

示例十一： 变换对函数的影响

目 标： 藉日常生活中的例子，巩固

1. 函数的概念；
2. 函数不同的表示方式；
3. 变换对函数的影响。

学习阶段： 4

学习单位： 函数及其图像

所需教材： 电子表格软件如微软 *Excel(cellphone.xls)*，计算器和工作纸

预备知识： (1) 认识函数的概念
(2) 使用符号代表数量及函数
(3) 认识函数不同的表示方式(符号、表列和图像)

教学内容：

1. 教师可先跟学生复习函数的概念，也可留待完成工作纸 1 后才进行复习。
2. **【工作纸 1】** (函数的概念)

教师将工作纸 1 派给学生，然后与学生讨论在给出的手机服务月费计划中，有没有出现函数的关系？其中，哪一个是独立变量？哪一个是应变数？

教师可引导学生从一个量的值是否「决定」另一个量的值并给出唯一的一个值¹(即只能是一对应一或多对应一，但不可以是一对应多)的关系思考。

¹参考教师注意事项 5

3. 【工作纸 2】（函数不同的表示方式）

- (a) 活动 2.1 列出手机计划的部分收费，教师可要求学生提出一个符合给定的收费表而又清楚描述任何分钟用量的收费计划（称为完整的「**收费函数**」），并用图像表示该完整的收费函数。
- (b) 教师着学生完成工作纸 2 活动 2.1 后，可与学生讨论他们提供的答案，从而归纳出不同的收费方式如**分段收费不变**、**分段线性增加收费**、**连续平滑增加收费**及其组合²等等都可以是符合给出的表列数值。从而透过手机例子让学生更清楚函数定义的一般性（例如不限于以数式表示或是否连续等等）和限制（例如不能一对多）。
- (c) 活动 2.2 是让学生对函数定义以及对函数不同的表示方式有更深刻的体会。这可作为教师引导学生讨论的部分。教师可再与学生讨论用其它不同的表示方式，例如以表列和代数式表达该函数，以探讨各表示方式的优点和缺点。这一部分较为抽象，教师可**选择性**取用及印发给学生。

4. 【工作纸 3】（变换对函数的图像的影响）

- (a) 工作纸 3 是透过手机例子让学生更了解变换对函数影响的实用性。**函数变换可作为解读手机优惠例子的一个模型，反过来说，手机优惠例子可作为一个函数变换的范例。**这同样可加深学生对函数变换的概念和引起他们对学习函数变换的兴趣。
- (b) 活动 3.1 给出某手机计划的收费函数图像和表列部分收费值，而在工作纸中并没有提供³收费函数的代数式（即符号表示方式）。

教师指示学生利用电子表格软件微软 *Excel* 开启档案 *cellphone.xls* 去完成工作纸(或核对答案)，从而探究不同的收费计划代表对函数的不同变换及其在图像上的影响。

²参考教师注意事项 8

³参考教师注意事项 11

- (c) 待学生完成活动 3.1 后，教师可邀请学生展示他们的答案，并引用活动 3.2 的表格整理及总结活动 3.1 的探究结果，即不同的手机优惠对应不同的函数变换。教师可指出不同的优惠是否影响独立变量或应变量及影响是什么等，从而引导学生分辨变换为 $f(x+h)$ 或 $f(x)+k$ 等等。
- (d) 最后教师可以给予学生函数变换的代数式，然后问学生对应的手机优惠（例如 $F\left(\frac{x}{m}-k\right)$ 表示什么？）以评估学生的理解程度。
- (e) 对能力稍弱的学生，教师可将活动 3.1[A] – [D] 分开使用。着学生完成[A]后，先讨论答案，再辅以其它例子跟进，让学生明白后才做[B]，然后是[C]和[D]。最后才用活动 3.2 的表格再整理及总结一次。

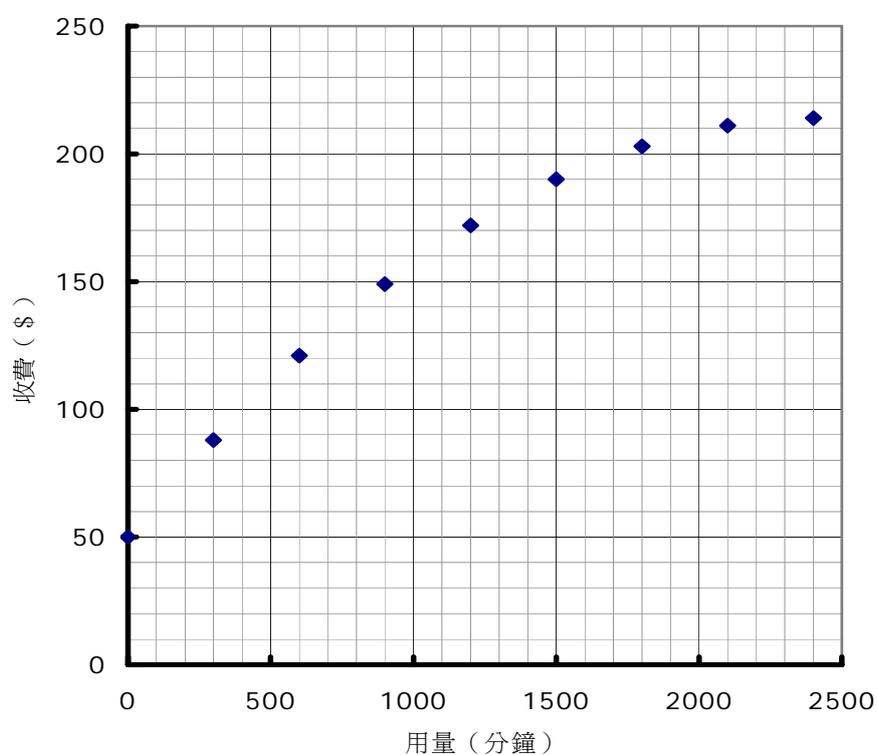
背景

一个手机服务月费计划按如下方式收费：

用量(分钟)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
收费(元)	50	88	121	149	172	190	203	211	214

图像表示如下：

手機服務月費計畫



现在有关的手机公司提供以下的优惠计划：

- [A] 每月 m 元回赠；
- [B] $r\%$ 折扣；
- [C] n 分钟免费；
- [D] 用量增长 $p\%$ (例如用量增长 10% 表示 300 分钟的收费的实际用量为 330 分钟)。

工作纸 1

一个手机服务月费计划按如下方式收费：

用量(分钟)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
收费(元)	50	88	121	149	172	190	203	211	214

