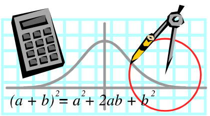


示例六：
函数概念的常见迷思

目　　标： 厘清学生对以下容易混淆的函数的概念：
(a) $f(0) \neq 0$
(b) $f(-a) \neq -f(a)$
(c) $f(ab) \neq a \cdot f(b)$
(d) $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$
(e) $f(ab) \neq f(a) \cdot f(b)$
其中 a 及 b 为常数

学习阶段： 第四学习阶段

学习单位： 函数及其图像

所需教材： 工作纸

预备知识： 懂得计算函数的值

教学内容：

1. 教师提问学生，在一般情况下，$f(5) = f(2) + f(3)$是否正确及解释他们的理解。
   (a) 设 $f(x) = 2x - 5$，分别计算 $f(2+3)$及 $f(2) + f(3)$，教师提问学生 $f(2+3) = f(2) + f(3)$是否正确。

   (b) 教师从而再提问学生，对于任意函数 $f(x)$及任意常数 a 及 b，以下数式是否一定正确：$f(a+b) = f(a) + f(b)$。

2. 教师提问学生等式 $f(-x) = -f(x)$是否一定正确，并要求学生提供例子。

3. 教师分发工作纸 1，着学生自行探究有关函数概念，完成工作纸并与学生进行讨论及作出以下总结：

   (a) 对于任何函数 $f(x)$及常数 a 及 b，以下数式未必一定正确：

(i) $f(0)=0$

(ii) $f(-a)=-f(a)$

(iii) $f(ab)=a\cdot f(b)$

(iv) $f(ab)=f(a)\cdot f(b)$

(v) $f(a+b)=f(a)+f(b)$

(b) 教师要强调，对于某些数值，上列等式有可能在某些函数成立，但并非所有函数等式都成立。例如：当 $f(x)=3x$，$f(-a)=-f(a)$，然而，一般而言 $f(-a)\neq -f(a)$，反例如 $f(x)=x$ 则 $f(-a)\neq -f(a)$。

(c) 同样地，若上列等式在某些数值成立，但并不代表所有数值等式都成立。例如，当 $f(x)=(x-8)(x-4)$，$f(2\times 4)=f(2)\times f(4)=0$，但 $f(2\times 3)\neq f(2)\times f(3)$，因此，一般而言，$f(ab)\neq f(a)\cdot f(b)$。还有，若学生已学三角函数，教师可讨论若 $f(x)=\sin x$，$f(360°+30°)=f(360°)+f(30°)$，但 $f(300°+30°)\neq f(300°)+f(30°)$，因此，一般而言，$f(a+b)\neq f(a)+f(b)$。

4. 教师须提醒学生有关函数记法的意义并且他们不应将 $f(x)$ 看成 $f\cdot x$。同时，在一般数字运算常用的分配律亦不在函数上成立。换言之，一般函数，$f(a+b)\neq f(a)+f(b)$ 及 $f(a\cdot b)\neq f(a)\cdot f(b)$。

5. 教师着学生回家完成工作纸 2，并给予适当指导。

工作纸 1：函数概念的常见迷思

1. 试完成表中各函数的值：

	$x=-3$	$x=-2$	$x=0$	$x=2$	$x=3$	$x=5$	$x=6$
(i) $f(x)=x^2$							
(ii) $f(x)=x^3$							
(iii) $f(x)=x-1$							
(iv) $f(x)=2x$							
(v) $f(x)=x^2+3$							

2. (a) 从上表中，根据 $f(x)=x^2$，找出 $f(2)$，$f(3)$及 $f(5)$的值，由此判断 $f(5)=f(2)+f(3)$是否正确。

____

(b) a 及 b 为任意常数，参看表内不同的函数，你认为 $f(a+b)=f(a)+f(b)$是否一定正确。

____

3. 设 a 及 b 为任意常数。参考上表，试判别以下各项是否<u>一定正确</u>；如不一定正确，请列举例子。

(a) $f(0)=0$

____

____

____

____

(b) $f(-a) = -f(a)$

(c) $f(ab) = a \cdot f(b)$

(c) $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$

工作纸 2：函数概念的常见迷思

$f(x)$ 及 $g(x)$ 为任意函数，而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{m}$ 及 $\boldsymbol{n}$ 为任意常数。

