

示例九：变换对函数图像的影响（二）

目 标： 认识函数图像的水平平移与代数式对应的变化

学习阶段： 4

学习单位： 函数及其图像

所需教材： (1) 电子表格软件如微软 *Excel (graph.xls)*，绘图软件如 *Graphmatica* 和工作纸
(2) 印有 $y = x^2$ 及 $y = x^3$ 图像的胶片及图表纸

预备知识： (1) 认识 $f(x) = x^2$ 的图像
(2) 懂得绘画图像

教学内容：

1. 教师与学生重温 $y = f(x)$ 与 $y = f(x) + k$ 图像的关系，并用例子如 $y = f(x) + 3$ 考查学生对函数上下平移的认识。
2. 教师让学生猜测图像 $y = f(x+3)$ 与 $y = f(x)$ 有何关系，然后再利用工作纸 1，让学生完成表内 x 、 y 数值及绘出对应图像。
3. 待学生完成工作纸 1 后，教师与学生讨论 $y = x^2$ 与 $y = (x+3)^2$ 两者图像的分别，其中可指出 $y = (x+3)^2$ 图像是 $y = x^2$ 图像左移 3 格而非学生初步猜测为右移 3 格。
4. 若学生难以观察为左移变动，教师可让学生使用 $y = x^2$ 图像胶片作移动，并比较他们所画图像。
5. 教师让学生猜想 $y = (x-3)^2$ 的图像与 $y = x^2$ 图像有何关系。教师可让学生完成工作纸 2 以验证他们的猜想。
6. 教师待学生完成工作纸 2 后，与学生讨论答案并利用 *graph.xls* 软件展示不同二次及三次函数， $y = f(x)$ 与 $y = f(x+h)$ 图像的关系。

教师可透过软件让学生比较两个函数

- (a) 表上 x 、 y 坐标的分别；
- (b) 图像的分别及图像上各对应点 x 、 y 坐标的分别；
- (c) 代数式的分别。

7. 教师可进一步利用 *Graphmatica* 软件绘画其它函数图像如，

- (a) $y = x^4$ 与 $y = (x+3)^4$ 图像；
- (b) $y = \tan x$ 与 $y = \tan(x+90^\circ)$ 图像。

从而总结，当 $h > 0$ ，

- (i) $y = f(x+h)$ 是将函数 $y = f(x)$ 图像左移 h 单位。
- (ii) $y = f(x-h)$ 是将函数 $y = f(x)$ 图像右移 h 单位。

