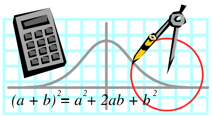


示例五：
函数的不同表示方法：
表列、符号和图像（二）

目　　标：利用不同的例子比较和了解不同的函数表示

学习阶段：第四学习阶段

学习单位：函数及其图像

所需教材：工作纸和计算器

预备知识：函数的概念

教学内容：

1. 教师帮助学生重温函数的基本概念和函数的表列、符号和图像表示。

2. 教师指示学生研究工作纸 1 问题 1 的「函数」。教师须提醒学生必先弄清所给予的是函数。这样可以巩固学生对函数概念的了解。

3. 教师指示学生完成工作纸 1 内的(a)，(b)和(c)部。

4. 学生分成小组比较他们的答案并讨论。一部分组别会向全班同学汇报。教师须在适当时候提出评语和指引。

5. 学生完成问题 1 后，教师带领学生讨论如何用迭代法在问题 2 建立表列和图像表示;并藉验证数列的首几项向学生演示给出的代数表示是正确的。

6. 做工作纸 1 时，教师须引导学生明白和欣赏不同的函数表示方式的好处及了解其局限，其中包括：

   (a) 现实生活中两个变量的关系往往是从变量的表列值逐步

求其符号表示式。表列只能显示不连续的变量值，它并不能全面反映两个变量所有的值及其关系。

(b) 函数的图像表示往往是由表列值开始，再由图像点的趋势猜测有关量的符号表示式。它比对表列式能涵盖更多的数量值，但是却只局限图像所显示的 x、y 区域内。出了所示的区域，便无从得知两个变量之间的关系。

(c) 一般而言，以符号表示函数能较全面表示两个量(变量)的关系。然而由现实生活得出的数值，其关系往往欠缺符号表示而须运用多种工具才能求得其符号表示(如第 2 题的裴波那契数列的通项)。在求输出值/输入值时，用符号式比由图像得出的值较准确但亦可能较费时及不易求得输出值(如第 2 题求第 11 项的值由表列值较由符号计算容易；但在第 1 题运用符号表示求值，则并不困难)。

7. 学生分成小组并讨论工作纸 2 问题 1 表 2.1 的(a)及(b)。

8. 教师邀请学生向全班同学汇报答案。如果学生不能给出正确的答案或者未能提出恰当的理由去解释答案，教师可以给予提示、指引和例子引导。如在判断一个关系是否函数时，要留意问题给出的条件和函数的基本定义，其中包括：

   (a) 由表列的数值讨论“y 是 x 的函数”时，只能按已知表列内的每一 x 值是否只给出唯一的 y 值。除此之外，便无法判断它们是否具有函数关系。例如，在问题 1 表 2.1 中，当 x 为整数(且在给出的范围内)，y 是 x 的函数；但当 x 为实数时， 则不能确定 y 是否 x 的函数。

   (b) 再者，即使在该区域内，“y 是 x 的函数”亦不一定“x 是 y 的函数”。

9. 教师要求完成问题 1 其它部分并核对答案。

10. 教师指示学生完成问题 2 及 3，教师由此再运用函数的概念，协助学生理解如何从给出的代数(符号)及图像判断“y 是 x 的函数”及“x 是 y 的函数”。

