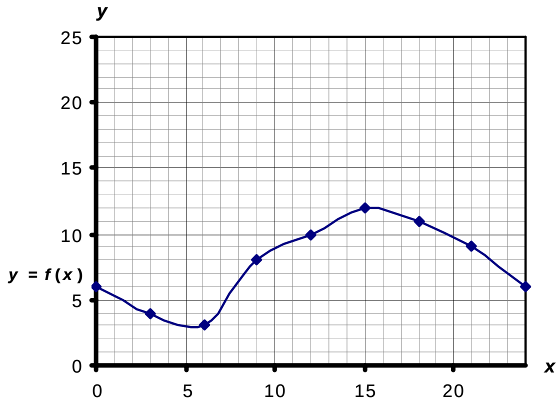
(a) 画出 $y=2f(x)$ 的图像。



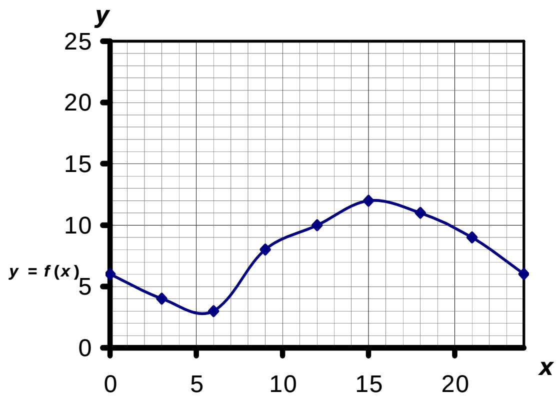
(b) 画出 $y=\frac{1}{2}f(x)$ 的图像。



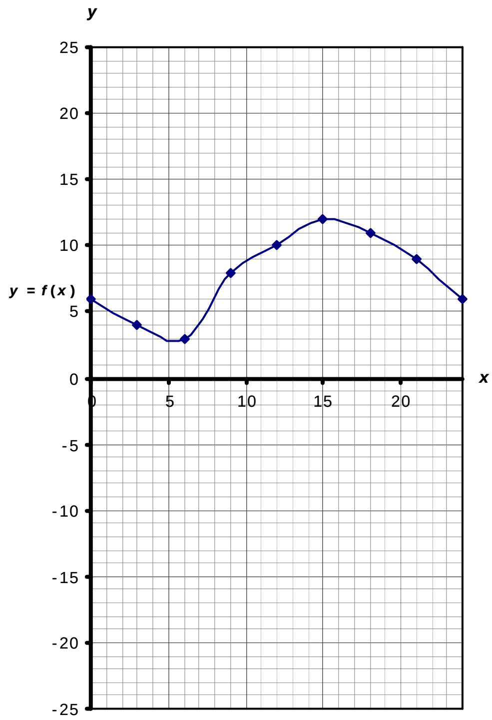
(c) 画出 $y=f(2x)$ 的图像。



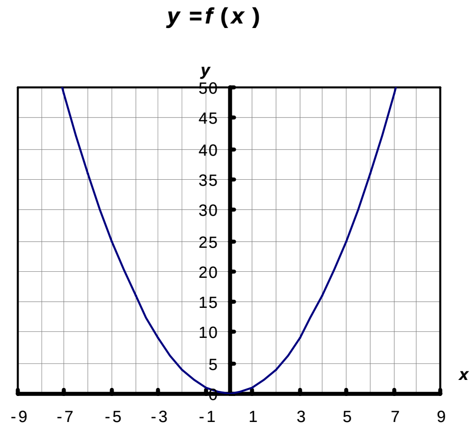
(d) 画出 $y=f(\frac{x}{2})$ 的图像。



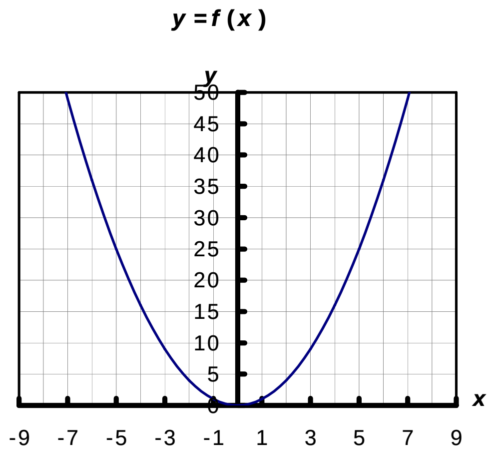
(e) 画出 $y=-f(x)$ 的图像。



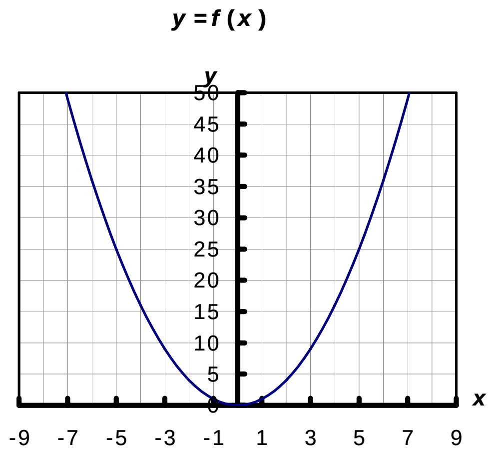