1. 在下列各题中，判别以下哪些是否一定正确，并在适当的空格内加上✓。如不一定正确，请举出反例。

		一定正确	不一定正确	反例
(a)	$-f(2)=f(-2)$	☐	☐	____________
(b)	$f(m)+f(n)=f(m+n)$	☐	☐	____________
(c)	$g(a+1)=g(a)+1$	☐	☐	____________
(d)	$a+f(b)=f(a+b)$	☐	☐	____________
(e)	$g(a)-g(b)=g(a-b)$	☐	☐	____________
(f)	$f(m+n)=f(n+m)$	☐	☐	____________
(g)	$f(a-1)=f(1-a)$	☐	☐	____________
(h)	$f(ab)=f(ba)$	☐	☐	____________
(i)	$g(2a)=g(a)\times 2$	☐	☐	____________
(j)	$g(5b)=5g(b)$	☐	☐	____________
(k)	$f(mn)=f(m)\times f(n)$	☐	☐	____________
(l)	$[f(a)]^2=f(a)\cdot f(a)$	☐	☐	____________
(m)	$[f(a)]^2=f(a^2)$	☐	☐	____________

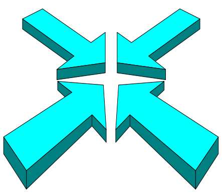
2. 以下涉及函数的等式一定正确吗？试列举例子支持你的说法。

(a) $f(0)=0$

(b) $\dfrac{g(x)}{g(y)}=g\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(c) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{f(a)}$

(d) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{f(1)}{f(a)}$



3. 试判断下列语句是否成立，并加以解释。

(a) 如 $a = b$，则 $f(a) = f(b)$。

(b) 如 $f(a) = f(b)$，则 $a = b$。

教师注意事项

1. 本示例活动约需时 60 分钟。

2. 工作纸答案如下：

工作纸 1

1.

	$x=-3$	$x=-2$	$x=0$	$x=2$	$x=3$	$x=5$	$x=6$
(i) $f(x)=x^2$	9	4	0	4	9	25	36
(ii) $f(x)=x^3$	–27	–8	0	8	27	125	216
(iii) $f(x)=x-1$	–4	–3	–1	1	2	4	5
(iv) $f(x)=2x$	–6	–4	0	4	6	10	12
(v) $f(x)=x^2+3$	12	7	3	7	12	28	39

2. (a)不一定正确。
(b)不一定正确。

3. (a)否。
例：当 $f(x)=x-1$ 时，
因为 $f(0)=-1$
所以 $f(0)\neq 0$

(b)否。
例：当 $f(x)=x^2$ 时，
因为 $f(-2)=4$
及 $-f(2)=-4$
所以 $f(-2)\neq -f(2)$

(c)否。
例：当 $f(x)=x-1$ 时，
因为 $f(2\times 3)=f(6)$
$=5$
及 $2\times f(3)=2\times 2$

$= 4$

所以 $f(2\times 3)\neq 2\times f(3)$

(d) 否。

例：当 $f(x)=2x$ 时，

因为 $f(2\times 3)=f(6)$

$=12$

及 $f(2)\cdot f(3)=4\times 6$

$=24$

所以 $f(2\times 3)\neq f(2)\cdot f(3)$

工作纸 2

1.