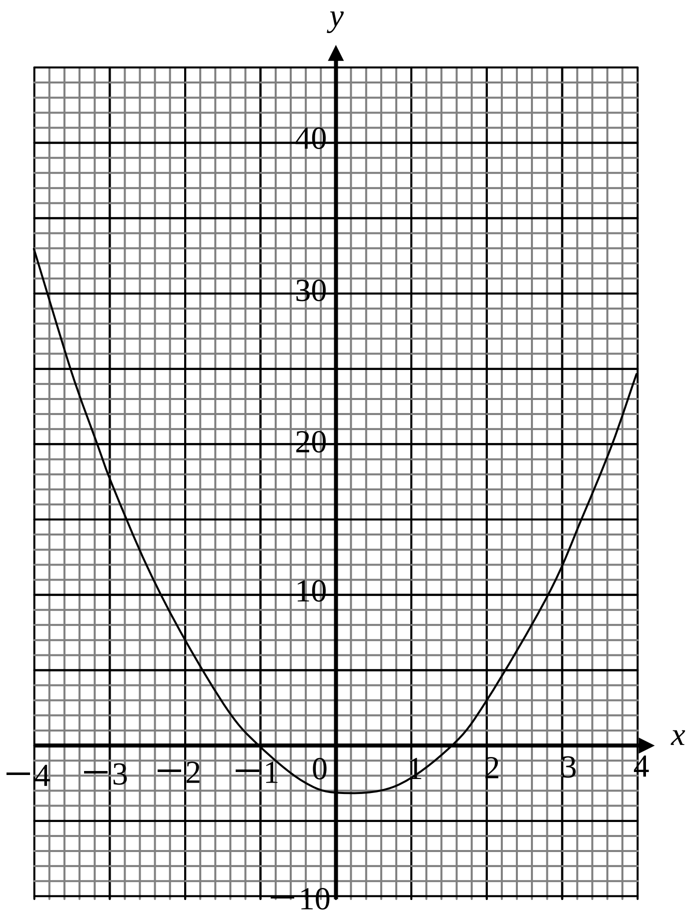
工作纸 1：不同的函数表示的比较

1. 考虑函数 $f(x)=2x^2-x-3$。

(I)　$f(x)$ 的一个表列表示如下：

x	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...
$F(x)$	...	33	18	7	0	–3	–2	3	12	25	...

(II)　$f(x)$ 在 $-4\le x\le 4$ 的图像:



(III)　该函数的代数式表示如下:

$$f(x)=2x^2-x-3$$

(a) (i) 写出 $x = -3$ 时 $f(x)$ 值。

(ii) 写出 $x = 2.5$ 时 $f(x)$ 值。

(iii) 写出 $x = 3.7$ 时 $f(x)$ 值。

(iv) 写出 $x = 6$ 时 $f(x)$ 值。

(b) 求上述各项时，以「✓」在下表表示你选用了函数哪个表达式。

x 值	表列	图像	代数式
$x = -3$			
$x = 2.5$			
$x = 3.7$			
$x = 6$			

(c)　解释你的选择。

____

____

____

2. 对所有正整数定义函数 T 如下:

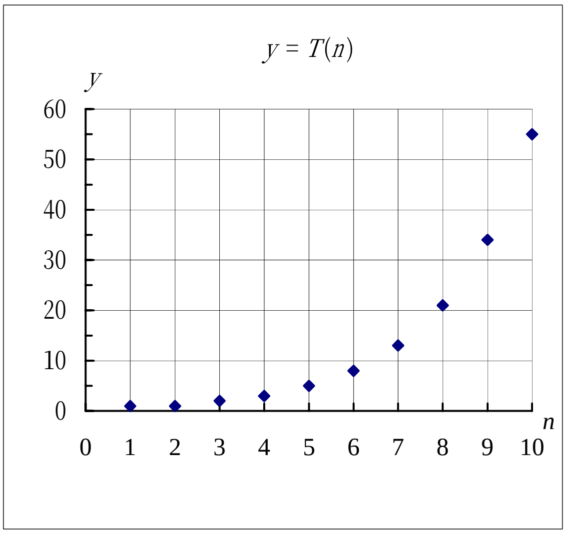
$$\begin{cases} T(1)=T(2)=1 \\ T(n+2)=T(n)+T(n+1), \quad \text{其中} n\geq 1 \end{cases}$$

明显地，所有正整数决定唯一一个 $T(n)$的值。$T(n)$可称为第 n 项。

(I)　T 的表列表示如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$T(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

(II)　T 的图像表示如下:



(III)　T 的代数式表示如下:

$$T(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(a) 求以下各项的值。

(i) 第 11、 12 和 13 项。

(ii) 第 41 和 42 项。

(iii) 第 43、44 和 45 项。

(b) (i) 在求(a)部各项的值时，指出你选用了函数的哪个表达式，并用「✓」表示你的选择。

	表列	图像	代数式
第 11、 12 和 13 项			
第 41 和 42 项			
第 43、44 和 45 项			

(ii) 解释你的选择

工作纸 2：认识不同的函数表示方式

1. 考虑下列各表。

   设 $0 \le x \le 8$ 和 $0 \le y \le 8$ 为考虑的范围。

表 2.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

表 2.2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	2	4	5	6	7	8

表 2.3

x	0	1	2	3	4	2	4	6	8
y	0	1	4	2	5	3	6	7	8

表 2.4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	3	4	2	4	6	8

表 2.5

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	2	3	8	4	7	5	6

在下列各情况中，已知 $0 \le x \le 8$ 及 $0 \le y \le 8$。判断

(a)「y 是 x 的函数」是否正确；

(b)「x 是 y 的函数」是否正确。

在适当的空格内加上「✓」。

		y 是 x 的函数				x 是 y 的函数			
	当 x 是	整数	整数	实数	实数	整数	整数	实数	实数
	当 y 是	整数	实数	整数	实数	整数	实数	整数	实数
表 2.1	正确								
	不能确定								
	不正确								
表 2.2	正确								
	不能确定								
	不正确								
表 2.3	正确								
	不能确定								
	不正确								
表 2.4	正确								
	不能确定								
	不正确								
表 2.5	正确								
	不能确定								
	不正确								

2． 在下列各题，判断 y 是否 x 的函数，并加以解释。

(a) $y = 2x + 1$,

(b) $y = x^2 + 3$,

(c) $y^2 = x^2 + 3$,

(d) $y^3 = x^2 - x + 5$.