2. 右边是二次函数 $f(x)=x^2$ 的图像，依给定的函数变换，画出变换后的图像。



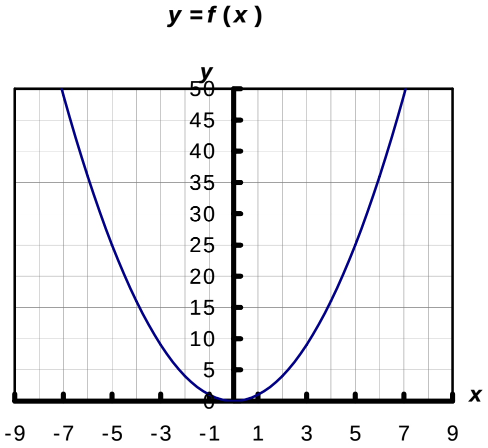
(a) 画出 $y=f(2x)$ 的图像。



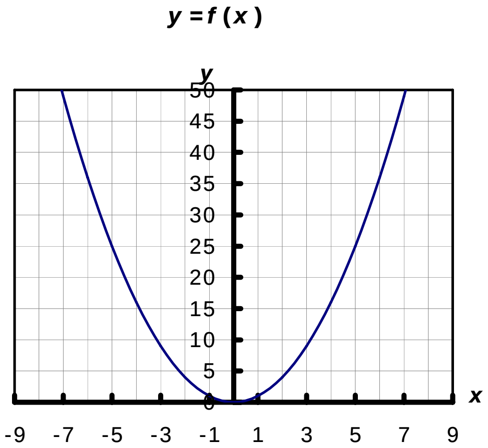
(b) 画出 $y=2f(x)$ 的图像。



(c) 画出 $y = 2f(x) + 10$ 的图像。



(d) 画出 $y = 2f(x+5)$ 的图像。



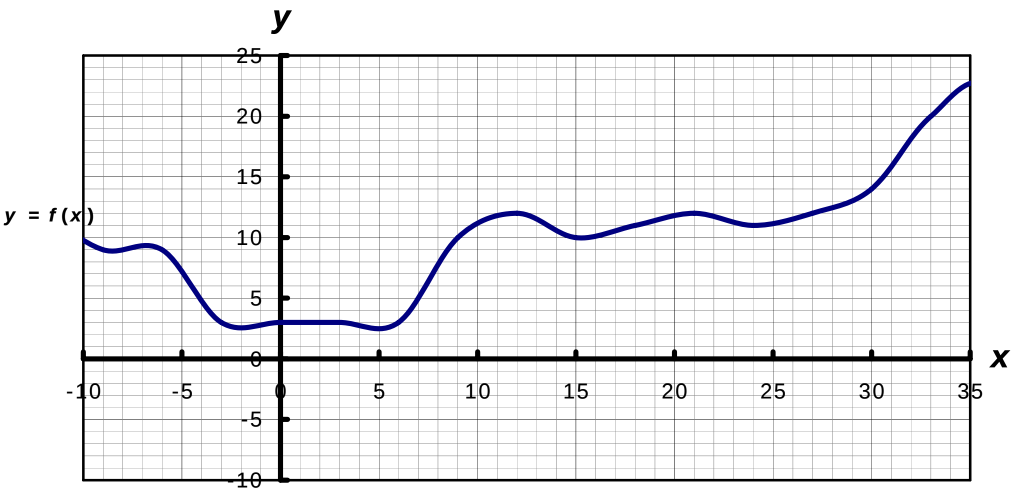
(e) 比较图像(c) $y = 2f(x) + 10$ 及图像(d) $y = 2f(x+5)$，是否相同？换言之，$y = kf(x) + k \cdot h$ 是否相当于 $y = kf(x+h)$？