1. 参考以上的手机服务月费计划，收费是用量的函数吗？试简述原因。

2. 如果收费是用量的函数，哪一个是独立变量？哪一个是应变数？

工作纸 2

活动 2.1

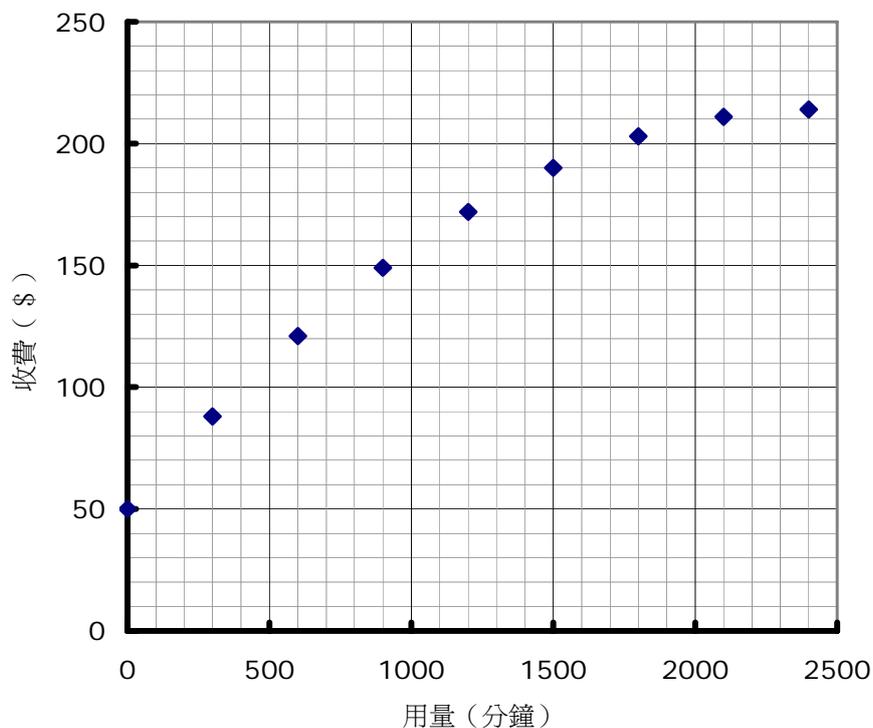
一个手机服务月费计划按如下方式收费：

用量(分钟)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
收费(元)	50	88	121	149	172	190	203	211	214

1. 上面的月费计划只列出部分收费（例如没有列出 250 分钟的收费）。试提出一个符合以上的手机服务月费收费表的完整的收费函数(即一个清楚描述任何用量的收费计划)。

2. 试在以下的直角坐标平面内画出你提出的收费函数的图像。

手機服務月費計畫



活动 2.2 (老师引导讨论的部分)

1. (a) 根据你提出的收费函数，如果用量是 1050 分钟，收费是多少？

- (b) 根据你提出的收费函数，如果用量是 48 000 分钟，收费是多少？

2. 试在以下的表格内写下你提出的收费函数。

用量(分钟)					...
收费(\$)					...

3. 试写下你提出的收费函数的公式。

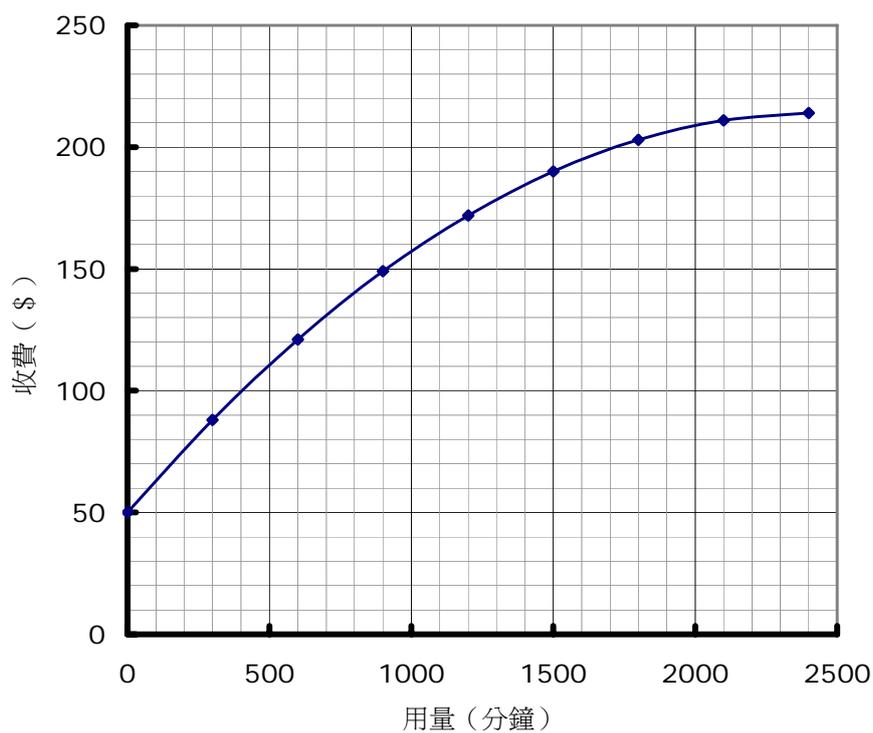
4. 在回答以上问题时，你有困难吗？试简述之，并把造成困难的原因写下。

工作纸 3

活动 3.1

以下是某一个收费函数图像及其部分数值的表列式。

手機服務月費計畫



用量(分钟)	收费(\$)
0	50
300	88
600	121
900	149
1200	172
1500	190
1800	203
2100	211
2400	214

