

示例七： 二次函数的图像

目标：探究二次函数图像的特征及二次函数的性质。

学习阶段：4

学习单位：函数及其图像

所需教材：工作纸、*Excel file (QUAD.XLS)*、*Winplot* 及印有 $y = x^2$ 图像的胶片

预备知识：在直角坐标平面上读出铅垂线的方程。

教学内容：

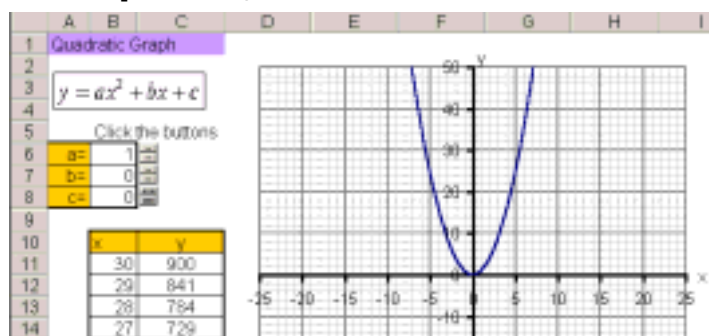
1. 教师派发工作纸 1，并开启档案 *QUAD.XLS*，着学生完成第 1-3 题。
2. 教师帮助学生总结 a 的数值对函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像的影响。
3. 教师着学生完成第 4-5 题，以探讨 b 及 c 值对函数图像的影响。
4. 教师与学生讨论 b 及 c 的值对函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像的影响，并进一步讨论第 6 题以总结 a 、 b 及 c 的值对函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像的影响。其中初步得到以下的观察：
 - (a) 无论 a 怎样改变，只要 $a \neq 0$ ，函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像便呈现一具有对称性质的抛物线；
 - (b) 图像开口的阔、窄及向上或向下只受 a 影响；
 - (c) 图像的 y -轴截距只受 c 值影响；
 - (d) 图像的顶点随着 b 或 c 值而改变。
 在讨论以下观察时，教师可要求学生解释有关现象，如为什么 $a=0$ 时，它便不是曲线等等。
5. 教师派发工作纸 2，并开启代数软件 *Winplot* 以探讨 $y = (x+h)^2$ 及 $y = (x+h)^2 + k$ 的图像的特点。

6. 教师嘱学生依工作纸 2 之指示完成各项活动。教师可加以提示并作出适当总结。其中包括：
- (a) 一表达为完全平方式的二次函数如 $y = a(x+h)^2$, a 的值决定图像的开口方向及极值是极大值抑或是极小值 ;对称轴为 $x = -h$ 及顶点的坐标为 $(-h, 0)$;
 - (b) 若二次函数如 $y = a(x+h)^2 + k$, 图像形状及对称轴与 $y = a(x+h)^2$ 没有改变 , 但顶点则改为 $(-h, k)$ 。
- 在讨论以上观察时 , 教师可要求学生解释有关现象 , 如为何完全平方式有助判断顶点的坐标及为何 a 值完全决定图像的开口方向等等。教师亦可透过完全平方式对顶点的解释联系工作纸 1 的观察如 “图像的顶点随着 b 或 c 值而改变”。
7. 在学生对图形如二次函数 $y = (x+h)^2 + k$ 与顶点及对称轴的关系有所认识后 , 教师由此可带出配方法将 $y = ax^2 + bx + c$ 变为 $y = a(x-h)^2 + k$ 的必要性及引导学习配方法及其重要性。

工作纸 1：二次函数的图像的特性（一）

问题：

1. 按 ↓ 或 ↑ 按钮，将 a 、 b 、 c 的值分别调整为 1、0、0。



图中所示为二次函数 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 的图像。

2. 保持 b 和 c 的值为 0，按 ↑ 按钮将 a 的值由 1 渐渐增至 4。留意图像的变化，并完成下表。

a 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
2		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
3		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
4		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线

- (a) 试描述图像的变化。

- (b) 图像的顶点位置有甚么改变？

- (c) 图像的开口方向有甚么改变？

3. 保持 b 和 c 的值为 0，按 \downarrow 按钮将 a 的值由 4 减至 -4 。留意图像的变化，并完成下表。

a 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
0.5		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
0.2		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
0		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-1		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-2		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-3		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-4		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线