3．在下列各图，判断 y 是否 x 的函数，并加以解释。

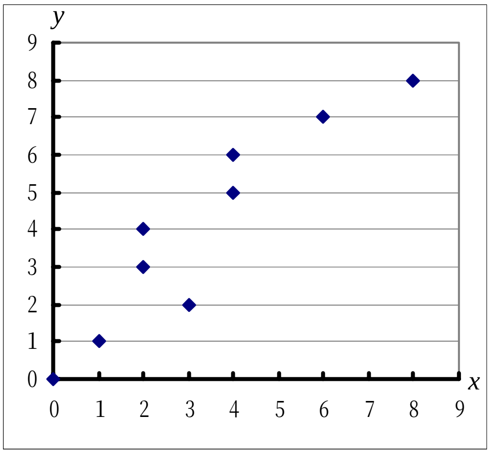


图 3.1

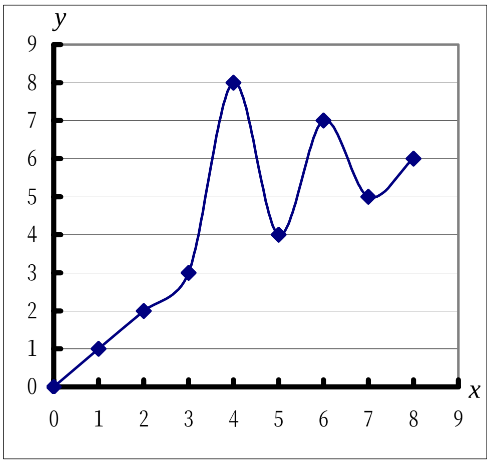


图 3.2

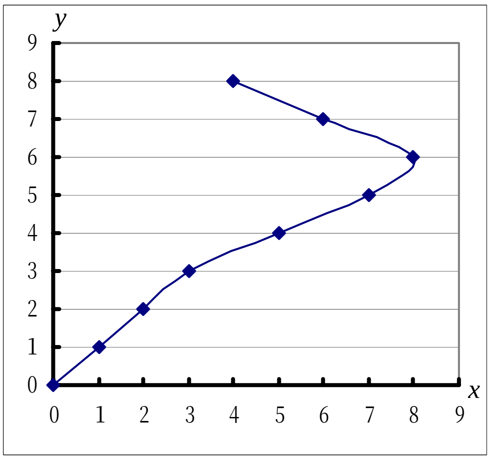


图 3.3

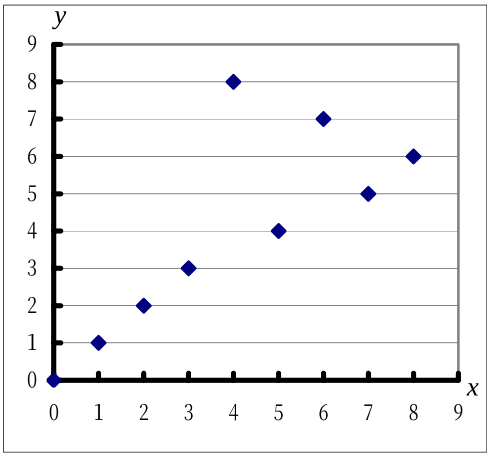


图 3.4

教师注意事项 ：

1. 建议教学时数：

工作纸 1　　40 分钟

工作纸 2　　40-60 分钟

2. 工作纸 1 的答案如下。

1. (a)

x	–3	2.5	3.7	6
$f(x)$	18	7	20.68 或约 20	63

(b)

x	表列	图像	代数式
$x = –3$	✓	✓	✓
$x = 2.5$		✓	✓
$x = 3.7$		✓	✓
$x = 6$			✓

(c)选择的理由如下:

(i) 该函数的值可直接从表中读出，也可以从图像看出来或用代数式试算出来，但后二者的方法较花时间。

(ii) 函数的值并不能从表中读出，但较容易从给出的图像读取。（部分学生会直接用代数式计算函数的值并指出答案较为准确。）

(iii) 该函数的值可以用图像或代数式求得。（教师须提醒学生在利用图像读出的值的准确度，教师可进一步指出图像的比例可影响答案的准确度，从而指出 x 及 y 轴比例的重要性。）

(iv) 当 $x = 6$ 时，函数的值并未能在给出的表格或图像内读取，所以只可用代数式找出答案。（教师可指出选择 x 值的范围的重要性。如果图像已包括了 $x = 6$ 的值，函数的值便可从图像读取。）

2.(a)

n	11	12	13	41	42	43	44	45
$T(n)$	89	144	233	165580141	267914296	433494437	701408733	1134903170

2.(b)(i)学生应提出下面的答案。

	表列	图像	代数式
第 11、 12 和 13 项	✓		
第 41 和 42 项			✓
第 43，44 和 45 项	✓		✓

2.(b)(ii)

- 求第 11、12 和 13 项：

  重复运用递归关系 $T(n+2) = T(n) + T(n+1)$ 得出第 11、 12 和 13 项，这明显是几个方式中最简单的方法。

- 在求第 41 和 42 项：

  用迭代法求第 41、42 项是费时和易犯错的。反而以计算器用代数式求答案更合宜。

- 在求第 43、44 和 45 项：

  在这一部分混合使用代数式和迭代法是最佳方法。因由题(b)（ii），41、42 项已由计算器以代数式求得。然后，以递归关系用迭代法便可求第 43、44 和 45 项。

3. 学生选择方法是开放的。教师须指导学生明白不可瞎猜，必须提出恰当的理由去解释答案。

4. 工作纸 1 问题 2 内的表格可以用递归关系 $T(n+2)=T(n)+T(n+1)$ 和初始条件 $T(1)=T(2)=1$ 迭代得到，即

$$T(3)=T(1)+T(2)=1+1=2$$

$$T(4)=T(2)+T(3)=1+2=3$$

$$\vdots$$

5. 工作纸 1 问题 2 内的代数式可由带有初始条件的 $T(1)=T(2)=1$ 及二阶差分方程 $T(n+2)=T(n)+T(n+1)$ 得到。

要解这个方程，先考虑辅助方程 $t^2-t-1=0$。此辅助方程的根是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。所以

$$T(n)=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (*)$$

，其中 A 和 B 是常数。要找出 A 和 B 的值，先代 $n=1$ 和 2 入(*)以得出两条线性方程。解此联立方程，得

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}，\ B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

最后对所有正整数 $T(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

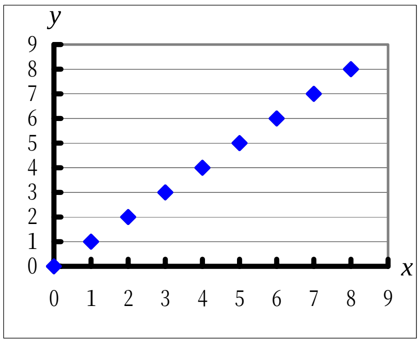
6. 工作纸 2 问题 1 的答案：

1.(a)及(b)

