

示例八：变换对函数图像的影响（一）

目 标： 认识函数图像的上下平移与代数式对应的变化

学习阶段： 4

学习单位： 函数及其图像

所需教材： (1) 电子表格软件如微软 *Excel (graph.xls)*，绘图软件如 *Graphmatica* 和工作纸
(2) 印有 $y = x^2$ 及 $y = x^3$ 图像的胶片及图表纸

预备知识： (1) 认识 $f(x) = x^2$ 的图像
(2) 懂得绘画图像

教学内容：

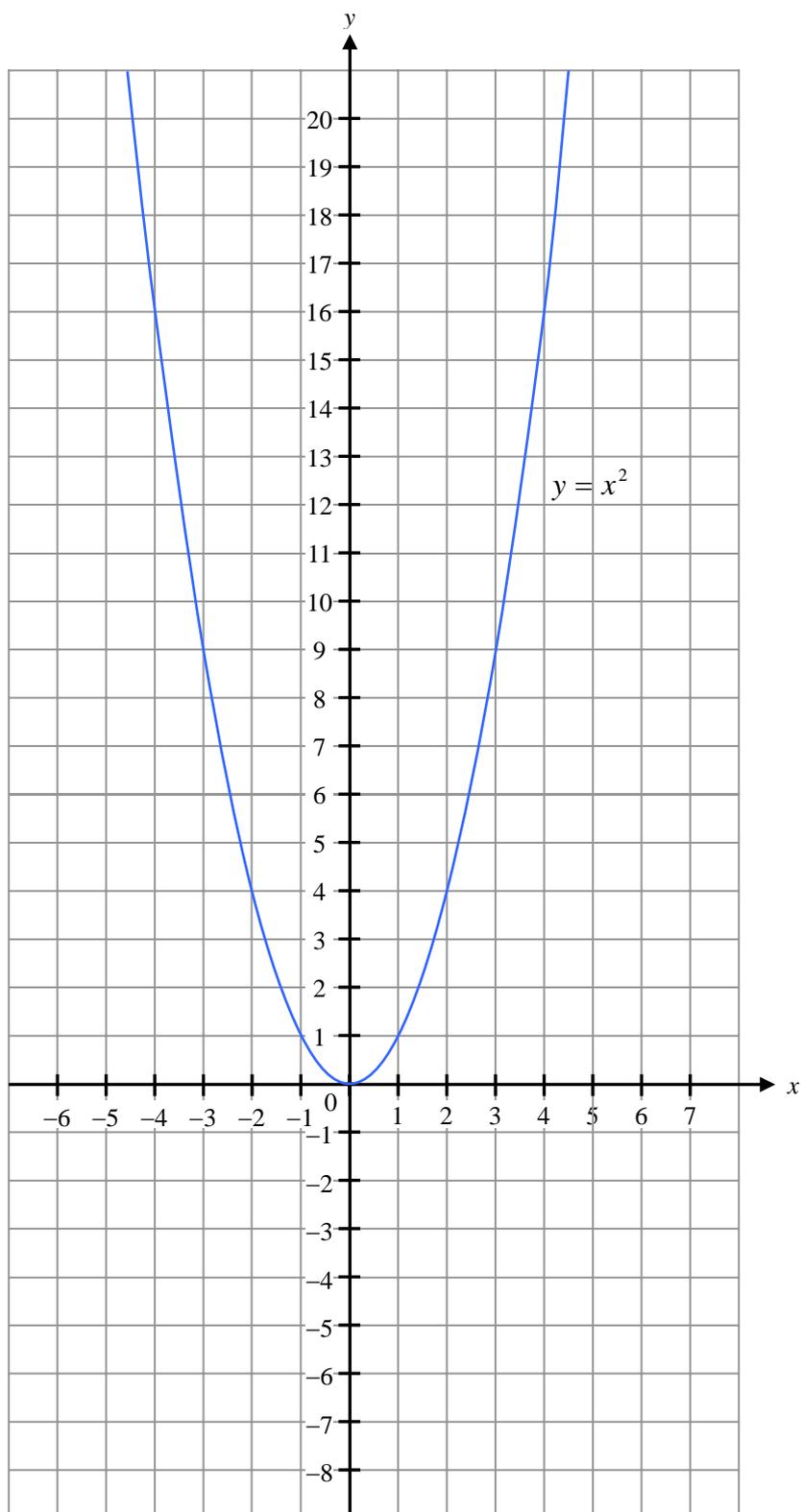
1. 教师先与学生复习 $y = x^2$ 的图像及图像上的点与代数式的关系。
2. 教师派发工作纸 1 并要求学生从 $y = x^2 + 3$ （即 C_2 ）计算对应 x 值的 y 值。然后，让学生绘画 $y = x^2 + 3$ 的图像。
3. 教师与学生核对答案并讨论 $y = x^2 + 3$ 图像各点的 y 值与 $y = x^2$ 图像各点 y 值的关系。学生需从表内数值比较两函数的关系。
4. 教师进一步与学生讨论若 C_2 方程改为 $y = x^2 + 5$ ，该图像与 $y = x^2$ 图像有何关系。其后教师可用胶片 $y = x^2$ 显示 $y = x^2 + 5$ 的图像，由 C_1 及 C_2 图像各点的坐标关系综合出 $y = x^2 + 5$ 图像是将 $y = x^2$ 图像上移 5 格。
5. 教师派发工作纸 2 并要求学生完成第 1 及 2 题，由此带出 $C_3: y = x^2 - 6$ 图像与 $y = x^2$ 图像的关系。
6. 教师邀请学生猜测 $y = x^2 - 10$ 图像与 $y = x^2$ 图像的关系，并可用胶片显示 $y = x^2 - 10$ 图像及要求学生解释他们的猜测。