8. 教师透过工作纸 3 第 1 至第 4 题，让学生由给出图像的变化，写出对应的代数式。再利用第 4 题及第 5 题的习题，让学生巩固

- (a) 由代数式变化写出对应图像的变化；
- (b) 由图像的变化写出对应代数式的变化。

9. 教师待学生完成后，可与学生透过以下游戏让学生巩固函数变换（平移），代数式与图像的关系。

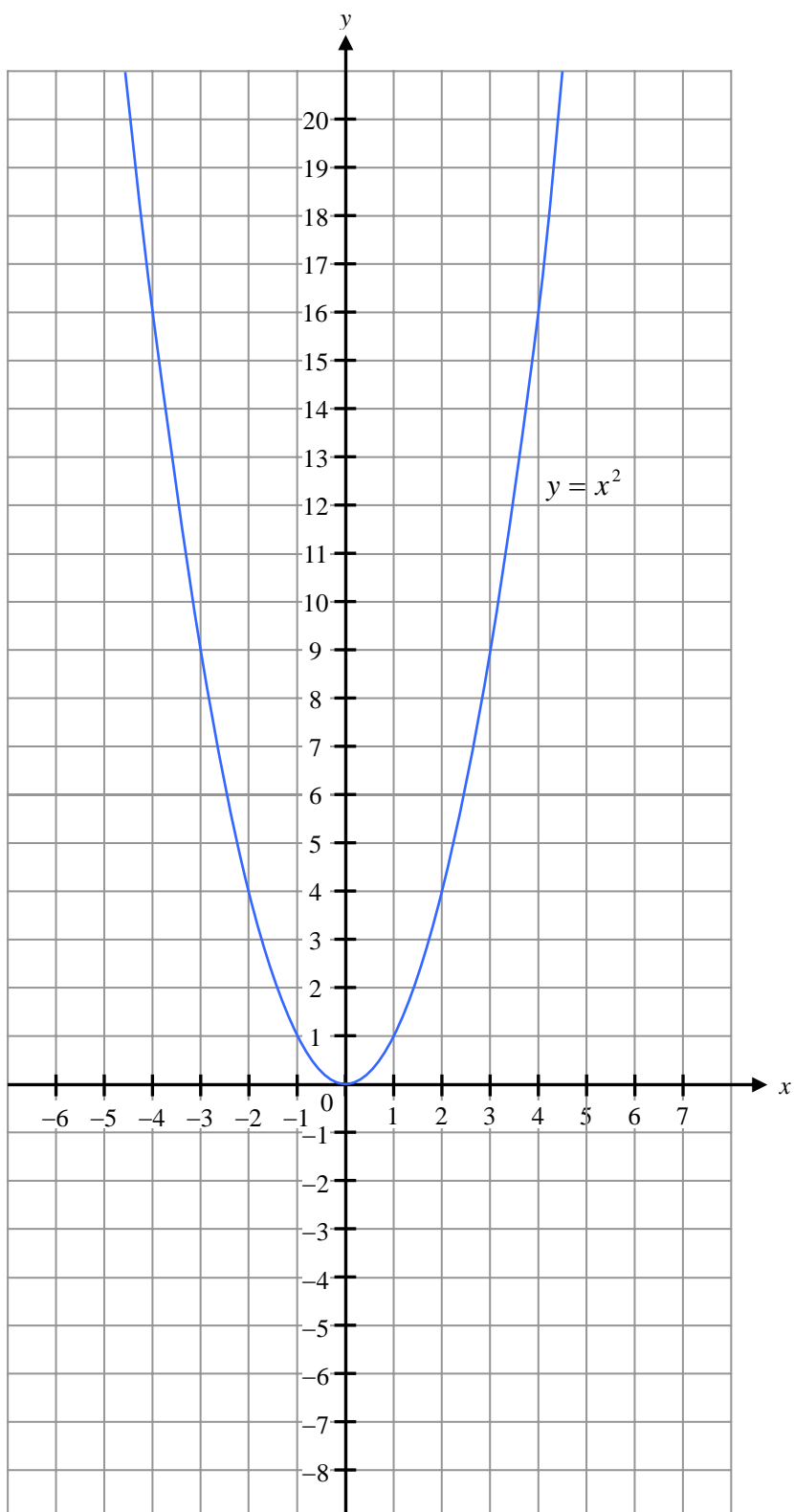
- (a) 教师可用绘有 $y = x^2$ 的直角坐标平面的胶片；
- (b) 教师再将 $y = x^2$ 图像平移至不同位置，学生按分组讨论并于黑板写下对应的代数式；
- (c) 同样地，教师写出不同的代数式，着每组用 $y = x^2$ 或 $y = x^3$ 图像的胶片移出对应的位置；
- (d) 按每题，每组写出正确答案得 2 分，错误答案扣 1 分。最快 1 组得 10 分胜出。

10. 当学生已相对熟识函数水平平移变换图像与代数式的关系，教师可考虑将铅垂平移与水平平移活动结合在一起进行，并可考虑函数图像经两个变换（如第一次变换为铅垂平移而第二次变换为水平平移）后，要求学生写出对应的代数式。活动形式可与第 9 题相若，然后再透过工作纸 4 巩固学生对图像变化与代数式转变的关系。

工作纸 1

1. 试完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_2 $y = (x + 3)^2$
-4	16	1
-3	9	
-2	4	
-1	1	4
0	0	
1	1	
2	4	25
3	9	36
4	16	49