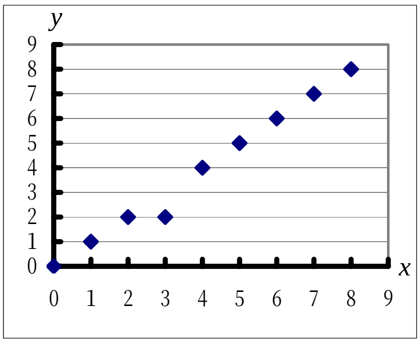
		y 是 x 的函数				x 是 y 的函数			
	当 x 是	整数	整数	实数	实数	整数	整数	实数	实数
	当 y 是	整数	实数	整数	实数	整数	实数	整数	实数
表 2.1	正确	✓	✓			✓		✓	
	不能确定			✓	✓		✓		✓
	不正确								
表 2.2	正确	✓	✓						
	不能确定			✓	✓				
	不正确					✓	✓	✓	✓
表 2.3	正确					✓		✓	
	不能确定						✓		✓
	不正确	✓	✓	✓	✓				
表 2.4	正确	✓	✓						
	不能确定			✓	✓				
	不正确					✓	✓	✓	✓
表 2.5	正确	✓	✓			✓		✓	
	不能确定			✓	✓		✓		✓
	不正确								

7. 由表 2.1 至 2.5 数据所对应图像如下：

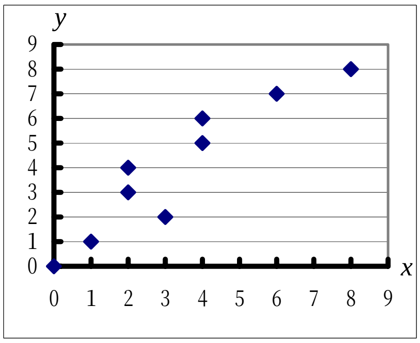
(a)



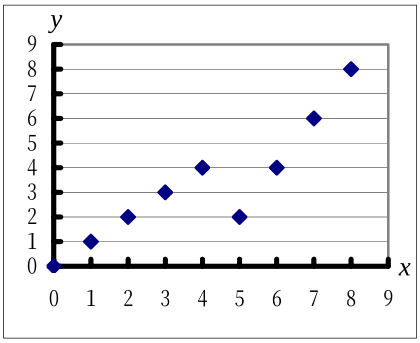
(b)



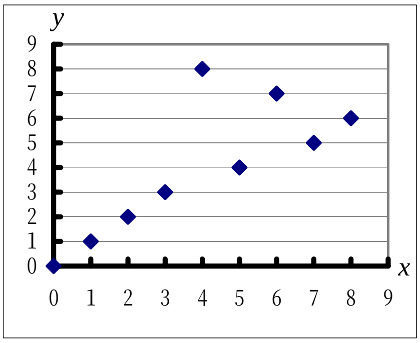
(c)



(d)

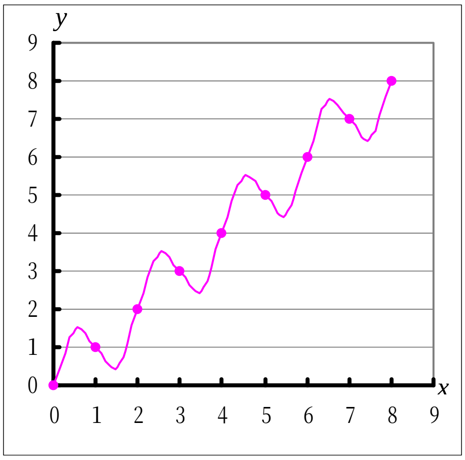


(e)