- (a) 试描述图像的变化。

- (b) 图像的顶点位置有甚么改变？

- (c) 当 $a > 0$ 时，图像的开口向_____（上 / 下）
 当 $a < 0$ 时，图像的开口向_____（上 / 下）

4. 保持 $a = 1$ 及 c 的值为 0，按 \uparrow 按钮以将 b 的值由 0 渐渐增至 12 及按 \downarrow 按钮以将 b 的值渐渐减至 -8 。留意图像的变化，并完成下表。

b 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
4		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
8		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
12		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-4		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-8		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线

5. 保持 $a = 1$ 及 b 的值为 0，按 \uparrow 按钮以将 c 的值由 0 渐渐增至 12 及按 \downarrow 按钮以将 c 的值渐渐减至 -8。留意图像的变化，并完成下表。

c 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
4		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
8		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
12		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-4		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线
-8		越阔/越窄/不变		有/没有	直线/曲线

6. 在问题 2 至 5 中，我们发现：

(a) 无论 a 怎样变化 ($a \neq 0$)， $y = ax^2 + bx + c$ 的图像都有共同特征，即是

(b) 当 a 的值由正转为负时，图像的开口方向会：

(c) 当 a 的数值（不考虑正负号）越大时，则图像的开口越_____（阔 / 窄）。

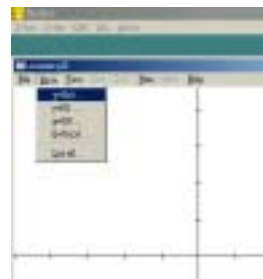
(d) 当 $a = 0$ 时，图像变成_____，理由是：

(e) 当 b 和 c 的数值保持不变时，而 a 的值改变时，则图像的_____（开口的阔窄 / 顶点的位置 / y 轴截距）会有所改变；而_____（开口的阔窄 / 顶点的位置 / y 轴截距）并没有改变。