在以下的表格和图内分别填上和画出各对应优惠计划的服务月费收费，并用电子表格档案 *cellphone.xls* 验证答案。

[A] 每月 m 元回赠

1. 在表格内填上优惠收费：

(a) $m = 40$

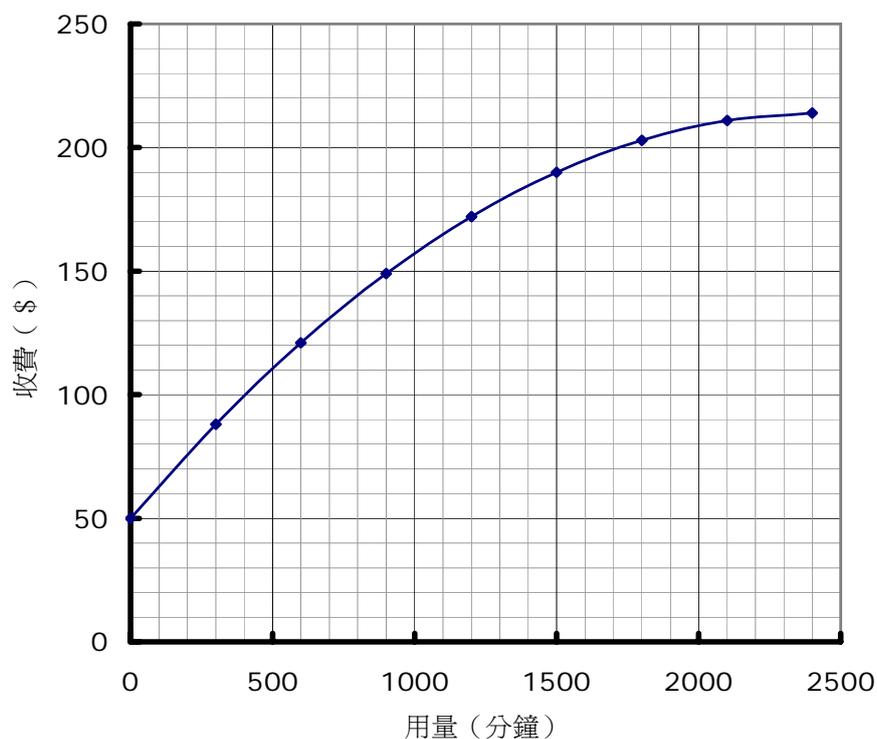
用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

(b) $m = 20$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

2. 在图内画出对应的新收费图像：

手機服務月費計畫



3. 每月 20 元和每月 40 元回赠分别所对应的图像跟原来收费的图像有什么改变？

4. 试猜测每月 20 元和每月 40 元回赠的收费函数与原来的收费函数 F 的关系。

[B] $r\%$ 折扣

1. 在表格内填上优惠收费（准确至整数）：

(a) $r = 50$

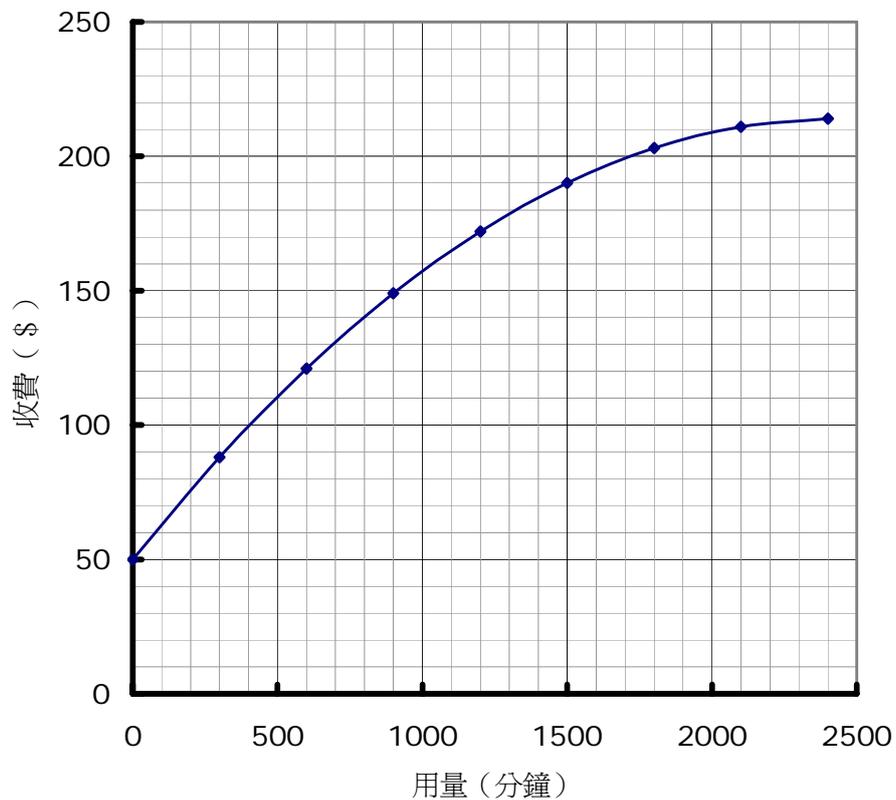
用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

(b) $r = 20$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	
600	121	
1200	172	
1800	203	
2400	214	

2. 在图内画出对应的新收费图像：

手機服務月費計畫



3. 每月 20% 和每月 50% 月费折扣分别所对应的图像跟原来收费的图像有什么改变？

4. 试猜测每月 20% 和每月 50% 月费折扣的收费函数与原来的收费函数 F 数的关系。

[C] n 分钟免费

1. 在表格内填上优惠收费：

(a) $n = 600$

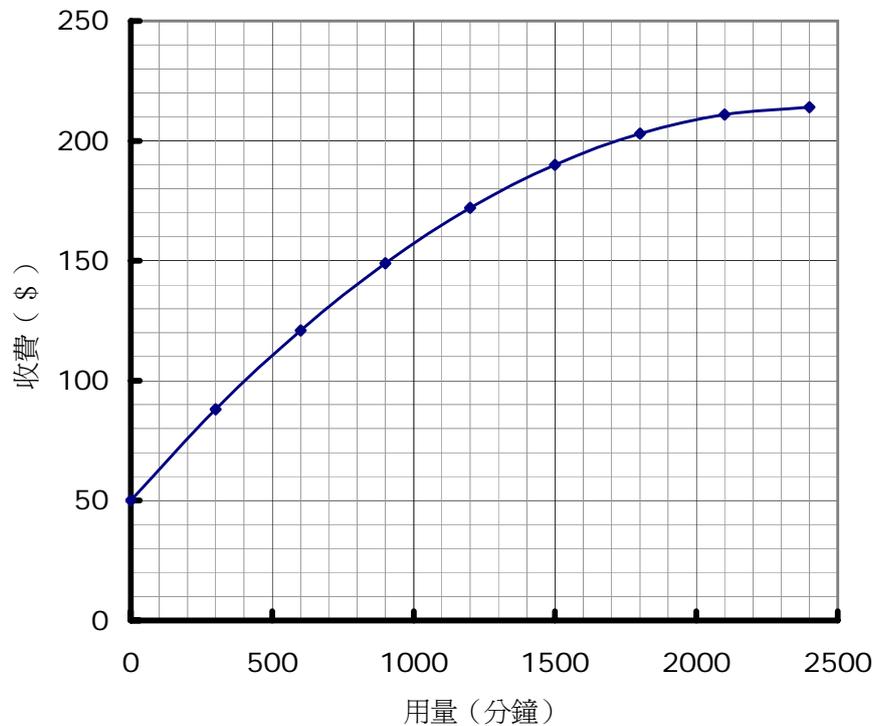
用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	
600	121	50
1200	172	
1800	203	172
2400	214	

(b) $n = 300$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	
600	121	88
1200	172	
1800	203	190
2400	214	