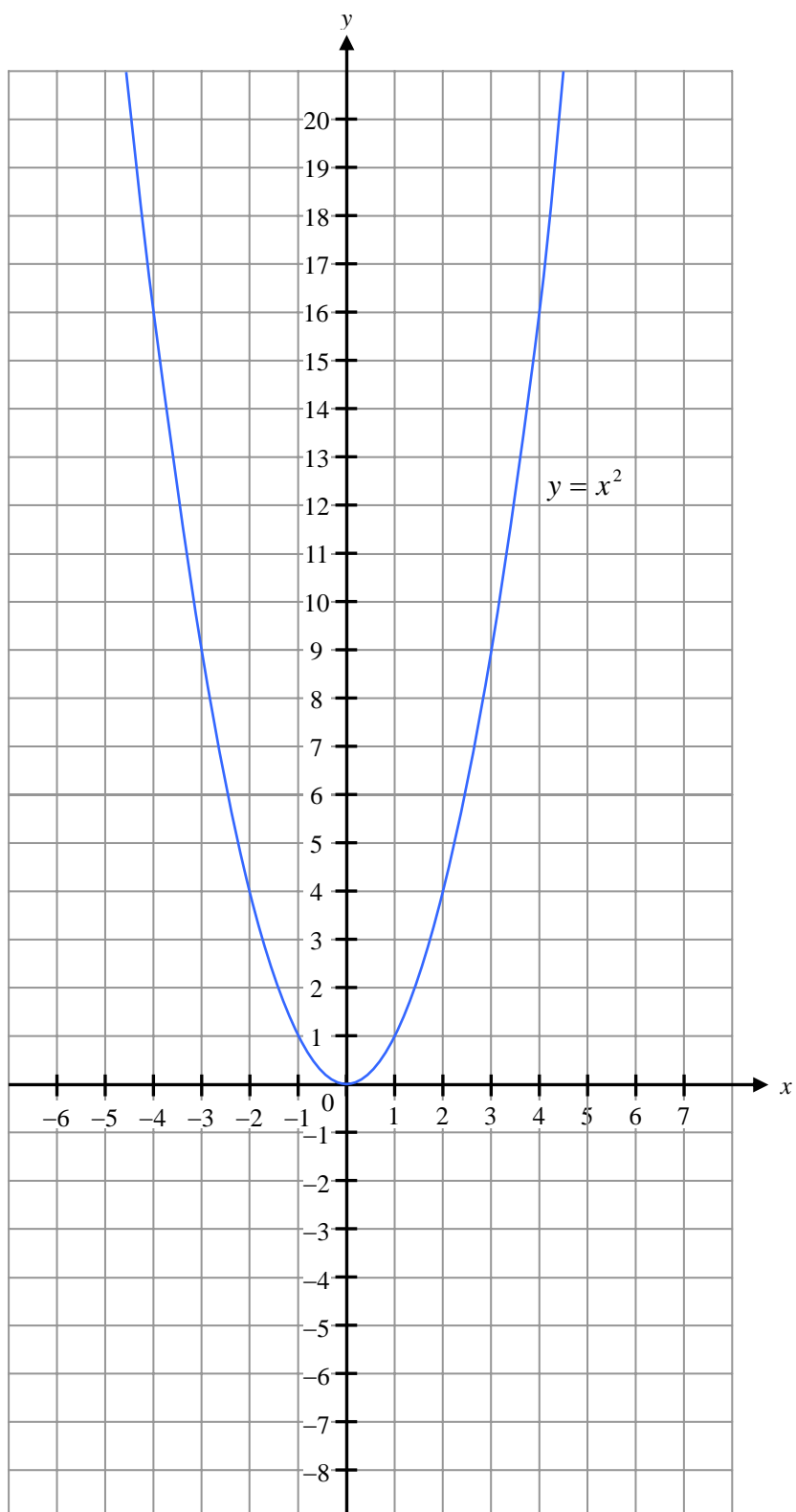
2. 在右图上, 绘出新的图像 C_2 。

工作纸 2

1. 试完成下表。

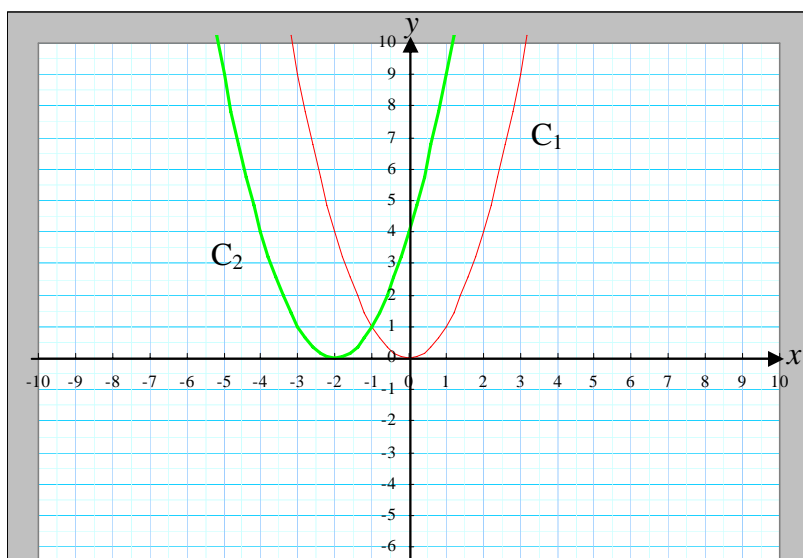
x	C_1 $y = x^2$	C_3 $y = (x-2)^2$
-4	16	36
-3	9	
-2	4	
-1	1	9
0	0	
1	1	
2	4	0
3	9	
4	16	4

2. 在右图上，绘出新的图像 C_3 。



工作纸 3

1.

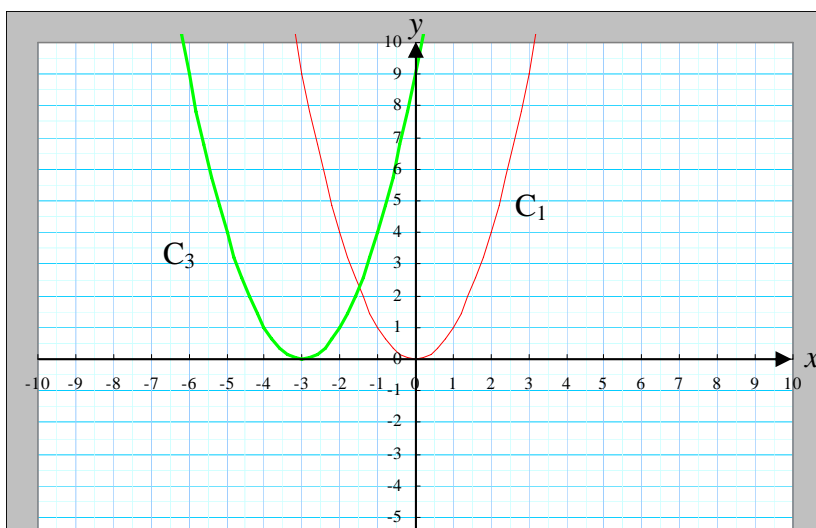