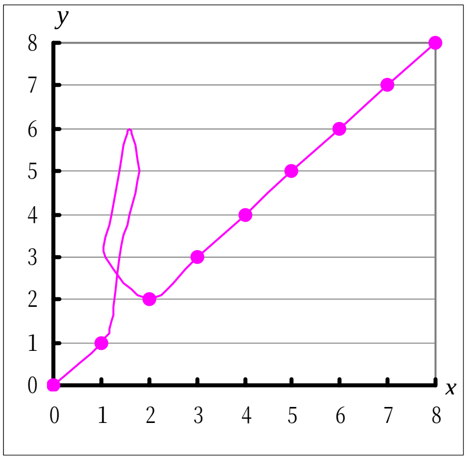


8. 当 x 和 y 都是实数时，以下各图都是按表 2.1 内各 x、y 值画出来而可能出现以下的图像。

y 是 x 的函数

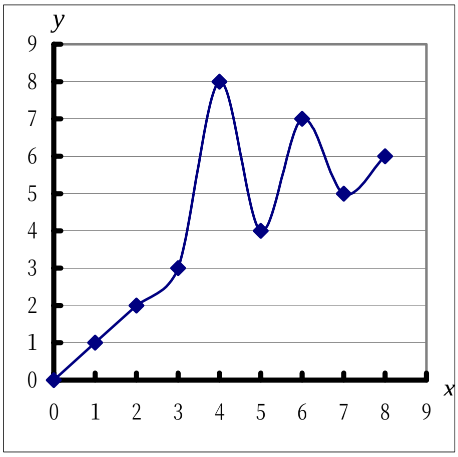


y 不是 x 的函数

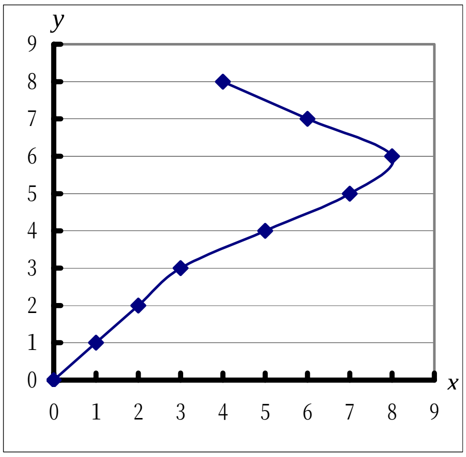


同样地，下列各图均可以是表 2.5 所对应的其中两个图像。

y 是 x 的函数



y 不是 x 的函数



因此，教师须提醒学生在判断一个关系是否函数时，要留意问题给出的条件和函数的基本定义。例如，在问题 1 表 2.1 中，当 x 取整数值，y 是 x 的函数；但当 x 为实数时，y 则不能确定是否 x 的函数。

9. 教师由此 2 例便可与学生讨论表列式表示函数的限制。可是在现实数据中，往往得到有限数量表列出来，而其后尝试找出其对应的图像及以代数式表示其关系。

10. 工作纸 2 问题 2 及 3 的答案。

2. (a) 是。

对每一个 x，只有唯一一个 $2x+3$ 的值与之对应，所以 y 的值是唯一的。因此 y 是 x 的函数。

(b) 是。

对每一个 x，只有唯一一个 x^2+3 的值与之对应，所以 y 的值是唯一的。因此 y 是 x 的函数。

(c) 否。

对每一个 x，只有唯一一个 x^2+3 的值与之对应。而且对任意一个正数 a，方程 $y^2=a$ 均有两个解，即每个 a 有两个对应的 y 值。当 $x=1$ 时，$y^2=1^2+3=4$，即 y 可取值为+2 或-2。故对于任意一个 x 值并不能给出唯一的 y 值，因此 y 不是 x 的函数。

(d) 是。

对每一个 x，只有唯一一个 x^2-x+5 的值与之对应。而且对任意一个正数 a，方程 $y^3=a$ 的 y 值是唯一的，所以 y 是 x 的函数。

3. 图像 3.1：y 不是 x 的函数，在输入值 $x=4$ 时，得出两个不同的输出值。

图像 3.2：y 是 x 的函数

图像 3.3：y 不是 x 的函数，在输入值由 $x=4$ 至 $x=8$ 的区域内，每一 x 输入值都有超过一个 y 输出值。

图像 3.4：y 是 x 的函数

11. 由第 3 题图 3.3 及 3.4 的类似问题，教师可进一步巩固学生了解 x 值的选取范围对判断“y 是 x 的函数”的重要性。