2. 在图内画出对应的新收费图像：

手機服務月費計畫



3. 每月首 300 分钟和首 600 分钟免费分别所对应的图像跟原来收费的图像有什么改变？

4. 每月首 300 分钟和首 600 分钟免费的收费函数与原来的收费函数 F 的关系。

[D] 用量增长 $p\%$

(例如用量增长 20% 表示原来 300 分钟的收费的实际可用量为 360 分钟；用量增长 50% 表示原来 300 分钟的收费的实际可用量为 450 分钟，余此类推。)

1. 在表格内填上优惠收费：

因为填写原表较烦琐费时，可改填下表。

(a) $p = 50$

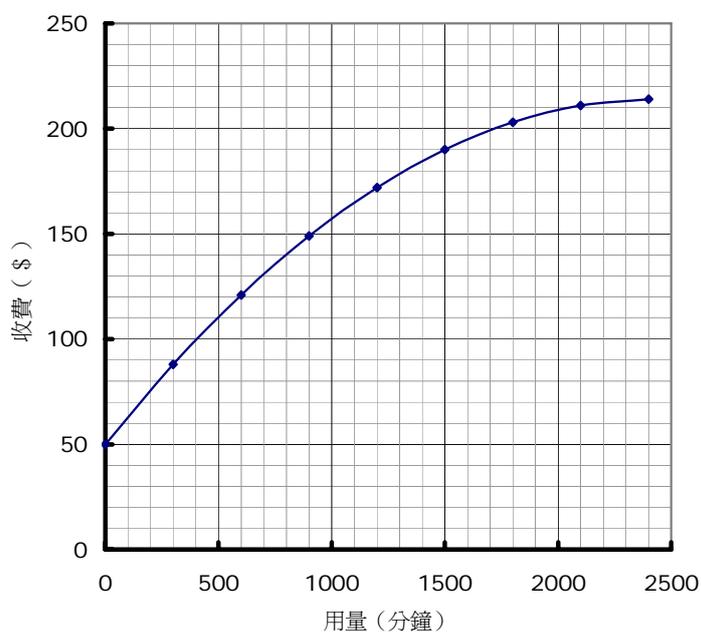
用量 (分钟)	原来用量 (分钟)	优惠收费 (\$)
0	0	50
450	300	88
	600	121
	1200	172
	1800	203
	2400	214

(b) $p = 20$

用量 (分钟)	原来用量 (分钟)	优惠收费(\$)
0	0	50
	300	88
	600	121
1540	1200	172
	1800	203
	2400	214

2. 在图内画出对应的新收费图像：

手機服務月費計畫



3. 每月用量增长 20% 和每月用量增长 50% 分别所对应的图像跟原来收费的图像有什么改变？

4. 试猜测每月用量增长 20% 和每月用量增长 50% 的收费函数与原来的收费函数 F 的关系。

活动 3.2

1. 如果每月手机用量是 x 分钟，收费则是 $F(x)$ 元，我们称 F 是「收费函数」。完成下表。

优惠计划	直接受影响的是 独立变量 x 还是 应变数 $F(x)$	以 F 表示对应的函数变换
[A] 每月 m 元回赠		
[B] $r\%$ 折扣		
[C] 首 n 分钟免费		
[D] 用量增长 $p\%$		

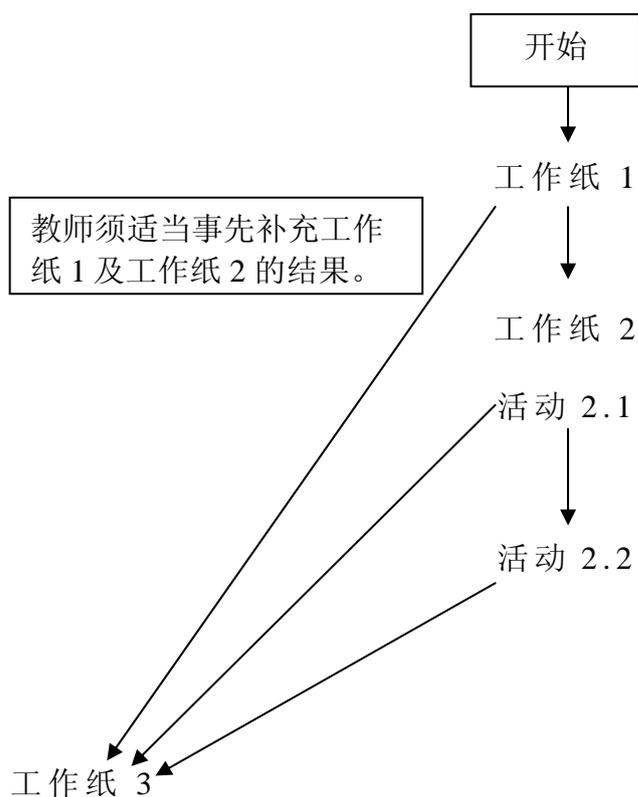
2. (a) 试写下 $0.6F(x)$ 对应什么优惠计划？

- (b) 试写下 $F(x-100)-20$ 对应什么优惠计划？

- (c) 试写下 $F\left(\frac{x}{1.2}\right)-20$ 对应什么优惠计划？

教师注意事项：**【一般事项】**

- 现实中的手机收费计划一般只有数种形式，而且通常收费模式不是一个连续函数。教师宜了解例子中的计划及工作纸中的收费计划可能未必与一般现实处境相同，然而，这未尝不可让学生体验以数学模型去了解日常生活的例子。
- 建议工作纸的使用次序：



- 建议时数：

工作纸 1 + 函数概念的讨论	约 20 分钟
工作纸 1 + 工作纸 2	约 35 分钟
工作纸 3	约 80-100 分钟

【工作纸 1】

- 工作纸 1 的作用是希望透过日常生活中学生较为熟悉的例子，使学生更明白函数的意义及独立变量和应变量的分别，并加强他们对函数概念的认识。

5. 教师须提醒学生一个量「决定」另一个量的值并该值是唯一的情况，并不表示两者之间一定有日常生活中所理解的因果关系。所以收费是用量的函数，用量也可以是收费的函数。

教师可在适当的时机和空档，和学生讨论用量和收费作为独立变量和应变量的角色可是否可以对调。答案是开放的，因应收费的函数是一对一(例如连续平滑增加收费)还是多对一(例如分段收费不变)而有所不同，前者的答案是可以而后者是不可以。