图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_2 的图像。

(a) C_2 的图像是将 C_1 向 左 / 右 * 移动 _____ 个单位。

(b) C_2 的方程是 _____。

2.



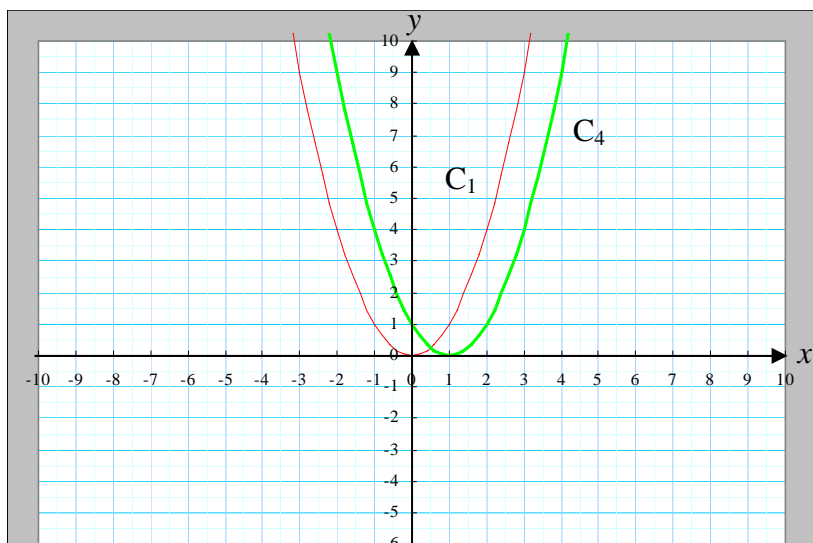
图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_3 的图像。

(a) C_3 的图像是将 C_1 向 左 / 右 * 移动 _____ 个单位。

(b) C_3 的方程是 _____。

* 删去不适用者

3.