(f) 当 a 和 c 的数值保持不变而 b 的值改变时，则图像的_____会有所改变；而_____并没有改变。

(g) 当 a 和 b 的数值保持不变而 c 的值改变时，则图像的_____会有所改变；而_____并没有改变。

工作纸 2：二次函数的图像的特性（二）



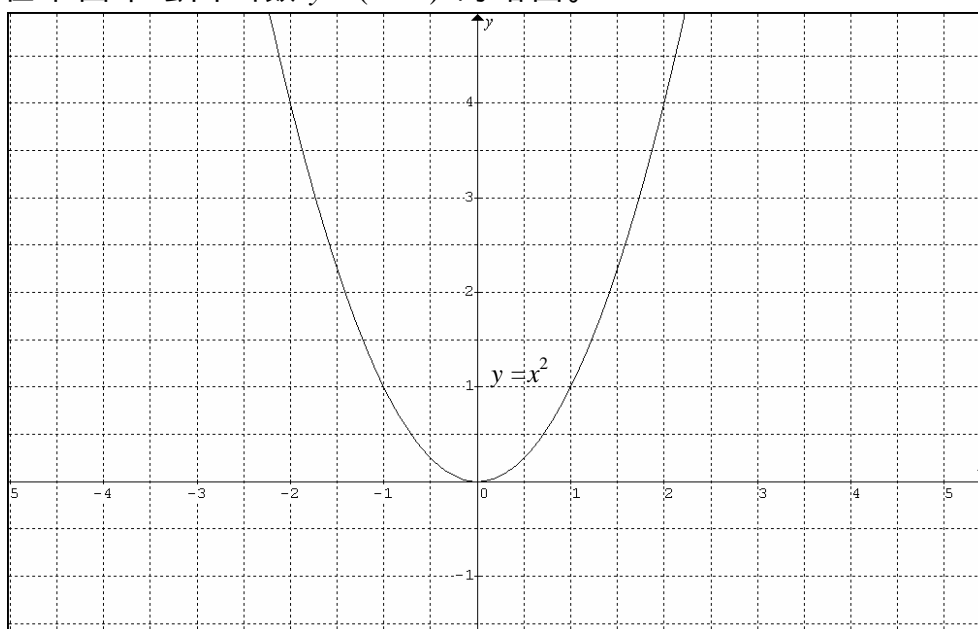
活动 1

步骤：

1. 开启代数软件 *Winplot*。
2. 按“2-dim”。
3. 按“Equa”、“ $y=f(x)...$ ”。
4. 输入“ x^2 ”以绘画函数 $y=x^2$ 的图像。
5. 重复步骤 3，并输入“ $(x-2)^2$ ”以绘画函数 $y=(x-2)^2$ 的图像。
6. 重复步骤 3，并输入“ $(x-4)^2$ ”以绘画函数 $y=(x-4)^2$ 的图像。
7. 比较所得的图像，你有甚么发现呢？