另外，因为 x 是 y 的函数并不意味 y 是 x 的函数，所以，教师应该避免使用如「 x 对应 y 」、「 x 与 y 的函数关系」等字眼。

6. 工作纸 1 的答案

1. 收费是用量的函数。因为在这一个固定的收费计划下，用量唯一地决定了收费。
2. 用量是独立变量，收费是应变量。

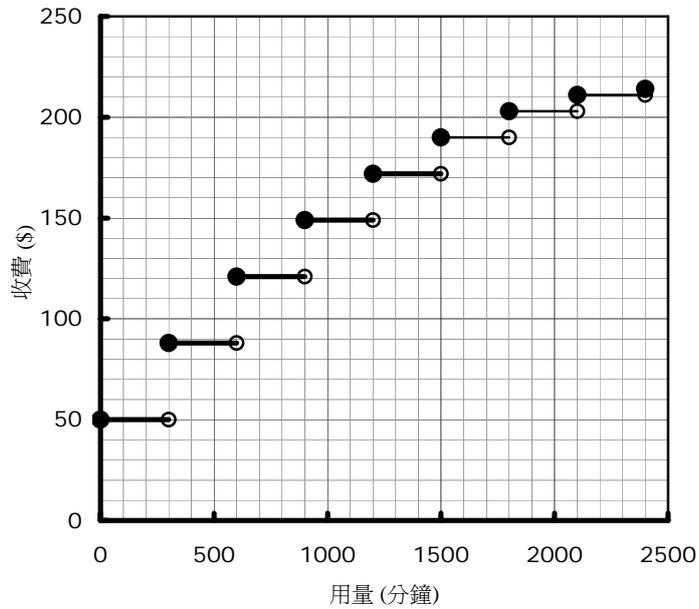
【工作纸 2】

7. 在完成工作纸 2 的过程中，教师宜多讨论如何决定点与点之间和图像范围以外的点的不同收费方式。

8. 活动 2.1 的答案并不是唯一的，以下是一些可能的答案。教师宜指出实心点与空心点的意义和差异。

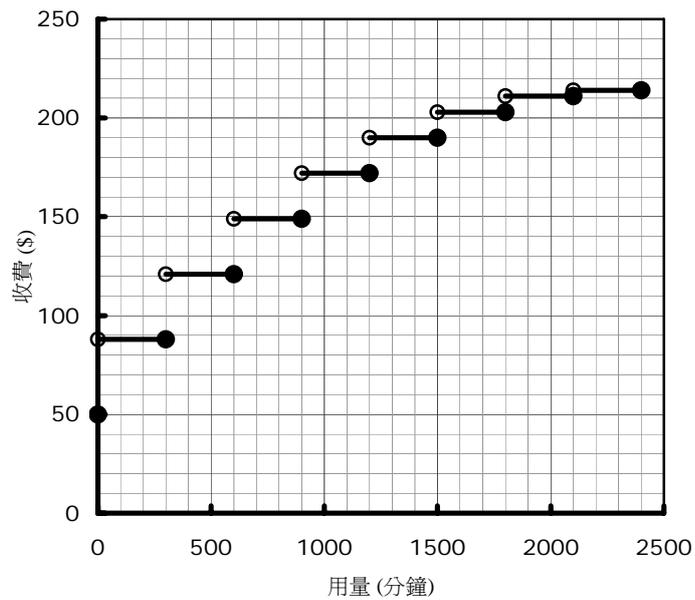
向前分段收费不变

手機服務月費計畫



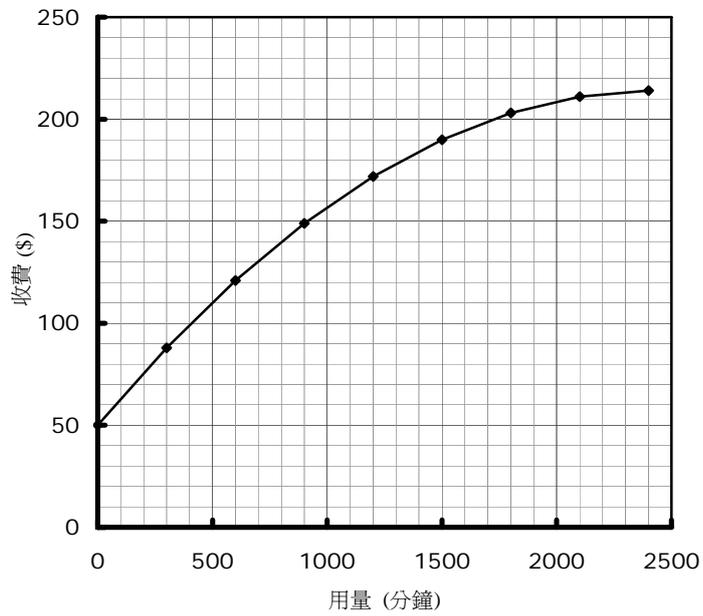
向后分段收费不变

手機服務月費計畫



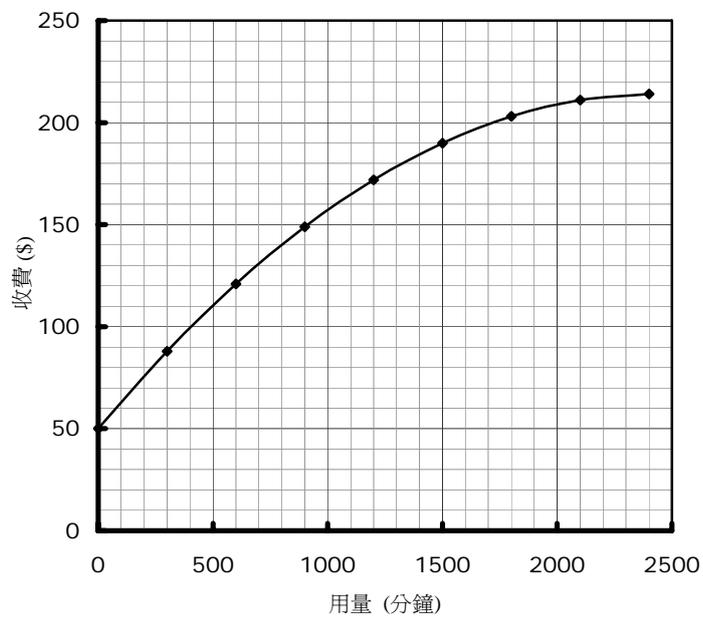
分段线性增加收费（用直线连接相邻的点）

手機服務月費計畫

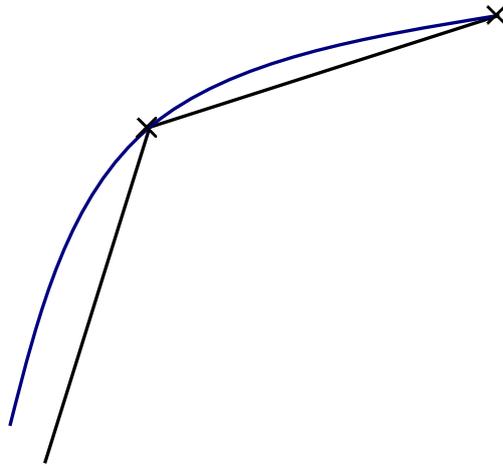


连续平滑增加收费（用平滑曲线连接各点）

手機服務月費計畫



留意分段线性增加收费和连续平滑增加收费的图像很相近，但放大垂直轴后可看出分别，下面是两图重迭并放大后其中一段。



9. 以下为活动 2.2 的一些参考答案。如教师提出下面答案中的代数式，学生未必能理解此种表达方式，教师宜略为解释。

向前分段收费不变

表列

用量 (分钟)	$0 \leq x < 300$	$300 \leq x < 600$	$600 \leq x < 900$	$900 \leq x < 1200$...
收费 (\$)	50	88	121	149	...