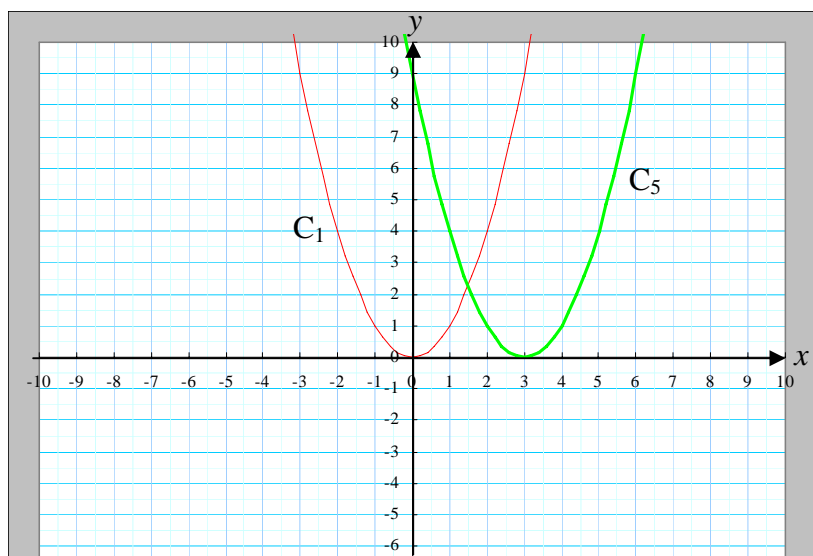


图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_4 的图像。

(a) C_4 的图像是将 C_1 向 左 / 右 * 移动 _____ 个单位。

(b) C_4 的方程是 _____。

4.



图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_5 的图像。

(a) C_5 的图像是将 C_1 向 左 / 右 * 移动 _____ 个单位。

(b) C_5 的方程是 _____。

* 删去不适用者

5. 试写出下列各函数变换所对应的图像变化。

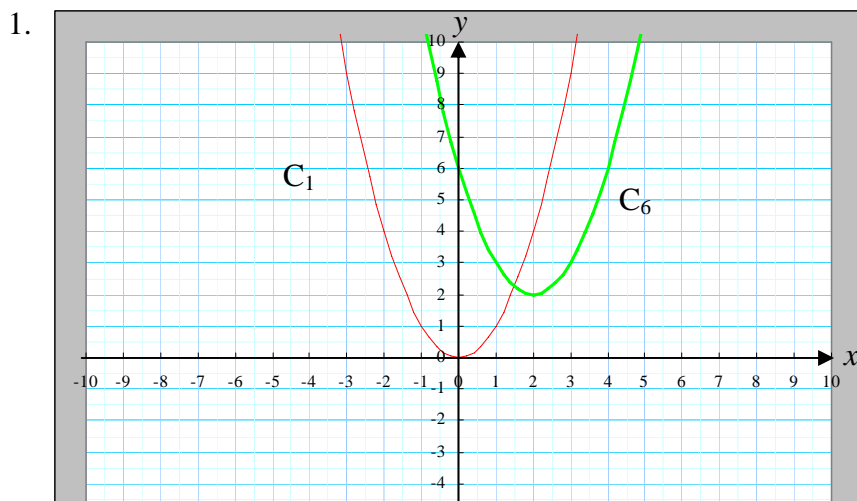
	原有方程 C_1	水平平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-3)^2$
(b)	$y = x^2 + 1$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-7)^2 + 1$
(c)	$y = x^2 + x$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-2)^2 + (x-2)$
(d)	$y = x^2 - x$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-1)^2 - (x-1)$
(e)	$y = x^2 + x + 3$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-5)^2 + (x-5) + 3$
(f)	$y = x^3$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-9)^3$
(g)	$y = x^3 + 7$	向右移动 _____ 单位	$y = (x-12)^3 + 7$
(h)	$y = x^2$	向左移动 _____ 单位	$y = (x+5)^2$
(i)	$y = x^2 + 1$	向左移动 _____ 单位	$y = (x+7)^2 + 1$
(j)	$y = x^2 + x$	向左移动 _____ 单位	$y = (x+1)^2 + (x+1)$
(k)	$y = 3x^2 + 2x$	向左移动 _____ 单位	$y = 3(x+5)^2 + 2(x+5)$
(l)	$y = x^3$	向左移动 _____ 单位	$y = (x+2)^3$
(m)	$y = f(x)$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = f(x-h)$
(n)	$y = f(x)$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = f(x+h)$
(o)	$y = x^2$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = (x-12)^2$
(p)	$y = x^2$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = (x+2)^2$
(q)	$y = x^2 + 3x$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = (x-5)^2 + 3(x-5)$
(r)	$y = x^2 + 3x$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = (x+3)^2 + 3(x+3)$
(s)	$y = x^2 - 5x - 7$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = (x+2)^2 - 5(x+2) - 7$
(t)	$y = x^3 + 4x^2 + 1$	向右/左*移动 _____ 单位	$y = (x-7)^3 + 4(x-7)^2 + 1$