____

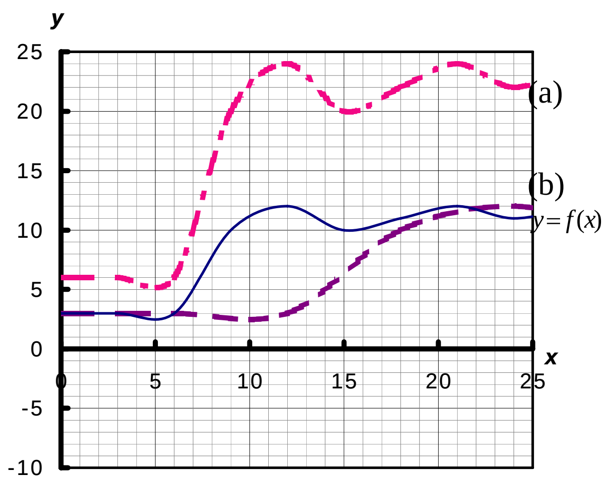
____

3. 由给出的图像决定对应的函数变换的代数式。

原来图像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



变换后的图像 $(0 \le x \le 25)$

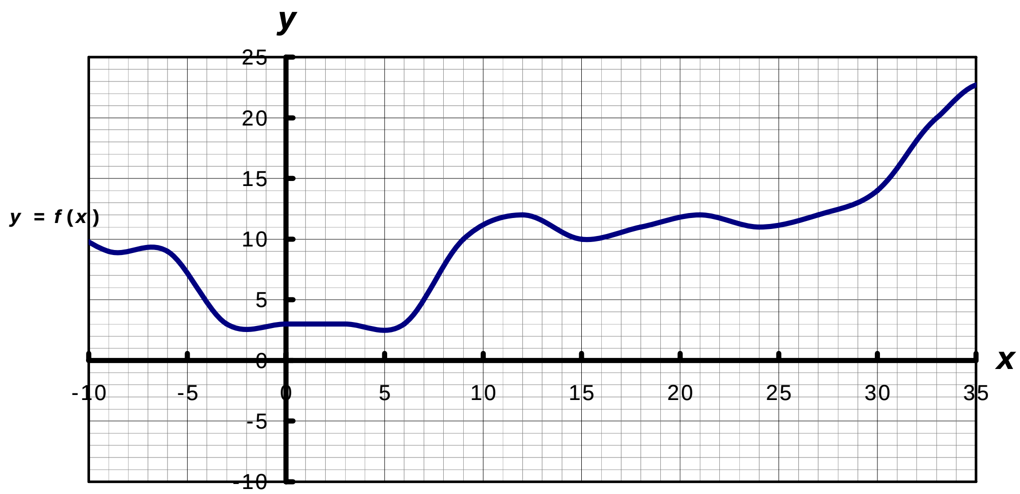


(i) 考虑图像 (a) 与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像 (a) 的方程 ______________________。

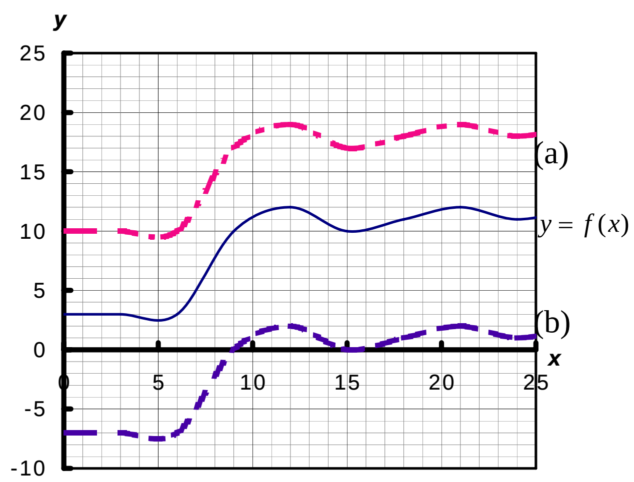
(ii) 考虑图像 (b) 与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像 (b) 的方程 ______________________。