代数式

$$F(x) = \begin{cases} 50 & \text{当 } 0 \leq x < 300 \\ 88 & 300 \leq x < 600 \\ 121 & 600 \leq x < 900 \\ 149 & 900 \leq x < 1200 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

向后分段收费不变

表列

用量 (分钟)	$x = 0$	$0 < x \leq 300$	$300 < x \leq 600$	$600 < x \leq 900$	$900 < x \leq 1200$...
收费 (\$)	50	88	121	149	172	...

代数式

$$F(x) = \begin{cases} 50 & \text{當 } x = 0 \\ 88 & 0 < x \leq 300 \\ 121 & 300 < x \leq 600 \\ 149 & 600 < x \leq 900 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

分段线性增加收费

较难以表列完全写出所有用量及收费的数值。但部分数值可列举如下：

用量(分钟)	150	300	450	600	750	900	1050
收费(\$)	69	88	104.5	121	135	149	160.5

代数式

$$F(x) = \begin{cases} \frac{88-50}{300-0}(x-0)+50 & \text{當 } 0 \leq x < 300 \\ \frac{121-88}{600-300}(x-300)+88 & 300 \leq x < 600 \\ \frac{149-121}{900-600}(x-600)+121 & 600 \leq x < 900 \\ \frac{172-149}{1200-900}(x-900)+149 & 900 \leq x < 1200 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

连续平滑增加收费

较难以表列完全写出所有用量及收费的数值。但部分数值可列举如下：

用量(分钟)	150	300	450	600	750	900	1050
收费(\$)	69.625	88	105.125	121	135.625	149	161.125

代数式

$$F(x) = 50 + \frac{81}{2} \left(\frac{x}{300} \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{x}{300} \right)^2, \text{ 其中 } 0 \leq x \leq 2400$$

注：

(如有时间及学生能力许可，教师可与学生讨论该公式背后「多用多慳」的想法。至于推导公式须牵涉较深的理论(表列的数值其实给出了一个二阶差分方程， $F(x)$ 是方程的解)，教师不宜要求学生导

出，也不必教授。)

10. 教师应注意学生并不一定能写出他们图像的完整表列和对应的代数式，甚至不易找出对应的代数式。答案并不重要，最重要的是让学生了解不同表示方式的用处和局限。

【工作纸 3】

11. 工作纸 3 的收费函数的代数式假设为

$F(x) = 50 + \frac{81}{2} \left(\frac{x}{300} \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{x}{300} \right)^2$, 其中 $0 \leq x \leq 2400$ 。留意 x 是不可能大于 $31 \times 24 \times 60 = 44\ 640$ 。

12. 本示例假设当用量是 0 分钟时, 收费是 \$50。原因是一般的服务计划都会收取最低收费。在常见现实生活服务计划, 无论一个人有没有使用的服务, 只要他加入该计划, 多要交最低服务费。

在[C]因着收取最低收费, 即使有 300 分钟免收费通话时间, 一个人仍须为首 300 分钟通话付款。

13. 活动 3.1 的建议答案：

[A] 每月 m 元回赠

1.

(a) $m = 40$

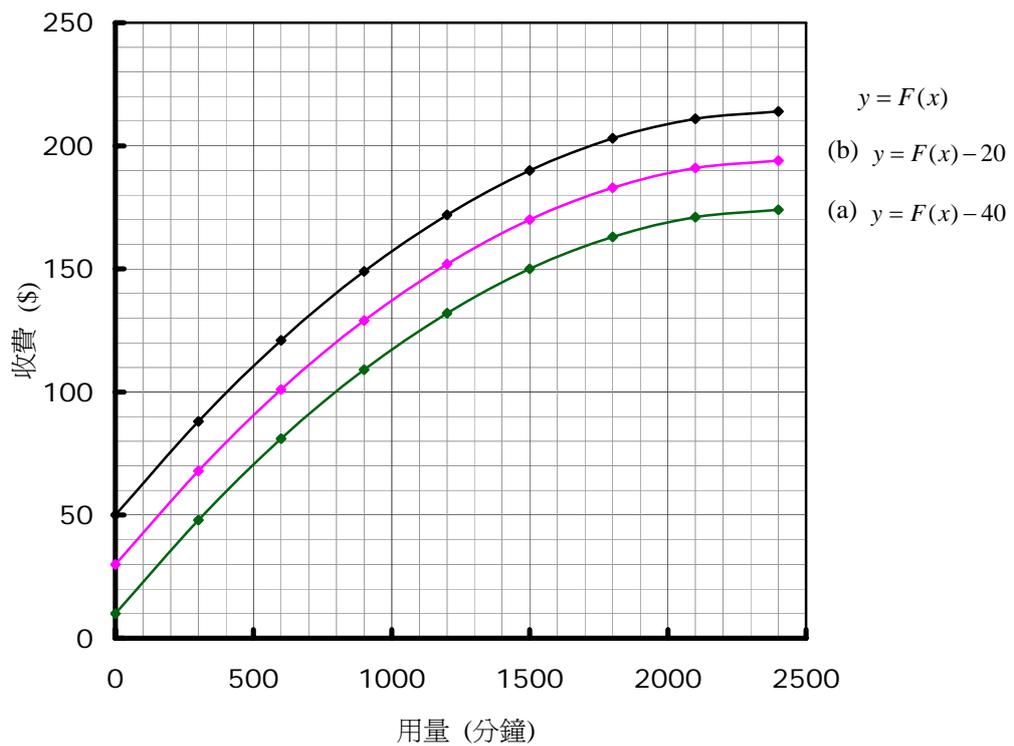
用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	10
600	121	81
1200	172	132
1800	203	163
2400	214	174

(b) $m = 20$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	30
600	121	101
1200	172	152
1800	203	183
2400	214	194

2.

手機服務月費計畫



3. 每月 20 元和每月 40 元回贈的图像分别是原来收费的图像下移 20 和 40 单位。
4. 每月 20 元和每月 40 元回贈的收费函数分别是 $F(x) - 20$ 和 $F(x) - 40$ 。⁴

⁴ 正确来说，每月 20 元回贈的收费函数是 G ，其中 $G(x) = F(x) - 20$ 。

[B] $r\%$ 折扣

1.