* 删去不适用者

6. 由此写出下列各函数变换所对应的图像方程。

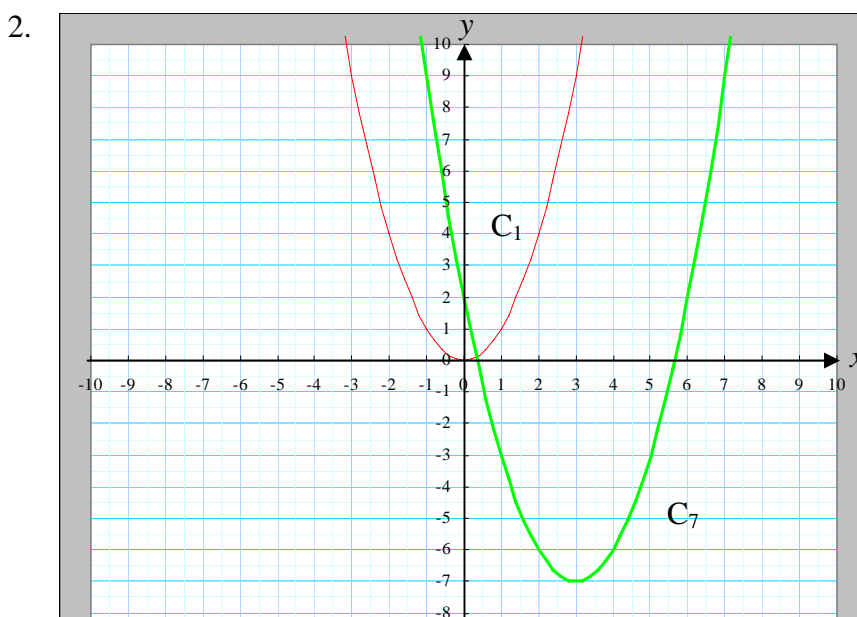
	原有方程 C_1	水平平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	向右移动 8 单位	
(b)	$y = x^3$	向右移动 5 单位	
(c)	$y = x^2 + 1$	向右移动 5 单位	
(d)	$y = x^2 - x$	向右移动 3 单位	
(e)	$y = x^2 + 3x + 2$	向右移动 7 单位	
(f)	$y = x^3 + 3x^2 + 2x - 5$	向右移动 7 单位	
(g)	$y = x^2$	向左移动 4 单位	
(h)	$y = x^2 + 1$	向左移动 2 单位	
(i)	$y = x^3 + x$	向左移动 4 单位	
(j)	$y = x^2 + 3x + 2$	向左移动 5 单位	
(k)	$y = x^3 - x^2 + x + 1$	向左移动 7 单位	
(l)	$y = f(x)$	向右移动 h 单位	
(m)	$y = f(x)$	向左移动 h 单位	
(n)	$y = x^4$	向左移动 6 单位	
(o)	$y = x^2 + 5x$	向右移动 4 单位	
(p)	$y = x^3 + 2x$	向左移动 3 单位	

工作纸 4



图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_6 的图像。

- (a) C_6 的图像是将 C_1 向 左 / 右 * 移动 _____ 个单位及 上 / 下 * 移动 _____ 个单位。
- (b) C_6 的方程是 _____。



图中所示为二次函数 $C_1: y = x^2$ 及 C_7 的图像。

- (a) C_7 的图像是将 C_1 向 左 / 右 * 移动 _____ 个单位及 上 / 下 * 移动 _____ 个单位。
- (b) C_7 的方程是 _____。