4． 由给出的图像决定对应的函数变换的代数式。

原来图像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



变换后的图像 $(0 \le x \le 25)$

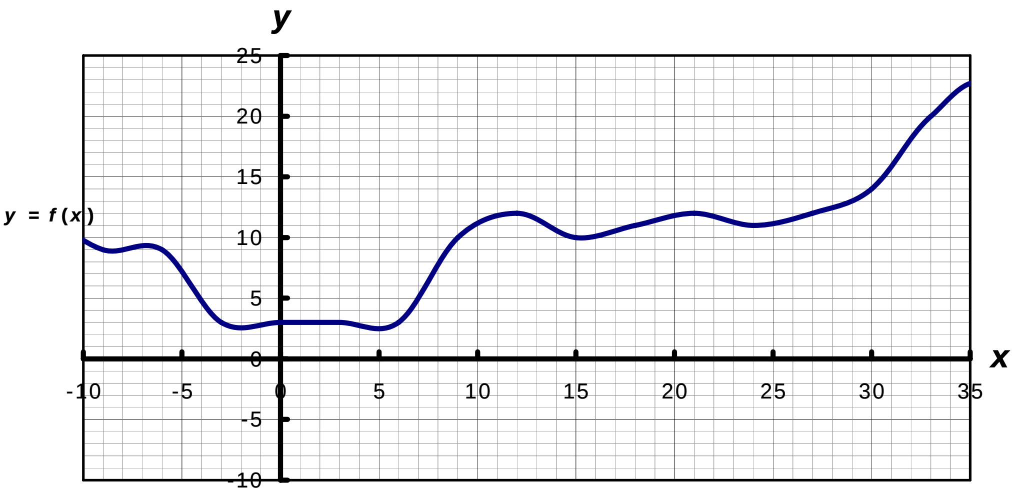


(i) 考虑图像(a)与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像(a)的方程 ______________________。

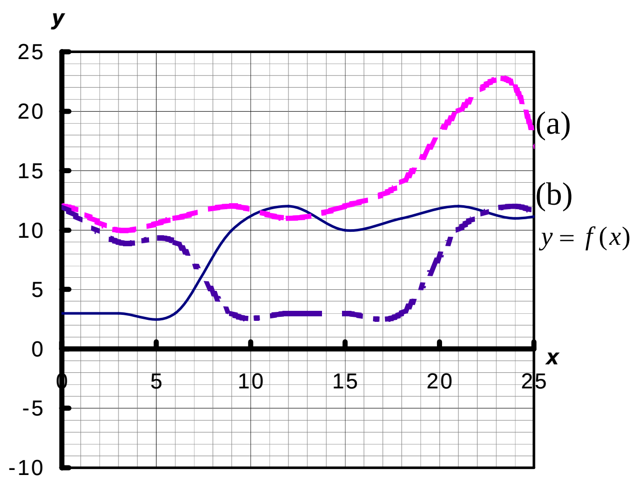
(ii) 考虑图像(b)与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像(b)的方程 ______________________。