8. 图像的形状有甚么改变？

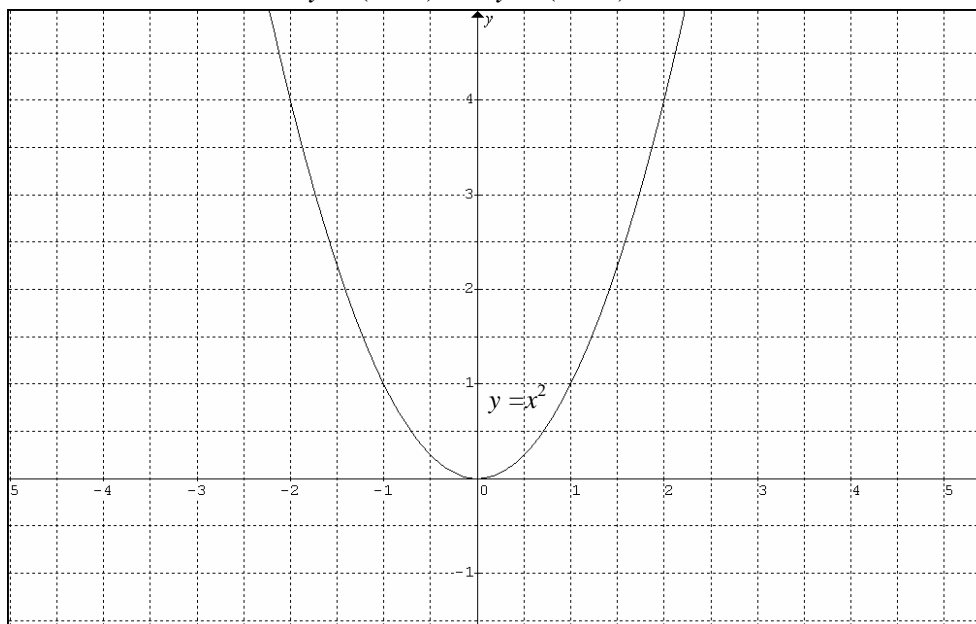
9. 在下图中绘画函数 $y=(x-3)^2$ 的略图。



10. 利用 *Winplot* 绘画函数 $y=(x-3)^2$ 的图像，结果与步骤 9 中所得的结果是否一致呢？

11. 你的结论是：

12. 在下图中绘画函数 $y = (x+1)^2$ 和 $y = (x+3)^2$ 的略图。



13. 利用 Winplot 绘画函数 $y = (x+1)^2$ 和 $y = (x+3)^2$ 的图像，结果与步骤 12 中所得的略图是否一致呢？

14. 观察各图，完成下表：

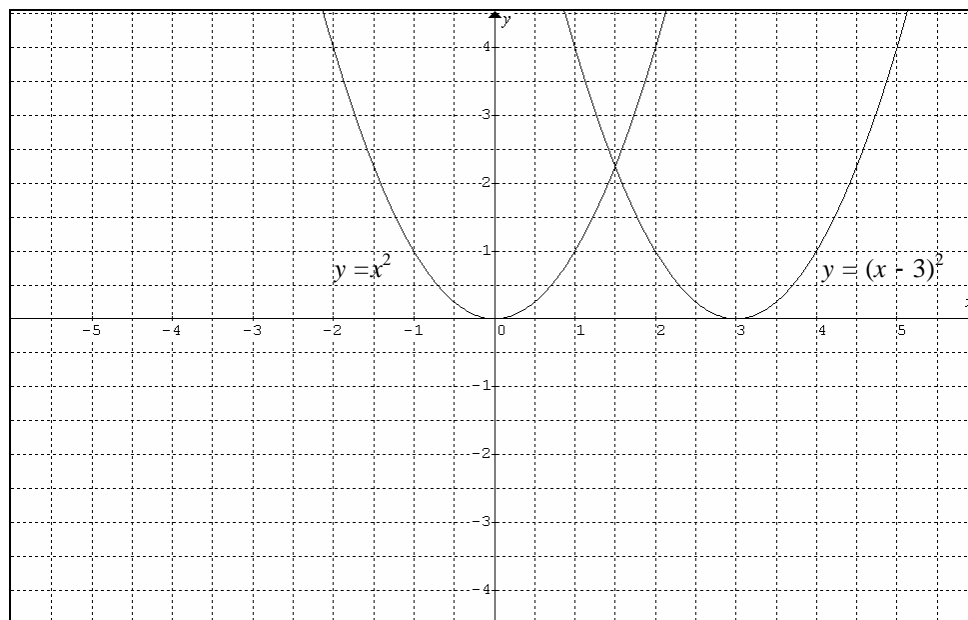
	$y = (x-3)^2$	$y = (x+1)^2$	$y = (x+3)^2$
对称轴的方程			
顶点坐标			
y 的最大值 / 最小值			

15. 综合以上结果，你有甚么结论呢？

活动 2

步骤：

1. 在下图中绘画函数 $y = (x-3)^2 + 1$ 的略图。



2. 与你的同学比较，你们得到相同的图像吗？

3. 利用绘图软件 *Winplot* 来验证结果，并探讨 $y = (x+h)^2 + k$ 的图像的特征如何随 h 和 k 的值而改变。留意图像的对称轴及顶点的位置。函数 $y = (x+h)^2 + k$ 中的 h 值和 k 值如何影响其图像位置（如其对称轴的方程及其顶点的位置）？

4. 试写出下列各函数所对应的图像的顶点和对称轴，并写出各函数的极小值或极大值。

顶点坐标	对称轴的方程	极小值 / 极大值
(a) $y = (x-3)^2 - 4$		极(小 / 大)*值 = _____
(b) $y = (x+3)^2 - 4$		极(小 / 大)*值 = _____

	顶点坐标	对称轴的方程	极小值 / 极大值
(c)	$y = (x-3)^2 + 4$		极(小/大)*值 = _____
(d)	$y = (x+3)^2 + 4$		极(小/大)*值 = _____
(e)	$y = (x+2)^2 - 5$		极(小/大)*值 = _____
(f)	$y = (x-12)^2 + 5$		极(小/大)*值 = _____
(g)	$y = (x-7)^2$		极(小/大)*值 = _____
(h)	$y = x^2 + 11$		极(小/大)*值 = _____
(i)	$y = -x^2 + 3$		极(小/大)*值 = _____
(j)	$y = -2x^2$		极(小/大)*值 = _____
(k)	$y = 5(x-8)^2 + 1$		极(小/大)*值 = _____
(l)	$y = 3(x-8)^2 + 1$		极(小/大)*值 = _____
(m)	$y = -3(x-1)^2 - 4$		极(小/大)*值 = _____
(n)	$y = -(x+5)^2 + 7$		极(小/大)*值 = _____
(o)	$y = 3(5-x)^2 - 6$		极(小/大)*值 = _____