7. 教师再进一步要求学生分组讨论以下方程与新方程图像的关系。
- (a) $C_1: y = x^2 + 5$ 与 $C_2: y = x^2 + 10$
- (b) $C_1: y = x^3$ 与 $C_2: y = x^3 + 4$
- 教师邀请学生以胶片展示他们的图像并解释他们的答案。
8. 教师利用档案 *graph.xls* 核对学生的答案并解释函数代数式的变化与图像各点的对应变化。
9. 教师提问学生若将函数 $y = f(x)$
- (a) $f(x) = x^2 + 2x$; 或
- (b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$; 或
- (c) $f(x) = x^3 - 2x$; 或
- (d) $f(x) = x^3 - 2x + 4$ 。
- 的图像上移 3 格及下移 3 格时, 所得图像的函数的代数式将会有何改变。讨论后, 教师可利用档案 *graph.xls* 展示答案。
10. 教师派发工作纸 3, 让学生巩固对图像上、下平移与其代数式关系的练习。
11. 教师可利用 *Graphmatica* 软件与学生探讨其它一般函数如 $y = x^4$ 或 $y = \sin x$ 的图像的上、下平移, 从而作出总结。若
- (a) $y = f(x)$ 图像上移 k 格, 则新函数的符号式为 $y = f(x) + k$ 。
- (b) $y = f(x)$ 图像下移 k 格, 则新函数的符号式为 $y = f(x) - k$ 。

工作纸 1

1. 试完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_2 $y = x^2 + 3$
-4	16	19
-3	9	
-2	4	
-1	1	4
0	0	
1	1	
2	4	7
3	9	12
4	16	