* 删去不适用者

3. 试写出下列各函数所对应的图像。

	原有方程 C_1	水平平移	铅垂平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = (x-3)^2 - 4$
(b)	$y = x^2$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = (x+3)^2 + 4$
(c)	$y = x^3$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = (x-4)^3 + 3$
(d)	$y = x^3$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = (x+6)^3 + 4$
(e)	$y = x^3$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = (x-12)^3 - 5$
(f)	$y = f(x)$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = f(x+h) + k$ 当 $h > 0, k > 0$
(g)	$y = f(x)$	左/右* _____单位	上/下* _____单位	$y = f(x+h) - k$ 当 $h > 0, k > 0$

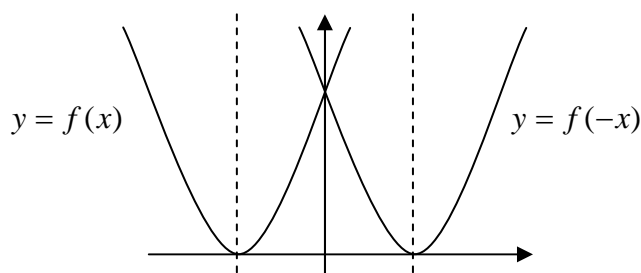
* 删去不适用者

4. 试写出下列各函数所对应的图像

	原有方程 C_1	水平平移	铅垂平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	向右移动 10 单位	向上移动 1 单位	
(b)	$y = x^2$	向右移动 8 单位	向下移动 2 单位	
(c)	$y = x^2$	向左移动 1 单位	向上移动 7 单位	
(d)	$y = x^2$	向左移动 12 单位	向下移动 1 单位	
(e)	$y = x^2 + x - 1$	向右移动 10 单位	向下移动 20 单位	
(f)	$y = x^3$	向左移动 1 单位	向上移动 3 单位	
(g)	$y = x^3$	向右移动 3 单位	向下移动 1 单位	
(h)	$y = x^3 - 4x + 3$	向左移动 10 单位	向下移动 20 单位	
(i)	$y = f(x)$	向左移动 h 单位	向上移动 k 单位	
(j)	$y = f(x)$	向右移动 h 单位	向下移动 k 单位	
(k)	$y = f(x)$	向右移动 h 单位	向上移动 k 单位	

教师注意事项：

1. 本示例活动需时约 40-50 分钟。
2. 学生在学习水平平移时，往往混淆 $y = f(x+h)$ ($h > 0$) 为图像右移，而当 $h < 0$ 时，图像会左移。这与学生对数线概念认识相关。因子在线数字在右方较左方为大。教师可考虑以表列数字（工作纸 1）让学生初步认识图像水平移与代数式的关系。然后可带出新图像只须输入较小的值便得出同一个输出值，故此对应新代数式的输入值与输出值的图像便左移了。
3. 教师在以二次函数如 $y = (x-1)^2$ 图像作水平平移为 $y = (x+1)^2$ 时，有部分时候学生会答是反射，而事实上 $y = [(-x)+1]^2$ 的展开式与 $y = (x-1)^2$ 是相同的。



因此，教师须适当选择合适的二次函数及其对应的变换。若有需要，亦可选择三次函数讨论水平平移。

4. 教师宜提醒学生留意变换对直线函数的影响是十分容易引起混淆的。在直线的图像上，并不容易分辨铅垂平移和水平平移的分别，换言之，学生较难比较 $f(x)+k$ 与 $f(x+k)$ 在线性图像上的分别。在多项式函数（包括直线和二次函数）的图像上，也不容易分辨沿 y 轴方向的伸缩和沿 x 轴方向的伸缩的分别，换言之，学生较难比较 $f(kx)$ 与 $kf(x)$ 在图像上的分别。
5. 在讨论函数变换平移的具体例子时，教师可选择示例十一（电话收费服务）作讨论，这有助学生掌握 $y = f(x+h)$ 水平平移的概念。