* 圈出正确答案

利用 Winplot 验算答案。

5. 综合而言，函数 $y = a(x+h)^2 + k$ (若 a , h 及 k 为常数) 图像的对称轴是 _____ 及顶点是 _____。

教师注意事项：

1. 本示例活动约需时 40-50 分钟。
2. 在使用应用档 *QUAD.XLS* 时，教师须提醒学生必须按 ↓ 或 ↑ 按钮以调整 a 、 b 、 c 的值，不得直接于储存格输入所需的值，否则档案将不能正常运作。
3. 在使用应用档 *QUAD.XLS* 时，教师应与学生解释图像、表列式及代数式三者之间的关系，甚至可要求学生计算表列内任意 x 的值，验算与计算机显示表列内 y 值是否相同，从而更深刻了解它们的关系；否则学生只感觉图像不断改变但不明所以。
4. 教师在使用工作纸 1 时，可考虑以各表内的标题作观察图像变化的框架，而无须要求学生完成第 2 至 5 题，但必须与学生作第 6 题的总结活动。
5. 有部分学生在讨论「图像的开口阔窄」时，会不理解其要求，有可能误以为 $y = x^2$ 、 $y = x^2 + 4$ （第 5 题）及 $y = x^2 + 4x$ （第 4 题）三幅图会有不同的开口阔窄。教师须略加说明，有需要时亦可用 $y = x^2$ 图像胶片作解释。
6. 因着应用档 *QUAD.XLS* 每次只出现一个图像，学生较难比较不同二次函数代数式与图像的关系，故此工作纸 2 转用 *Winplot* 以方便显示数个图像在同一版面，学生较易将图像与代数式变化联系起来。
7. *Winplot* 软件是免费软件，教师可在 <http://math.exeter.edu/rparris> 下载。

8. 工作纸 1 的建议答案如下：

1. 图中所示为二次函数 $y = \underline{x^2}$ 的图像。

2.

a 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
2	向上	越窄	(0, 0)	有	曲线
3	向上	越窄	(0, 0)	有	曲线
4	向上	越窄	(0, 0)	有	曲线

(a) 当 a 的值越大，图像的开口越窄。

(b) 没有改变。

(c) 没有改变。

3.

a 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
0.5	向上	越阔	(0, 0)	有	曲线
0.2	向上	越阔	(0, 0)	有	曲线
0	/	/	/	/	直线
-1	向下	越窄	(0, 0)	有	曲线
-2	向下	越窄	(0, 0)	有	曲线
-3	向下	越窄	(0, 0)	有	曲线
-4	向下	越窄	(0, 0)	有	曲线

(a) 当 a 的值由正转为负，图像的开口方向由向上改为向下。
当 a 的值为负时， a 的值越小，图像的开口越窄。

(b) 没有改变。

(c) 当 $a > 0$ 时，图像的开口向 上 (上 / 下)

当 $a < 0$ 时，图像的开口向 下 (上 / 下)

4.

b 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
4	向上	不变	(-2, -4)	有	曲线
8	向上	不变	(-4, -16)	有	曲线
12	向上	不变	(-5, -25)	有	曲线
-4	向上	不变	(2, -4)	有	曲线
-8	向上	不变	(4, -16)	有	曲线

5.

c 值	图像的开口方向	开口的阔窄	顶点位置	对称性质	形状
4	向上	不变	(0, 4)	有	曲线
8	向上	不变	(0, 8)	有	曲线
12	向上	不变	(0, 10)	有	曲线
-4	向上	不变	(0, -4)	有	曲线
-8	向上	不变	(0, -8)	有	曲线

6.

- (a) 有对称性质，形状为曲线。
- (b) 向上转为向下。
- (c) 当 a 的数值（不考虑正负号）越大时，则图像的开口越
窄（阔 / 窄）。
- (d) 当 $a = 0$ 时，图像变成 直线，理由是：
 当 $a = 0$ 时， $y = ax^2 + bx + c$ 变成 $y = bx + c$ ，它是线性方程。
- (e) 当 b 和 c 的数值保持不变时，而 a 的值改变时，则图像的
 开口的阔窄、顶点的位置（开口的阔窄 / 顶点的位置 / y -
 轴截距）会有所改变；而 y -轴截距（开口的阔窄 / 顶点的
 位置 / y -轴截距）并没有改变。
- (f) 当 a 和 c 的数值保持不变而 b 的值改变时，则图像的顶点
 位置会有所改变；而开口的阔窄、 y -轴截距并没有改变。
- (g) 当 a 和 b 的数值保持不变而 c 的值改变时，则图像的顶点
 位置、 y -轴截距会有所改变；而开口的阔窄并没有改变。