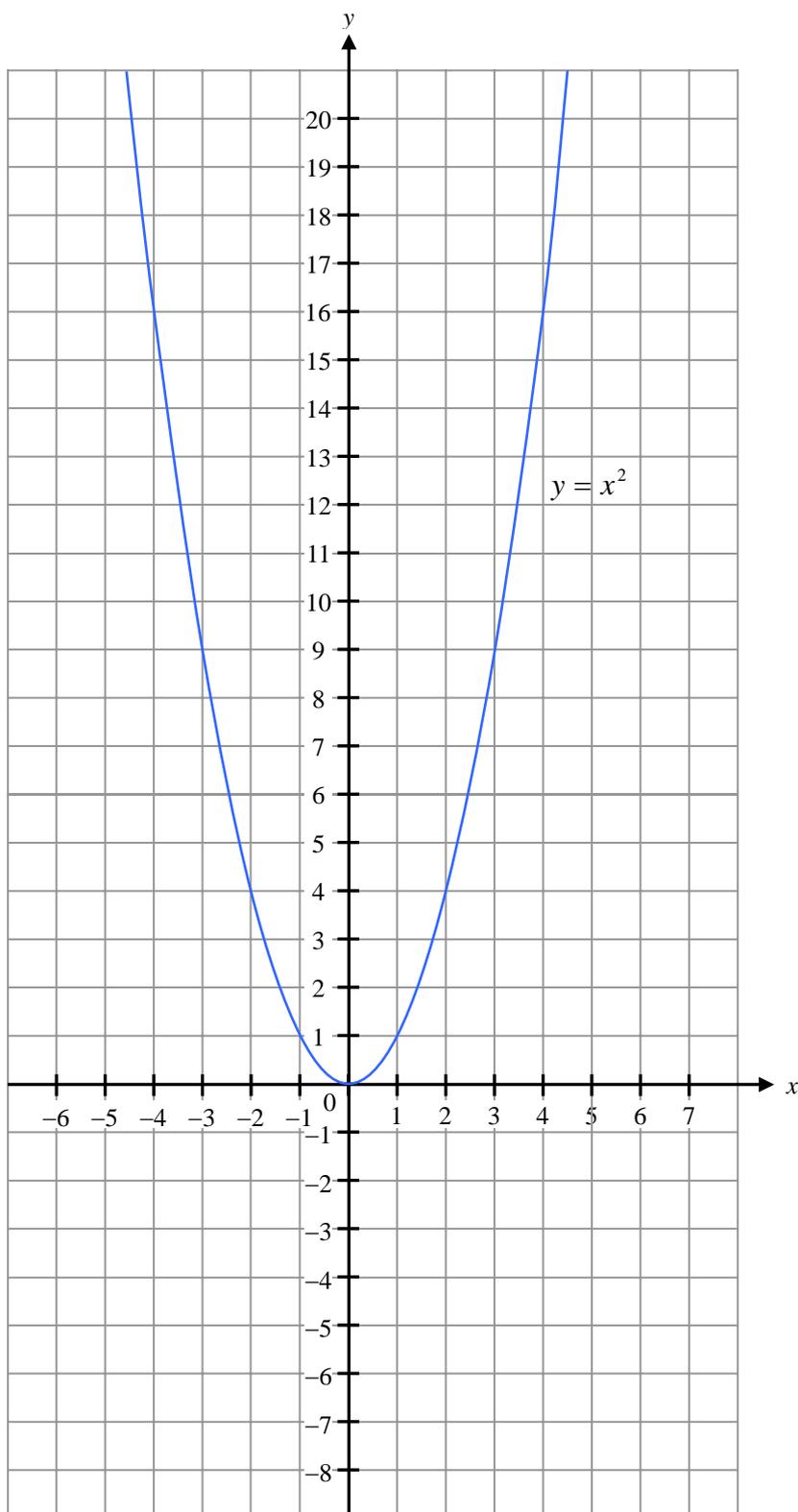
2. 在右图上, 绘出图像 C_2 。

工作纸 2

1. 试完成下表。

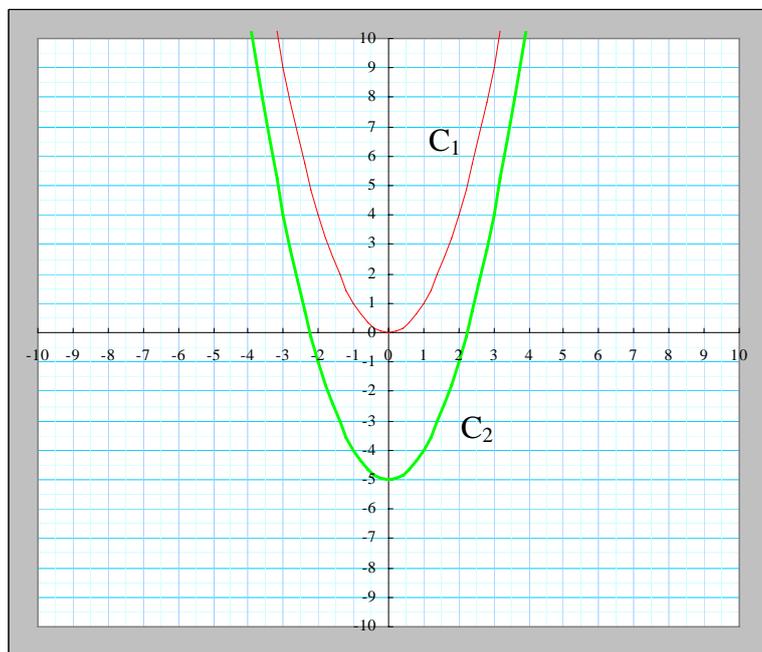
x	C_1 $y = x^2$	C_3 $y = x^2 - 6$
-4	16	10
-3	9	3
-2	4	-2
-1	1	
0	0	-6
1	1	-5
2	4	
3	9	
4	16	10

2. 在右图上，绘出图像 C_3 。



工作纸 3

1.