(a) $r = 50$

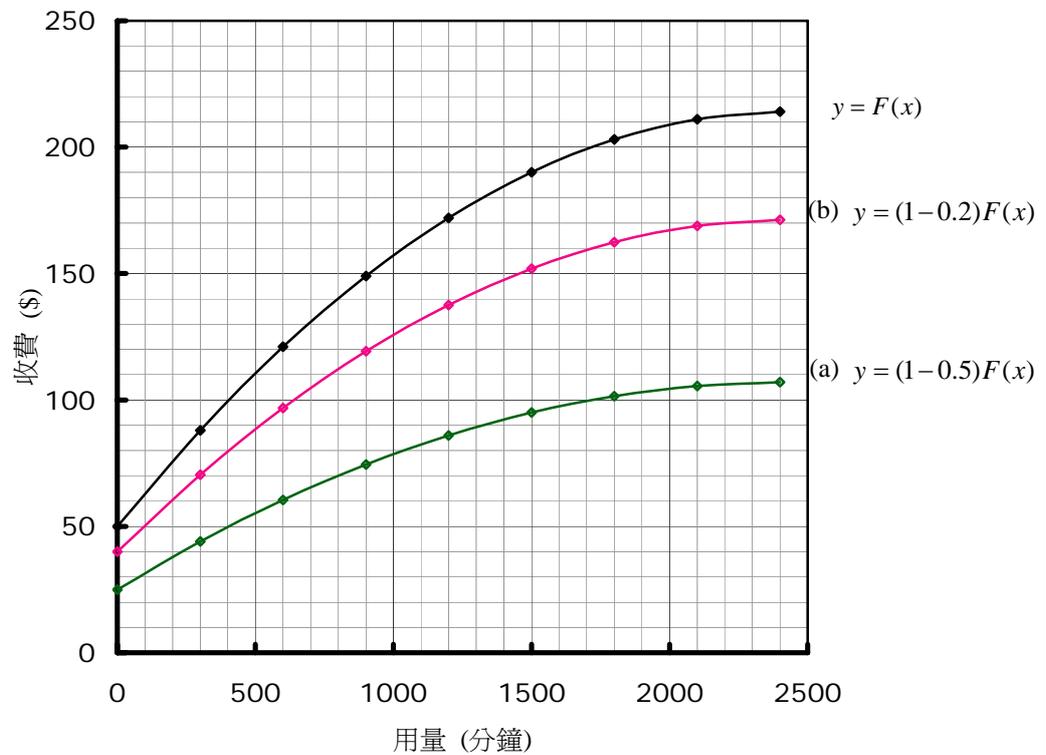
用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	25
600	121	60.5
1200	172	86
1800	203	101.5
2400	214	107

(b) $r = 20$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	40
600	121	96.8
1200	172	137.6
1800	203	162.4
2400	214	171.2

2.

手機服務月費計畫



3. 每月 20% 和每月 50% 月费折扣的图像分别是原来收费的图像高度的 80% 和 50%。
4. 每月 20% 和每月 50% 月费折扣的收费函数分别是 $0.8F(x)$ 和 $0.5F(x)$ 。⁵

⁵正确来说, 每月 20% 月费折扣的收费函数是 G , 其中 $G(x) = 0.8F(x)$ 。

[C] n 分钟免费

因为原先在 $-300 \leq x < 0$ 的范围内 F 并未定义，变换后在 0 分钟时的优惠收费也就未确定，而 $y = F(x-300)$ 的图像在 $0 \leq x < 300$ 亦没有对应的曲线。一个合理的假设是基本收费为 50 元，所以下表有**的部分及下图水平直线的部分并不完全代表 $F(x-300)$ 。

1.

(a) $n = 600$

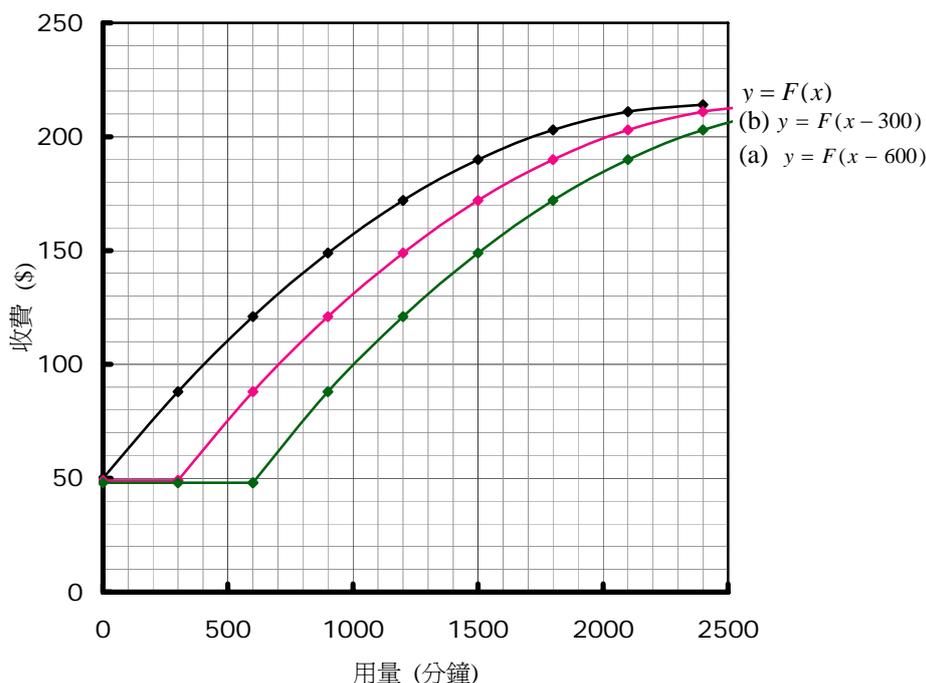
用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	50**
600	121	50
1200	172	121
1800	203	172
2400	214	203

(b) $n = 300$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	50**
600	121	88
1200	172	149
1800	203	190
2400	214	211

2.

手機服務月費計畫



- 每月首 300 分钟和首 600 分钟免费的图像分别是原来收费的图像右移 300 和 600 单位。
- 每月首 300 分钟和首 600 分钟免费的收费函数分别是 $F(x-300)$ 和 $F(x-600)$ 。⁶

⁶ 正确来说，每月首 300 分钟免费的的收费函数是 G ，其中 $G(x) = F(x-300)$ ，或 $G(x) = F(x-600)$ ，但分别不包括 0-300 分钟及 0-600 分钟。

[D]用量增长 $p\%$

(例如用量增长 20% 表示原来 300 分钟的收费的实际可用量为 360 分钟；用量增长 50% 表示原来 300 分钟的收费的实际可用量为 450 分钟，余此类推。)

1.