9. 工作纸 2 的建议答案如下：

活动 1

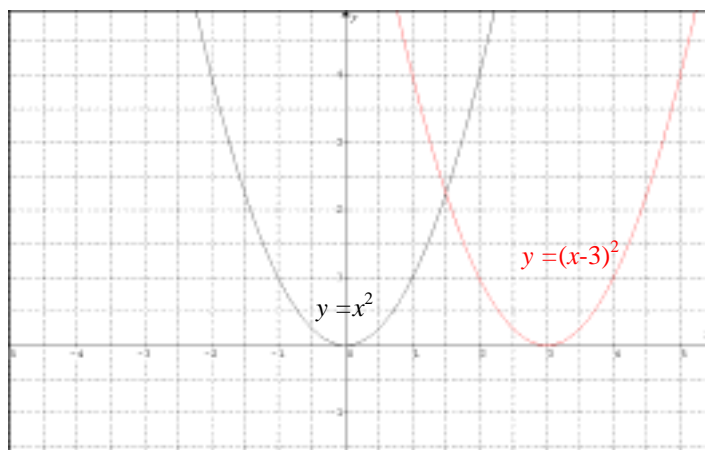
7.

与 $y = x^2$ 的图像比较， $y = (x-2)^2$ 及 $y = (x-4)^2$ 图像分别向右移 2 及 4 个单位。

8.

形状保持不变。

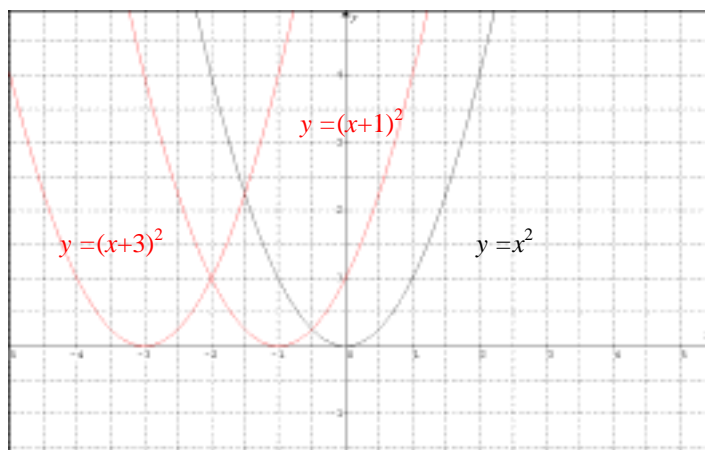
9. 在下图中绘画函数 $y = (x-3)^2$ 的略图。



11.

与 $y = x^2$ 的图像比较，如果 $a > 0$ ， $y = (x-a)^2$ 图像向右移 a 个单位。形状保持不变。

12. 在下图中绘画函数 $y = (x+1)^2$ 和 $y = (x+3)^2$ 的略图。



14.

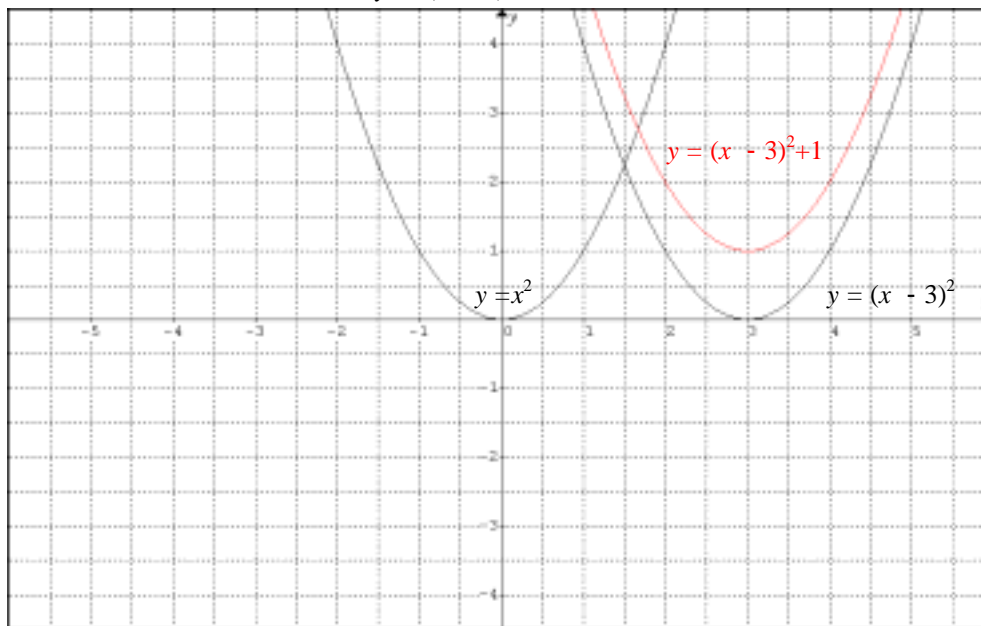
	$y = (x-3)^2$	$y = (x+1)^2$	$y = (x+3)^2$
对称轴的方程	$x=3$	$x=-1$	$x=-3$
顶点坐标	$(3, 0)$	$(-1, 0)$	$(-3, 0)$
y 的最大值 / 最小值	0	0	0