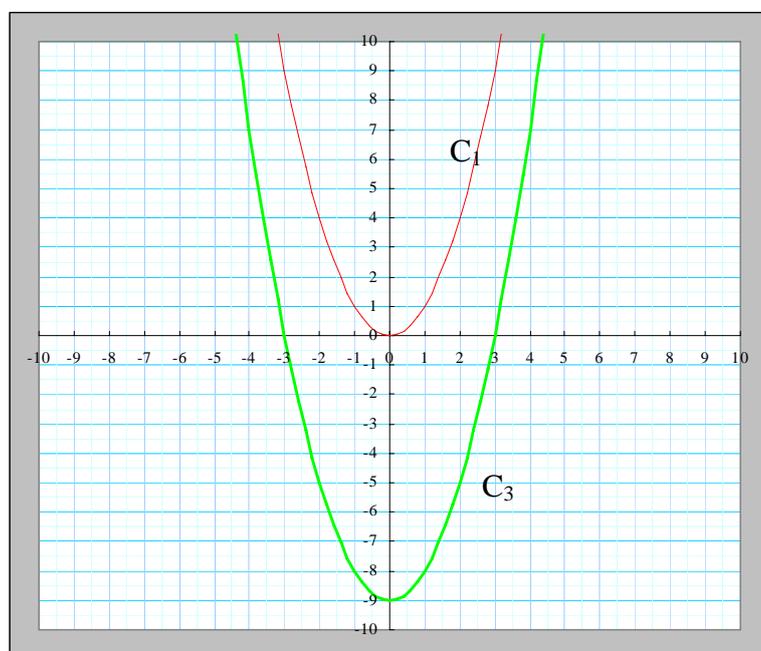


图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_2 的图像。

(a) C_2 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 _____ 个单位。

(b) C_2 的方程是 _____。

2.

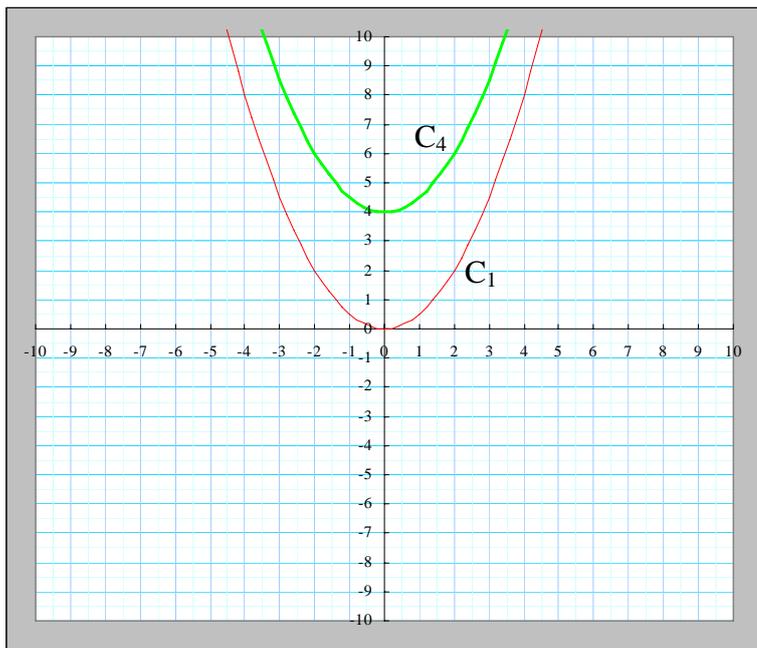


图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_3 的图像。

(a) C_3 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 _____ 个单位。

(b) C_3 的方程是 _____。

3.

