

## 示例二： 函数的基本概念（二）

- 目标**：
1. 联系「输入 - 处理 - 输出」的概念与应变量及独立变量的关系；
  2. 认识函数的例子及反例；
  3. 能从函数的表列和符号方面来理解函数的基本概念及函数中假变量的含义。

**学习阶段**： 4

**学习单位**： 函数及其图像

**所需教材**： 工作纸、可连接互联网的计算机

- 预备知识**：
- (1) 使用代数符号代表数字
  - (2) 理解代数语言并懂得代入法

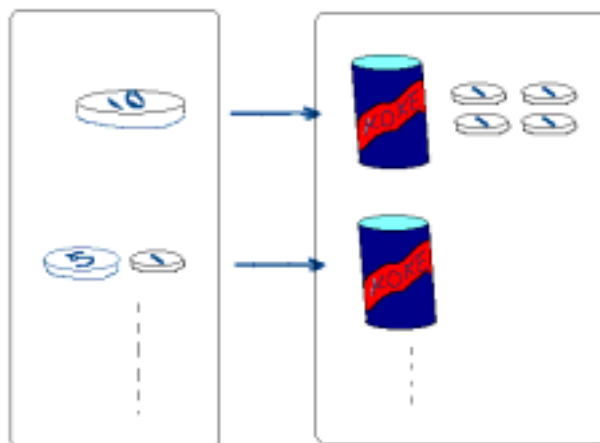
**教学内容**：

- 1.(a) 教师宜先透过日常生活例子<sup>(2)</sup>，与学生讨论函数中「独立变量决定应变量」或「输入 - 处理 - 输出」中「输入决定输出」的概念。在讨论过程中，不一定需要提及「独立变量」或「应变量」等词汇。

例子 1 - 汽水自动贩卖机(设贩卖机只出售一款 6 元的汽水，投入的硬币只能是 1 元或以上的硬币而退出的零钱只会是 1 元硬币)。

以例子说明，在正常的情况下，当确定「投入的硬币」后，「出来的东西」必是固定的：「投入 1 个 10 元硬币，必跑出 1 罐汽水和 4 个 1 元」；「投入 1 个 5 元和 1 个 2 元硬币，必跑出 1 罐汽水和 1 个 1 元」等。

教师可利用图像描述输入和输出的关系，例如：



- (b) 教师可透过「函数」的英文名称 'function' 的本来含义 - 「机能」(或「功能」)以说明：所谓「函数」<sup>(3)</sup>，可视为从输入的东西，以确定输出的东西的一种「机能」。这种机能有一个特点，相同的输入，不会得到不同的输出。因此，当自动贩卖机「出来的东西」完全被「投入的硬币」所确定时，我们便可把自动贩卖机中「出来的东西」说成为「投入的硬币」的函数。如果我们用  $f$  表示这函数，则上图中的例子可分别表为：

$$f(\text{10 元硬币一个}) = \text{一罐汽水和 4 个 1 元硬币}$$

$$f(\text{1 个 5 元硬币和 1 个 1 元硬币}) = \text{一罐汽水}$$

讨论问题可包括：

- (i) 投入 1 个 5 元硬币和 1 个 2 元硬币，出来的东西会是什么？怎样运用函数符号表示两者的关系？
- (ii) 要出来的东西是 1 罐汽水和 4 个 1 元，投入的东西是否只能是 1 个 10 元硬币？
- (iii) 现实生活里的汽水自动贩卖机(例如校内的汽水机)<sup>(4)</sup>，「出来的东西」是否为「投入的硬币」的函数呢？