	一定正确	不一定正确	反例
(a) $-f(2)=f(-2)$	☐	☑	$f(x)=x^2$
(b) $f(m)+f(n)=f(m+n)$	☐	☑	$f(x)=x^2$， $m=3$， $n=4$
(c) $g(a+1)=g(a)+1$	☐	☑	$g(x)=3x$， $a=2$
(d) $a+f(b)=f(a+b)$	☐	☑	$f(x)=3x$， $a=2$， $b=3$
(e) $g(a)-g(b)=g(a-b)$	☐	☑	$g(x)=x^2$， $a=2$， $b=3$
(f) $f(m+n)=f(n+m)$	☑	☐	
(g) $f(a-1)=f(1-a)$	☐	☑	$f(x)=3x$， $a=3$
(h) $f(ab)=f(ba)$	☑	☐	
(i) $g(2a)=g(a)\times 2$	☐	☑	$g(x)=x^2$， $a=3$
(j) $g(5b)=5g(b)$	☐	☑	$g(x)=x^2$， $b=2$
(k) $f(mn)=f(m)\times f(n)$	☐	☑	$f(x)=2x$， $m=2$， $n=3$
(l) $[f(a)]^2=f(a)\cdot f(a)$	☑	☐	

(m) $[f(a)]^2 = f(a^2)$ ☐ ☑ $f(x)=2x$， $a=3$

2. (a) 否

例：设 $f(x)=2x+1$

$f(0)=2(0)+1$

$=1\neq 0$

（若学生提出当 $f(x)=x^2$，则 $f(0)=0$，那时，教师必须提醒在特例中等式成立，但一般而言，如 $f(x)=mx+c$ 或 $g(x)=ax^2+bx+c$ 等，其中 a、b、c 及 m 均为非零的值时，则 $f(0)\neq 0$。）

(b) 否

例： 设 $g(x)=2x+3$

因为 $\dfrac{g(3)}{g(6)}=\dfrac{2\times 3+3}{2\times 6+3}$

$=\dfrac{9}{15}$

$=\dfrac{3}{5}$

而 $g(\frac{3}{6})=g(\frac{1}{2})$

$=2\times\frac{1}{2}+3$

$=4$

所以 $\dfrac{g(3)}{g(6)}\neq g(\frac{3}{6})$

（同样地，当学生提出 $g(x)=x^2$，则 $\dfrac{g(3)}{g(6)}=g\left(\dfrac{3}{6}\right)$，教师应指出在特例中等式成立，但一般而言，如 $f(x)=mx+c$ 或 $g(x)=ax^2+bx+c$ 等，其中 a、b、c 及 m 均为非零的值时，则 $\dfrac{g(x)}{g(y)}\neq g\left(\dfrac{x}{y}\right)$。）

(c) 否

例： 设 $f(x)=2x$

因为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{3}$

而 $\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{2\times 3}$

$=\frac{1}{6}$

所以 $f\left(\frac{1}{3}\right)\neq\frac{1}{f(3)}$

(d) 否

例： 设 $f(x)=x+2$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+2=2\frac{1}{3}$

而 $\frac{f(1)}{f(3)}=\frac{1+2}{3+2}$

$=\frac{3}{5}$

明显地 $f\left(\frac{1}{3}\right)\neq\frac{f(1)}{f(3)}$

3. (a) 成立，由函数的基本定义得知。
   (b) 不一定成立，若 $f(x)=x^2$，$f(3)=9$，$f(-3)=9$，明显地 $f(3)=f(-3)$，但 $3\neq -3$。

3. 教师要特别强调，对于某些数值，上述函数等式可能成立，但并非所有数值均可令等式成立。在问题中“一定正确”的意思是指对所有函数在其定义域内的每一个值，等式都成立。

4. 教师可进一步与学生讨论哪些类型的函数能满足上述所提及的各等式，从而认识它们的特性，一般而言：

   (a) 若 $f(x)=ax$、$f(x)=ax^2$、$f(x)=ax^3$等等（a 为常数），则 $f(0)=0$；
   (b) 若 $f(x)$为奇函数，如 $f(x)=ax$、$f(x)=ax^3$、$f(x)=ax^5$等等（a 为常数），则 $f(-b)=-f(b)$；

(c) 若 $f(x)=mx$（m 为常数），则 $f(ab)=a\cdot f(b)$；

(d) 若 $f(x)=mx$（m 为常数），则 $f(a+b)=f(a)+f(b)$；

(e) 若 $f(x)=x$、$f(x)=x^2$、$f(x)=x^3$ 等等，则 $f(ab)=f(a)\cdot f(b)$。