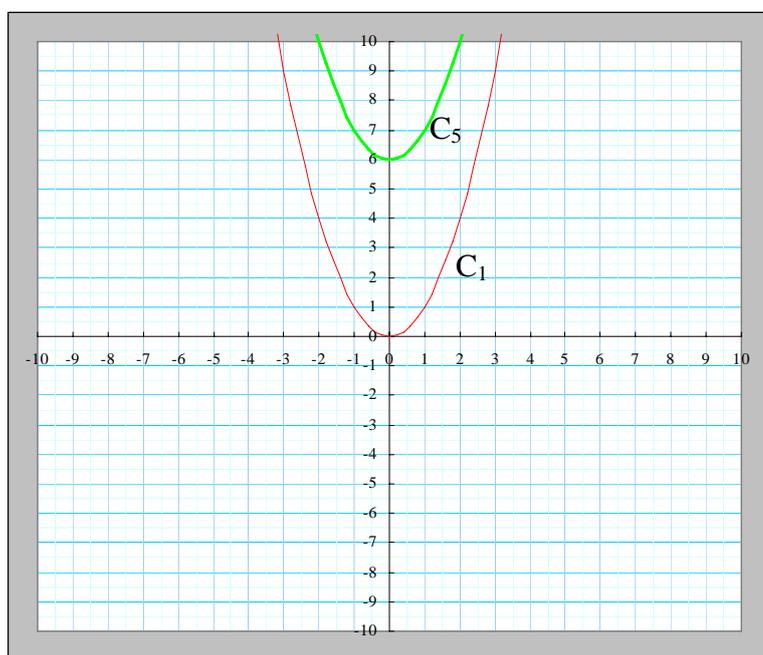


图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_4 的图像。

(a) C_4 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 _____ 个单位。

(b) C_4 的方程是 _____。

4.



图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_5 的图像。

(a) C_5 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 _____ 个单位。

(b) C_5 的方程是 _____。

5. 试写出下列各函数变换所对应的图像。

	方程 C_1	向上 / 下移动	经平移后 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 + 3$
(b)	$y = x^2 + 5$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 + 2$
(c)	$y = x^2 + x$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 + x + 1$
(d)	$y = x^2 + 2x + 1$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 + 2x + 3$
(e)	$y = x^3 + 1$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^3 + 4$
(f)	$y = f(x)$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = f(x) + k$
(g)	$y = x^2$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 - 4$
(h)	$y = x^2 + 2$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 - 3$
(i)	$y = x^2 - 3$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 - 8$
(j)	$y = x^2 - 5$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 - 7$
(k)	$y = x^2 + 3x - 1$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^2 + 3x + 5$
(l)	$y = x^3 - 4$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = x^3 - 5$
(m)	$y = f(x)$	向上 / 下 * 移动 _____ 单位	$y = f(x) - k$

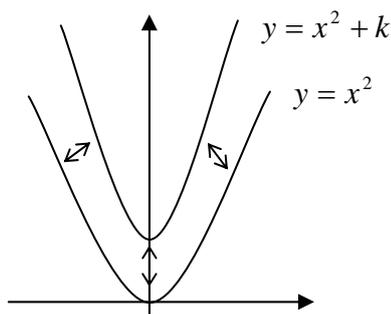
* 圈出适用者

6. 试写出下列各函数变换所对应的图像方程。

	方程 C_1	向上 / 下移动	经平移后 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向上移动 8 单位	
(b)	$y = x^2 - 1$	向上移动 9 单位	
(c)	$y = x^2 + 2x + 3$	向上移动 10 单位	
(d)	$y = 3x^2 - x + 1$	向上移动 7 单位	
(e)	$y = x^3 + 2$	向上移动 2 单位	
(f)	$y = x^3 - 2$	向上移动 6 单位	
(g)	$y = f(x)$	向上移动 k 单位	
(h)	$y = x^2 - 4$	向下移动 12 单位	
(i)	$y = x^2 + 1$	向下移动 4 单位	
(j)	$y = x^2 + x$	向下移动 3 单位	
(k)	$y = x^2 + 7x - 3$	向下移动 1 单位	
(l)	$y = x^3 - 1$	向下移动 2 单位	
(m)	$y = f(x)$	向下移动 k 单位	

教师注意事项：

1. 本示例活动需时约 30-40 分钟。
2. 教师在学生计算工作纸 1 及 2 的表内的值时，可考虑不提供数值，完全由学生计算对应的 y 值。本示例提供部分 y 值以减省学生运算的时间。然而，学生透过计算数值及亲手画对应图像，有助他们明白代数式、表列值与图像的关系。同时部分学生亦可透过表列值已可观察到给出 C_1 的 y 值加上 3 便可得到第 1 题内表 C_2 的对应 y 值。
3. 若教师要求所有学生都绘画 $y = x^2 + 3$ 或 $y = x^2 - 6$ 图像，会极耗时。教师可考虑同时请半班学生绘画 $y = x^2 + 3$ ，另外半班学生画 $y = x^2 - 6$ ，惟须与学生核对两个图像的正确画法。
4. 部分学生会以为 $y = x^2$ 图像上移 / 下移时，图像会如下：