5. 由给出的图像决定对应的函数变换的代数式。

原来图像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



变换后的图像 $(0 \le x \le 25)$

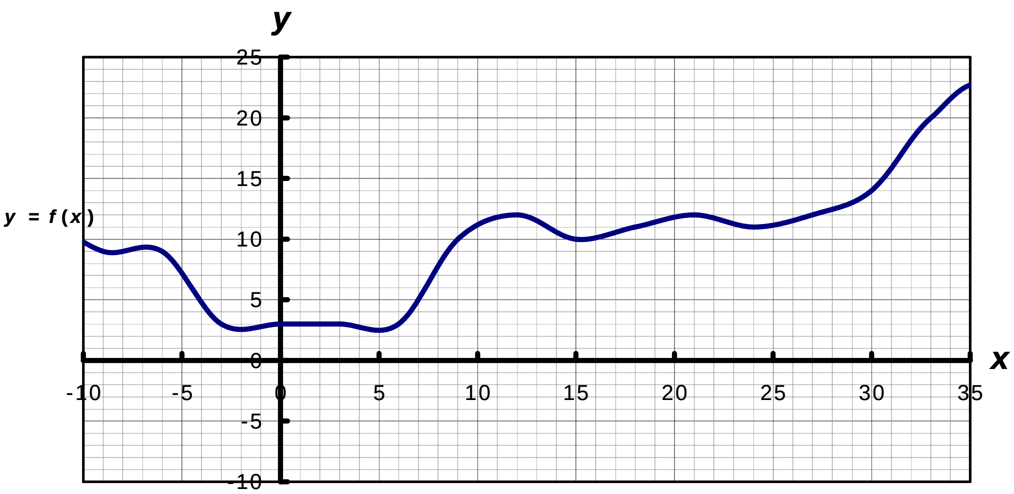


(i) 考虑图像 (a) 与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像 (a) 的方程 ____________________。

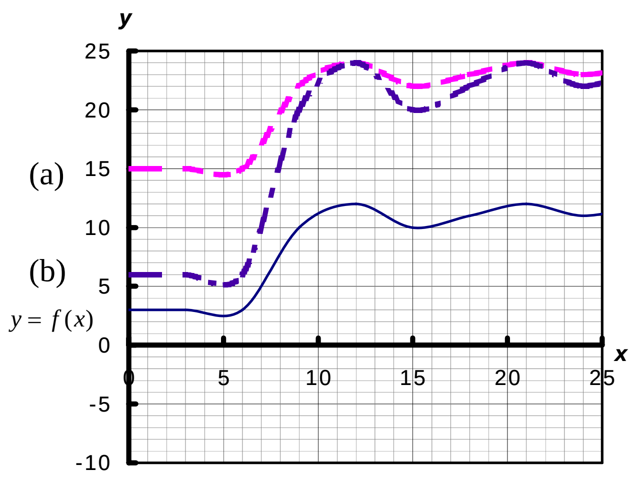
(ii) 考虑图像 (b) 与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像 (b) 的方程 ____________________。

6． 由给出的图像决定对应的函数变换的代数式。

原来图像 $y = f(x)$ $(-10 \le x \le 35)$



变换后的图像 $(0 \le x \le 25)$



(i) 考虑图像(a)与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像(a)的方程 ______________________。

(ii) 考虑图像(b)与 $y = f(x)$ 的关系，写出图像(b)的方程 ______________________。

教师注意事项 ：

1. 本示例活动需时约 70-80 分钟。

2. 教师在使用 $y=x^2$ 作反射变换的例子时，须留意 $y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 是同一代数式，在图像上亦看不见有变化，故此本示例采用 $y=x^3$ 作以 y-轴作反射的例子，然而，因 $y=-x^3$ 与 $y=(-x)^3$ 是同一代数式及图像，学生不能透过此函数得出 $y=f(-x)$ 与 $y=-f(x)$ 的分别。故此示例采用 $y=x^3+3x^2-1$ 三次函数例子作讨论。

3. 选用 $y=x^3+3x^2-1$ 三次函数较易令学生比较原有图像及经变换图像与 x-轴，y-轴的点坐标。教师可一开始便选用其它二次／三次函数作讨论例子。

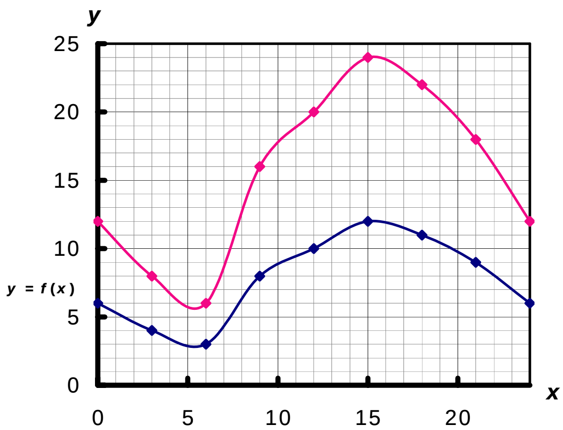
4. 学生利用胶片显示图像反射的效果能巩固学生在初中已学的图像反射的概念，同时透过坐标的比较，学生能理解代数式及图像变换的关系。用胶片亦可减省学生重复画图所需的时间。教师可考虑射印不同函数的图像让学生作游戏比赛得出反射变换后的图像，同时教师可选用不同函数，如 $y=x^3+3x^2-1$ 与 $y=x^3+x^2+1$ 图像以便有不同难度的活动。