- (c) 例子 2 - 日期与星期数。

事件发生的日期(年月日)能决定事件发生在星期几，故星期数是日期(年月日)的函数。

讨论问题可包括：

- (i) 日期(年月日)是星期数的函数吗？为什么？
- (ii) 没有确定年份，单单月日能确定星期数吗？

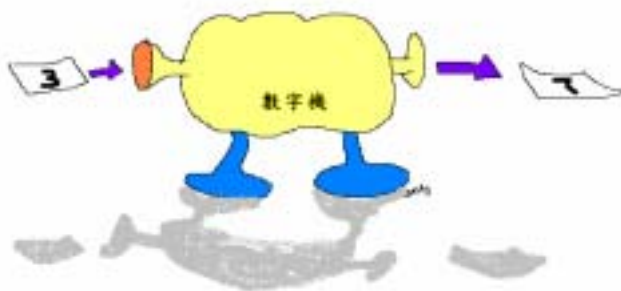
(d) 例子 3 - 班内学生的姓名与学号。

在一班之内，即使有姓名相同的学生，只凭学号便能正确地找出特定的学生。故此，学生姓名是学号的函数。

讨论问题可包括：

- (i) 学号是学生姓名的函数吗？为什么？
- (ii) 人是姓名的函数吗？为什么？

2. 教师引入数字机的概念（可于黑板贴出有关图画），并解释它的基本运作原理。当把一张写有一个数字的字条输入这机器后，机器便会输出印有一个数字的字条，这个输出的数字，完全取决于输入的数字<sup>(5)</sup>。换句话说，输入的数字相同，输出的数字便不会不一样。教师可举例（例如，运作机能为「输出值 = 输入值 + 4」的数字机）说明有关原理，并着学生以表列方式纪录输入和输出的数字。



教师分发工作纸给学生，并着他们独自完成问题 1 及 2。

3. 教师与学生讨论问题 1 及 2 的答案<sup>(6)</sup>，数字机 1 号运作机能的符号表达和其输出值与输入值的关系。例如，对数字机 1 号来说，如果我们用  $x$  表输入值，则按给出的数字机运作机能，我们得悉输出的会是  $x + 5$ 。另一方面，若我们用  $f$  表有关的函数，则当输入值为  $x$  时，输出值将为  $f(x)$ 。因此，

$$f(x) = x + 5 \text{ 。}$$

教师须强调两点：

- (a) 输入值不限于一固定的数，故  $x$  所表示的是一变量，而非一个固定或未知数；
- (b) 我们不一定用‘ $x$ ’表示输入值，例如，我们可用‘ $y$ ’表示输

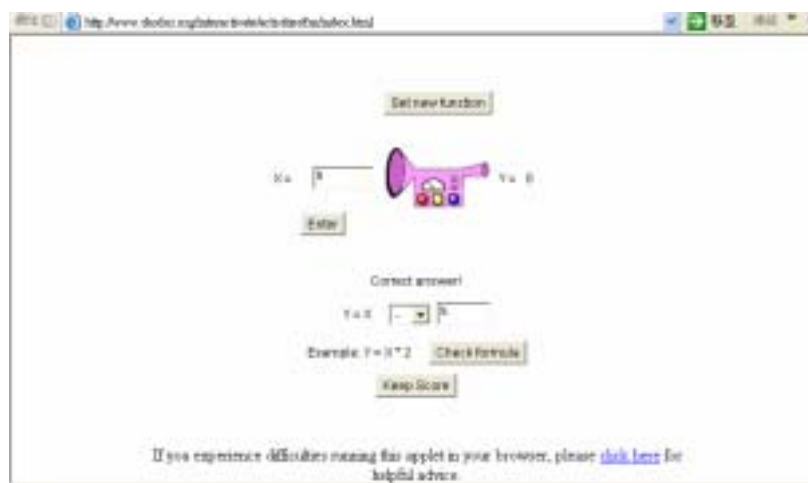
入值，这时候，运作机能则应表为：

$$f(y) = y + 5 \quad .$$

接着，教师可着学生以符号语言说出工作纸 1 中的数字机 2 号的运算功能。

4. 教师可着学生分组，每组有 2 个同学。每人先写下一个数字机的运算功能，运算功能只能牵涉最多两个运算步骤。每人轮流说出一个数，作为对方数字机的输入值，对方须把输出值说出来。能最先正确地说出对方数字机的运算功能者胜出。教师亦可利用以下网页内的数字机，让全班同学一起参与竞猜运算功能的活动：

<http://score.kings.k12.ca.us/lessons/functions/machine.html>



5. 教师着学生和同组组员讨论工作纸 1 中的问题 3 及 4<sup>(6)</sup>。

## 工作纸：函数的基本概念

问题：

1. 数字机 1 号的运作机能是：

$$\text{输出值} = \text{输入值} + 5$$



(a) 完成下列数字机 1 号的输入和输出纪录表：

输入值	输出值
3	8
4	
6	
	20
	4

(b) 解释数字机 1 号的输出值为甚么是其输入值的函数。  
如果我们用  $f$  表这个函数，试用此符号表示上述纪录表中  
输入值和输出值的关系(例如： $f(3) = 8$ )。