教师须提醒学生须比较两幅图像点上同一 x 坐标， y 坐标是上移 / 下移同一数量的单位，而并不是两幅图像如上图般有相同的距离。教师可使用胶片示范图像的上移使学生更能了解是将图 $y = x^2$ 上移某一单位，其对应图像并不如上图所示。学生可因此而理解此错误。

5. 学生在求经变换后的新代数式时，往往会以为每一项都加上固定单位如 $y = x^2 + x$ 上移 3 单位变成 $y = (x^2 + 3) + (x + 3)$ 。教师可利用软件比较 $y = (x^2 + 3) + (x + 3)$ 与 $y = x^2 + x$ ，从而让学生掌握有关代数式的变化。
6. 学生在比较 $C_1: y = x^2 - 1$ 与 $C_2: y = x^2 - 3$ 时，可能不懂如何入手，教师可建议学生将 $C_2: y = x^2 - 3$ 变成 $y = (x^2 - 1) - 2$ ，从而判断出下降两个单位。

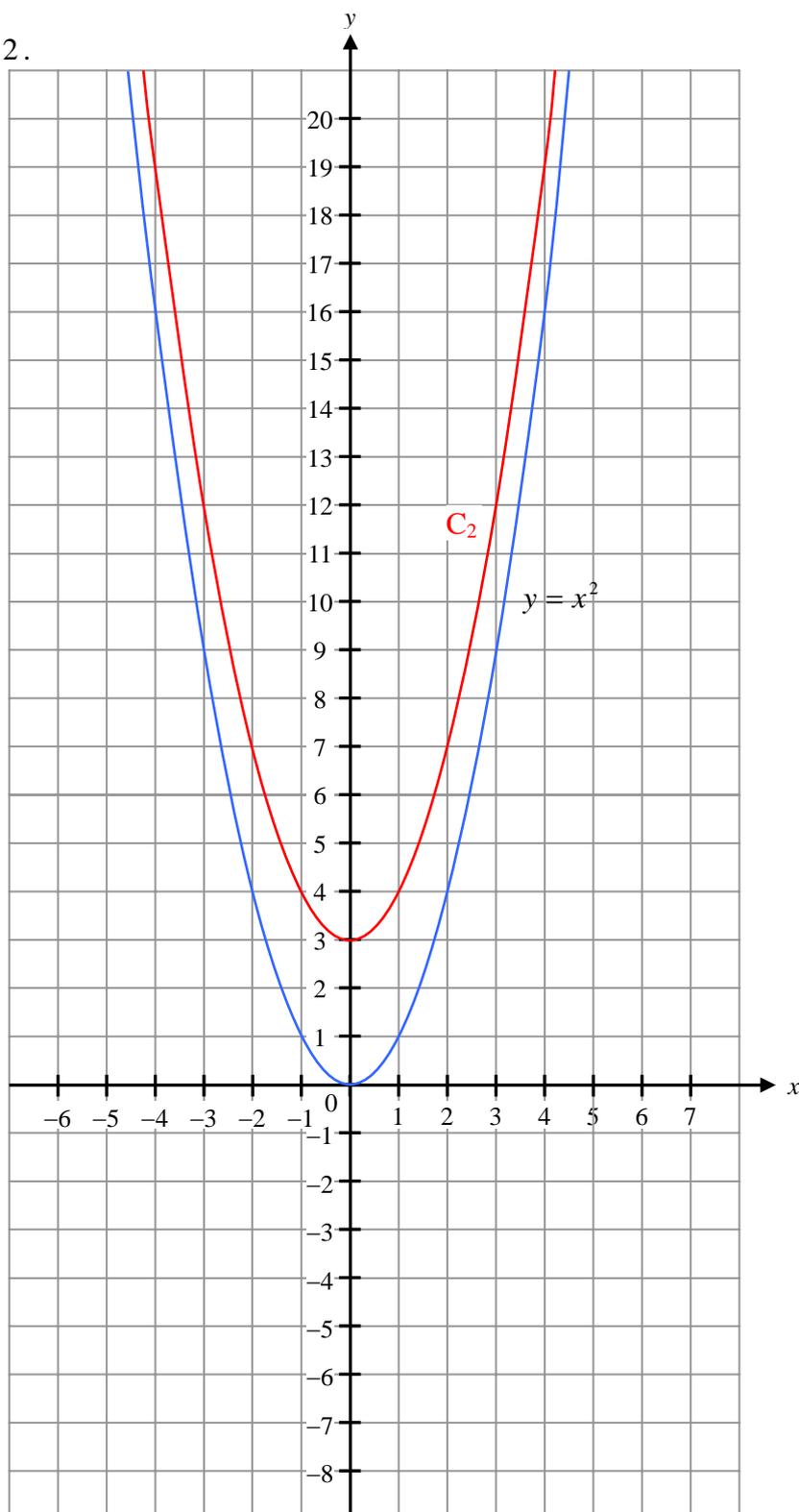
7. 工作纸建议答案如下：

工作纸 1

1. 试完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_2 $y = x^2 + 3$
-4	16	19
-3	9	12
-2	4	7
-1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7
3	9	12
4	16	19

2.