5. 教师在选用三角函数 $y=\sin x$ 或 $y=\cos x$ 作图像放大、缩小的比较时，须留意学生有可能对 $\sin 120°$ 等值未有概念，教师可考虑只用图像各点坐标的比较 $y=f(x)$、 $y=f(kx)$ 与 $y=kf(x)$ 图像上的分别而无须指明有关图像是正弦，余弦函数图像。当然，教师亦可选用多项式函数作介绍，但图像效果则不及三角函数明显。

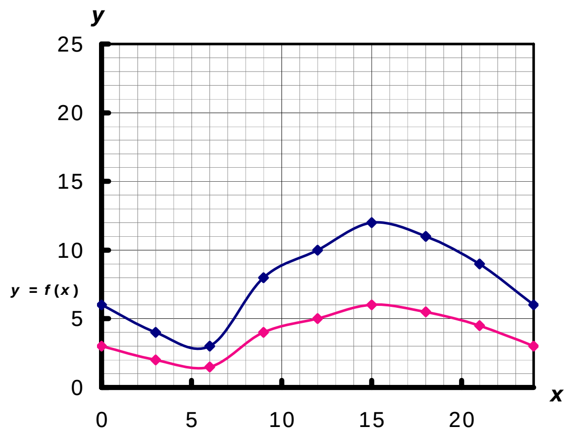
6. 工作纸的答案建议如下：

1.