(a) $p = 50$

用量 (分钟)	原来用量 (分钟)	优惠收费 (\$)
0	0	50
450	300	88
900	600	121
1800	1200	172
2400	1800	203
3600	2400	214

(b) $p = 20$

用量 (分钟)	原来用量 (分钟)	优惠收费 (\$)
0	0	50
360	300	88
720	600	121
1540	1200	172
2160	1800	203
2880	2400	214

若选用原有计划内的用量，计出优惠收费的方法较困难。建议方法如下：

从实际用量先算出对应的新收费用量，例如实际用量是 300 分钟，在 1.(a) 对应收费用量是 $300 \div 120\% = 300 \div 1.2 = 250$ 分钟，然后从原来的图像中读出对应的收费是 82 元。计算结果如下表：

1. (a) $p = 50$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	50
300	88	75.9
600	121	99.6
900	149	121.0
1200	172	140.2
1500	190	157.2
1800	203	172.0
2100	211	184.6
2400	214	194.9

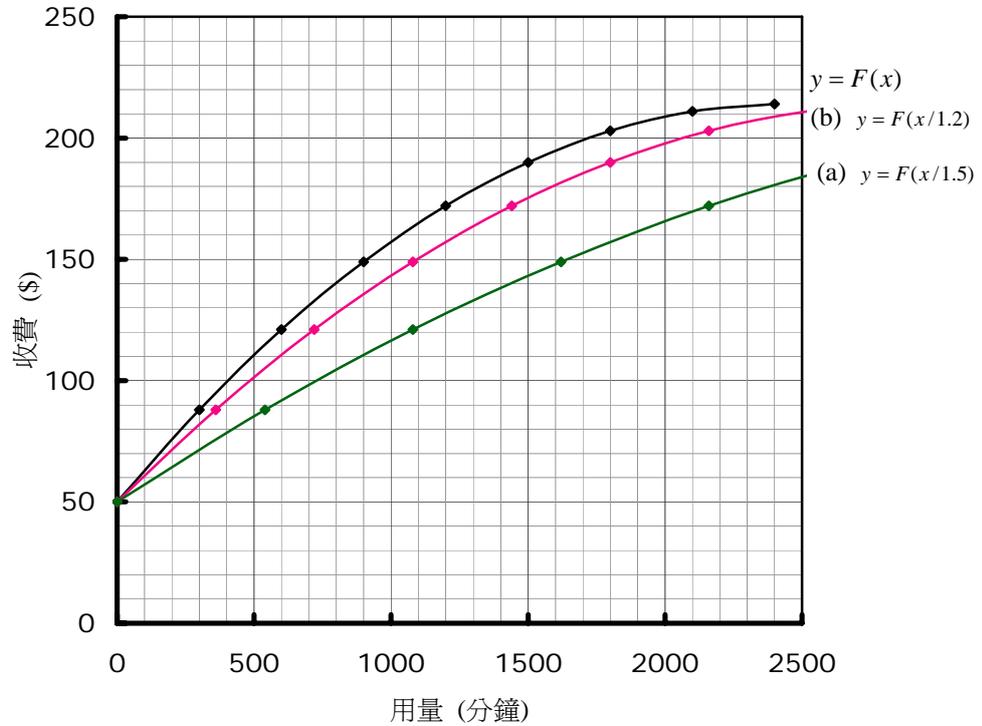
(b) $p = 20$

用量 (分钟)	原来收费(\$)	优惠收费(\$)
0	50	50
300	88	82.0
600	121	110.6
900	149	135.6
1572	172	157.2
1753	190	175.3
1900	203	190.0
2012	211	201.2
2089	214	208.9

此计算方法较烦琐，故此工作纸只取用第一题(a)及(b)改变用量的表格。

2.

手機服務月費計畫



3. 每月用量增长 20% 和每月用量增长 50% 的图像分别是原来收费的图像长度伸展 20% 和 50%。

4. 每月用量增长 20% 和每月用量增长 50% 的收费函数分别是 $F\left(\frac{x}{1.2}\right)$ 和 $F\left(\frac{x}{1.5}\right)$ 。⁷

⁷正确来说，每月用量增长 20% 的的收费函数是 G ，其中 $G(x) = F\left(\frac{x}{1.2}\right)$ 。

14. 活动 3.2 的答案:

1. 如果每月手机用量是 x 分钟，收费则是 $F(x)$ 元，我们称 F 是「收费函数」。

优惠计划	直接受影响的是 独立变量 x 还是应变数 $F(x)$	以 F 表示对应的 函数变换
[A] 每月 m 元回赠	$F(x)$	$F(x) - m$
[B] $r\%$ 折扣	$F(x)$	$(1 - r\%)F(x)$
[C] 首 n 分钟免费	x	$F(x - n)$
[D] 用量增长 $p\%$	x	$F\left(\frac{x}{1 + p\%}\right)$

2. (a) $0.6F(x)$ 代表六折收费。
- (b) $F(x - 100) - 20$ 代表先免首 100 分钟用量的费用，再回赠 20 元。例如用量 0 分钟收费 30 元；用量 400 分钟收费 68 元；用量 700 分钟收费 101 元。
- (c) $F\left(\frac{x}{1.2}\right) - 20$ 代表先将用量增长 20%，以计算出来的用量收费，再回赠 20 元。例如用量 0 分钟收费 30 元；用量 300 分钟收费 62 元；用量 360 分钟收费 68 元。

15. 教师宜留意变换对直线函数的影响是十分容易引起混淆的。在直线的图像上，并不容易分辨上下平移和左右平移，换言之，学生较难比较线性函数 $f(x)$ 的 $f(x) + k$ 与 $f(x + k)$ 在图像上的分别。在多项式函数（包括直线和二次函数）的图像上，也不容易分辨沿 y 轴方向的伸缩和沿 x 轴方向的伸缩，换言之，学生较难比较多项式函数 $f(kx)$ 与 $kf(x)$ 在图像上的分别。

16. 本示例参考数据来源：

"You Make the Call", Algebraic Thinking Math Project.

http://www.pbs.org/teachersource/mathline/lessonplans/atmp/call/call_procedure.shtm

17. 教师亦可利用软件 *Winplot* 或 *Graphmatica* 等绘图软件与学生探讨变换对函数的代数式及图像的影响。

18. 网址(进一步资料)

(a) <http://illuminations.nctm.org/mathlets/grapher/index.htm/>

(b) <http://www.mathsnet.net/graphs/findfunction.html>

(c) <http://math.Exeter.edu/rparris/winplot.html>

(d) <http://graphmatica.com>