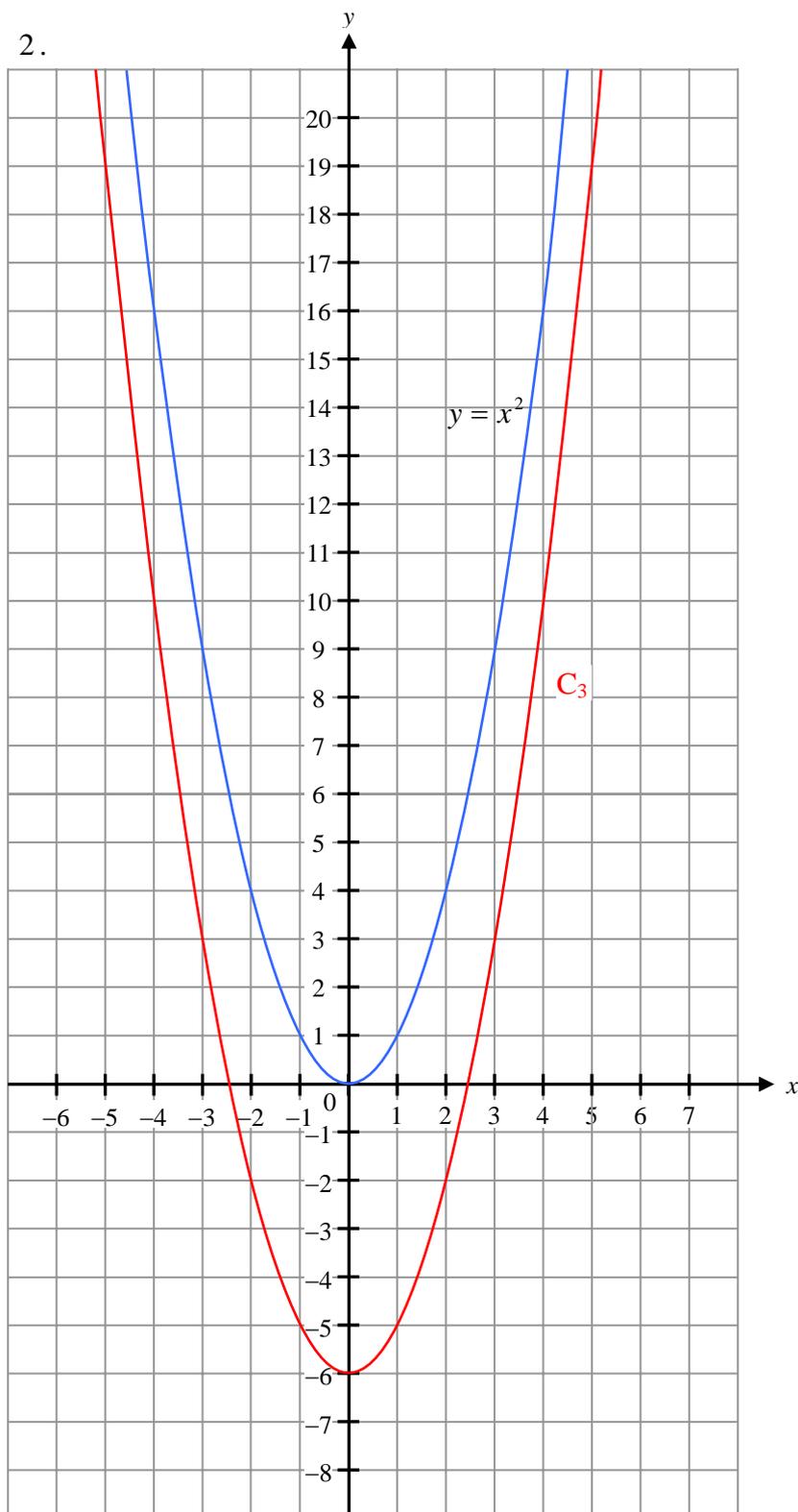


工作纸 2

1. 试完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_3 $y = x^2 - 6$
-4	16	10
-3	9	3
-2	4	-2
-1	1	-5
0	0	-6
1	1	-5
2	4	-2
3	9	3
4	16	10

2.



工作纸 3

1. (a) C_2 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 5 个单位。
(b) C_2 的方程是 $y = x^2 - 5$ 。
2. (a) C_3 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 9 个单位。
(b) C_3 的方程是 $y = x^2 - 9$ 。
3. (a) C_4 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 4 个单位。
(b) C_4 的方程是 $y = x^2 + 4$ 。
4. (a) C_5 的图像是将 C_1 向 上 / 下 移动 6 个单位。
(b) C_5 的方程是 $y = x^2 + 6$ 。

5. 试写出下列各函数变换所对应的图像

	方程 C_1	向上/下*移动	经平移后 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>2</u> 单位	$y = x^2 + 3$
(b)	$y = x^2 + 5$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>3</u> 单位	$y = x^2 + 2$
(c)	$y = x^2 + x$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>1</u> 单位	$y = x^2 + x + 1$
(d)	$y = x^2 + 2x + 1$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>2</u> 单位	$y = x^2 + 2x + 3$
(e)	$y = x^3 + 1$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>3</u> 单位	$y = x^3 + 4$
(f)	$y = f(x)$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>k</u> 单位	$y = f(x) + k$
(g)	$y = x^2$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>4</u> 单位	$y = x^2 - 4$