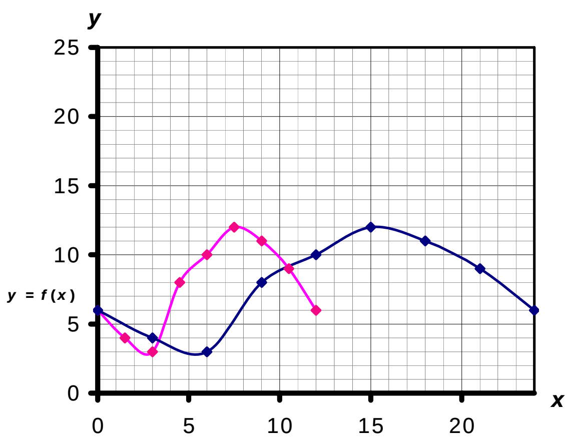
(a) 画出 $y=2f(x)$ 的图像。



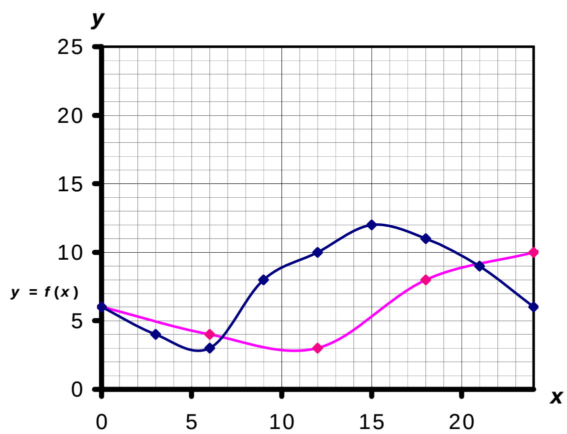
(b) 画出 $y=\frac{1}{2}f(x)$ 的图像。



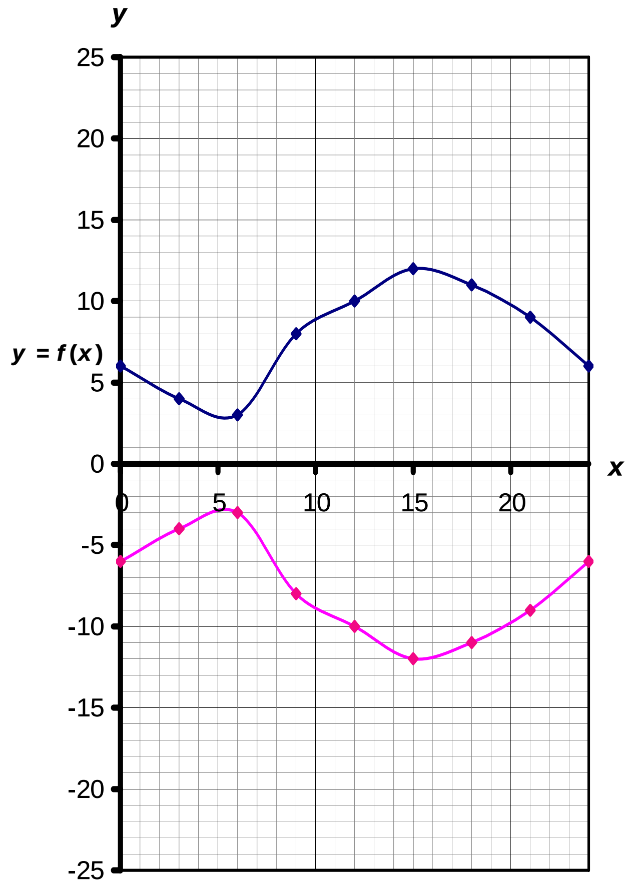
(c) 画出 $y=f(2x)$ 的图像。



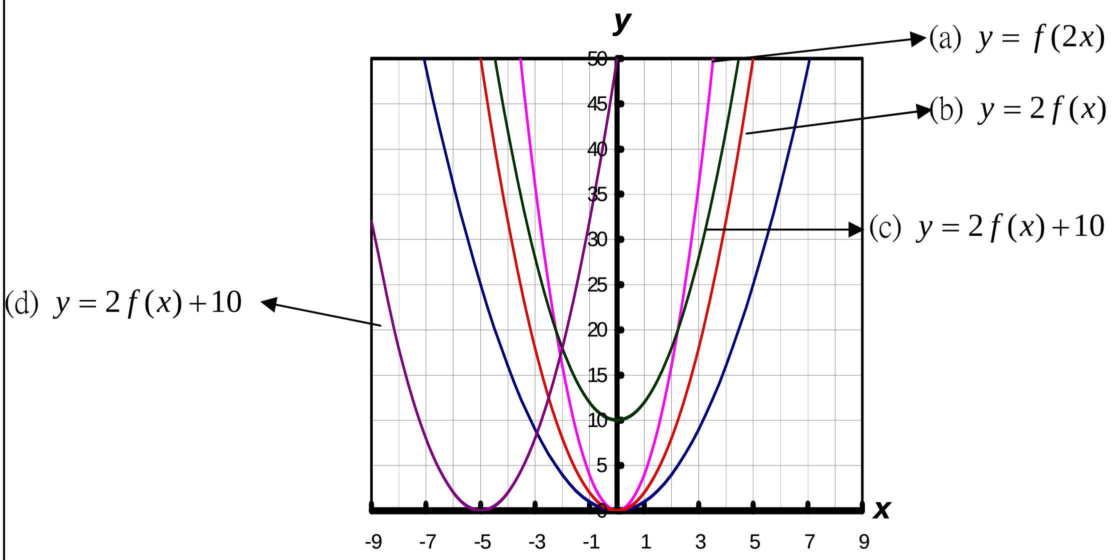
(d) 画出 $y=f(\frac{x}{2})$ 的图像。



(e) 画出 $y=-f(x)$ 的图像。



2.



(e)

不相等，即一般而言

$kf(x+h)\neq kf(x)+k\cdot h$。

3. (i) $y = 2f(x)$

   (ii) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$

4 (i) $y = f(x) + 7$

   (ii) $y = f(x) - 7$

5. (i) $y = f(x + 12)$

   (ii) $y = f(x - 12)$

6. (i) $y = f(x) + 12$

   (ii) $y = 2f(x)$