---



---



---



---



---

2. 以下是数字机 2 号的输入和输出纪录表：



输入值	输出值
2	6
4	12
0	0
-3	-9
-12	-36

试猜测数字机 2 号的运作机能。

如果我们用  $g$  表这个函数，试用此符号表示上述纪录表中输入值和输出值的关系(例如： $g(2) = 6$ )。

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

3. 超级数字机和数字机一样，输入一张字条，它也会输出一张字条，但字条上的，不再限于数字。而输出的符号，是否完全取决于输入的符号，也不得而知。以下是三部超级数字机的输入和输出纪录表，试判断哪台超级数字机中的输出值肯定不会是输入值的函数，并加解释：



超级数字机 1 号

输入值	输出值
-4	-4
-2	-2
0	0
2	2
4	4

超级数字机 2 号

输入值	输出值
-4	A
-2	A
0	A
2	A
4	A

超级数字机 3 号

输入值	输出值
1	A
1	B
1	A
1	B
1	A

---

---

---

---

---



4. 设数字机 3 号中，输出值为输入值  $x$  的函数  $h$ ，且

$$h(x) = x^2 + 1$$

(a) 填上数字机 3 号的输出值：

输入值	输出值
- 2	
- 1	
0	
1	
2	

(b) 已知输出值为 10，我们能确定其输入值吗？为什么？

---

---

---

(c) 在数字机 3 号中，“输入值”是“输出值”的函数吗？为什么？

---

---

---

**教师注意事项：**

1. 本示例活动约需时 35-45 分钟。
2. 在第一节讨论，教师可视乎学生背景知识及能力，选用其它例子解释函数的概念。例如，姓名与香港身份证号码，包裹重量与其邮资，一个人与他的生日日期，或着学生举出其它函数的例子，详细讨论可参阅示例三。
3. 老师提到「函数」这名称时，可交代「函数」是‘function’的中译。一般相信，「函数」这中译是出自清代数学家李善兰的手笔，有关李的背景，可参考：

<http://www.dyu.edu.tw/~mfht206/history/19/china.htm>

当时，「函」与「含」两字互通，李把‘function’译作「函数」，取其有「含有变量」的意思。用李的话说，「凡式中含天，为天函数」（「天」、「地」、「人」、「物」是当时表示未知数或变量的4个字）；「凡此变量中函彼变量，则此为彼之函数」（此为李对‘If the variable quantity contains another variable quantity, then the former is a function of the latter’之中译）。因此，函数不是一个数。今天，我们知道，函数是一种特定的对应（correspondence）或关系（relation）（今天函数的概念不是一蹴而就的，它的历史发展，可参阅 Kleiner, 1989）。事实上，有人（如台大刘福增）建议，‘function’应译作「函应」而非「函数」。

4. 日常所见的汽水自动贩卖机，除了投入硬币外，一般还须按汽水选择的按钮。因此，单单由投入的硬币，是不能决定输出的东西的。在这情况下，「出来的东西」便不是「投入的硬币」的函数。
5. 这里不宜把输出的数字描述为输入数字经过**运算**后所得的结果。因为这会误导学生，让他们以为函数的输出值必须通过计算得到。这会对他们了解常数函数，构成障碍。（有关学生对常数函数特别感到困难的研究，可参考 Markovits, Eylon, & Bruckheimer (1986)。）

## 6. 工作纸内各问题的答案：

1(a)

输入值	输出值
3	8
4	9
6	11
15	20
-1	4

(b) 因为输入值相同，输出值便不会不同。

$$f(4) = 9$$

$$f(6) = 11$$

$$f(15) = 20$$

$$f(-1) = 4$$

2. 例如：输出值 = 3 × 输入值。

$$g(4) = 12$$

$$g(0) = 0$$

$$g(-3) = -9$$

$$g(-12) = -36$$

3. 只有超级数字机 3 号的输出值肯定不会是输入值的函数。因为输入值不能完全决定输出值。

4.(a)

输入值	输出值
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

(b) 不能够，因为当输入值为 3 及 -3 时，输出值都是 10。

(c) 不是。因为，从(b)可见，输出值不能完全决定输出值。

参考书目：

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept. *The college Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.

刘福增 (2003). 《逻辑思考》. 台北：心理出版社。