15.

与 $y = x^2$ 的图像比较，当 $h > 0$ ， $y = (x-h)^2$ 的图像向右移 h 个单位， $y = (x+h)^2$ 的图像向左移 h 个单位，而两者图像的对称轴为 $x = h$ 及 $x = -h$ ，顶点为 $(h, 0)$ ，形状保持不变，最小值仍是 0。

活动 2

1. 在下图中绘画函数 $y = (x-3)^2 + 1$ 的略图。



3.

与 $y = x^2$ 的图像比较， $y = (x-3)^2 + 2$ 的图像向右移 3 个单位，向上移 2 个单位，对称轴为 $x = 3$ ，但顶点坐标则为 $(3, 2)$ ，形状保持不变。

4.

	顶点坐标	对称轴的方程	极小值 / 极大值
(a) $y = (x-3)^2 - 4$	$(3, -4)$	$x = 3$	极(小/大)*值 = <u>-4</u>
(b) $y = (x+3)^2 - 4$	$(-3, -4)$	$x = -3$	极(小/大)*值 = <u>-4</u>
(c) $y = (x-3)^2 + 4$	$(3, 4)$	$x = 3$	极(小/大)*值 = <u>4</u>
(d) $y = (x+3)^2 + 4$	$(-3, 4)$	$x = -3$	极(小/大)*值 = <u>4</u>
(e) $y = (x+2)^2 - 5$	$(-2, -5)$	$x = -2$	极(小/大)*值 = <u>-5</u>
(f) $y = (x-12)^2 + 5$	$(12, 5)$	$x = 12$	极(小/大)*值 = <u>5</u>
(g) $y = (x-7)^2$	$(7, 0)$	$x = 7$	极(小/大)*值 = <u>0</u>
(h) $y = x^2 + 11$	$(0, 11)$	$x = 0$	极(小/大)*值 = <u>11</u>

	顶点坐标	对称轴的方程	极小值 / 极大值
(i) $y = -x^2 + 3$	(0, 3)	$x = 0$	极(小/大)*值 = <u>3</u>
(j) $y = -2x^2$	(0, 0)	$x = 0$	极(小/大)*值 = <u>0</u>
(k) $y = 5(x-8)^2 + 1$	(8, 1)	$x = 8$	极(小/大)*值 = <u>1</u>
(l) $y = 3(x-8)^2 + 1$	(8, 1)	$x = 8$	极(小/大)*值 = <u>1</u>
(m) $y = -3(x-1)^2 - 4$	(1, -4)	$x = 1$	极(小/大)*值 = <u>-4</u>
(n) $y = -(x+5)^2 + 7$	(-5, 7)	$x = -5$	极(小/大)*值 = <u>7</u>
(o) $y = 3(5-x)^2 - 6$	(5, -6)	$x = 5$	极(小/大)*值 = <u>-6</u>

* 圈出正确答案

5. 综合而言, 函数 $y = a(x+h)^2 + k$ (若 a, h 及 k 为常数) 图像的对称轴是 $x = -h$ 及顶点是 $(-h, k)$ 。