(h)	$y = x^2 + 2$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>5</u> 单位	$y = x^2 - 3$
(i)	$y = x^2 - 3$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>5</u> 单位	$y = x^2 - 8$
(j)	$y = x^2 - 5$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>2</u> 单位	$y = x^2 - 7$
(k)	$y = x^2 + 3x - 1$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>6</u> 单位	$y = x^2 + 3x + 5$
(l)	$y = x^3 - 4$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>1</u> 单位	$y = x^3 - 5$
(m)	$y = f(x)$	向 $\textcircled{\uparrow}/\textcircled{\downarrow}$ * 移动 <u>k</u> 单位	$y = f(x) - k$

* 圈出适用者

6. 试写出下列各函数变换所对应的图像方程。

	方程 C_1	向上 / 下移动	经平移后 C_2 的方程
(a)	$y = x^2 + 1$	向上移动 8 单位	$y = x^2 + 9$
(b)	$y = x^2 - 1$	向上移动 9 单位	$y = x^2 + 8$
(c)	$y = x^2 + 2x + 3$	向上移动 10 单位	$y = x^2 + 2x + 13$
(d)	$y = 3x^2 - x + 1$	向上移动 7 单位	$y = 3x^2 - x + 8$
(e)	$y = x^3 + 2$	向上移动 2 单位	$y = x^3 + 4$
(f)	$y = x^3 - 2$	向上移动 6 单位	$y = x^3 + 4$
(g)	$y = f(x)$	向上移动 k 单位	$y = f(x) + k$
(h)	$y = x^2 - 4$	向下移动 12 单位	$y = x^2 - 16$
(i)	$y = x^2 + 1$	向下移动 4 单位	$y = x^2 - 3$
(j)	$y = x^2 + x$	向下移动 3 单位	$y = x^2 + x - 3$
(k)	$y = x^2 + 7x - 3$	向下移动 1 单位	$y = x^2 + 7x - 4$
(l)	$y = x^3 - 1$	向下移动 2 单位	$y = x^3 - 3$
(m)	$y = f(x)$	向下移动 k 单位	$y = f(x) - k$

鸣谢：本示例大部分教学活动取材自中华圣洁会灵风中学，蒙学校慷慨允许于本教学资源套印出，谨此致谢。