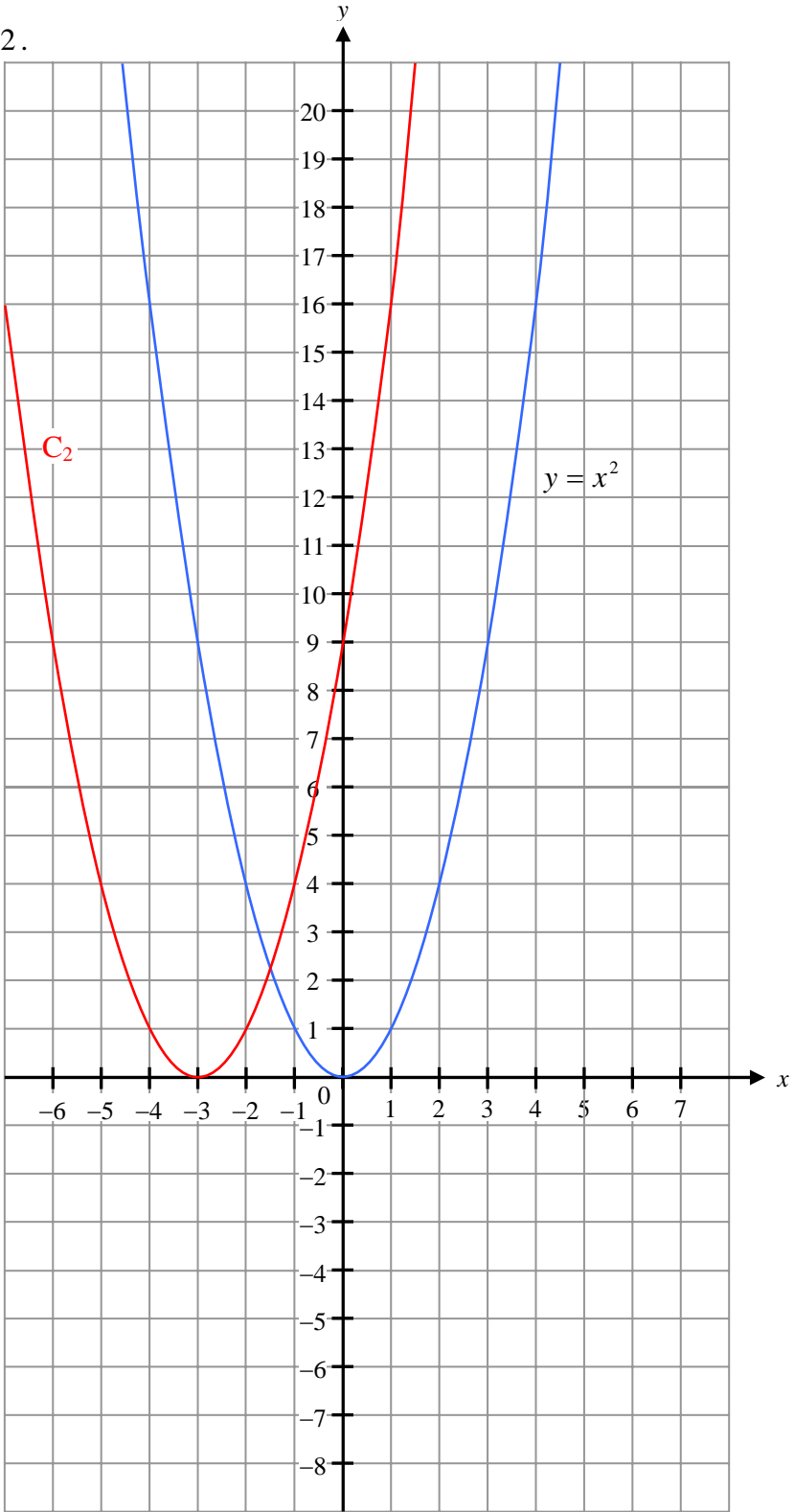
6. 工作纸建议答案如下：

工作纸 1

1. 试完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_2 $y = (x + 3)^2$
-4	16	1
-3	9	0
-2	4	1
-1	1	4
0	0	9
1	1	16
2	4	25
3	9	36
4	16	49

2.



注：
部分学生会在 $x = -5$ 及 $x = -6$ 上没有对应的 y 坐标，故会漏画对应曲线部分，因此学生未能观察新图像是由图像 $y = x^2$ 平移得出。

工作纸 2

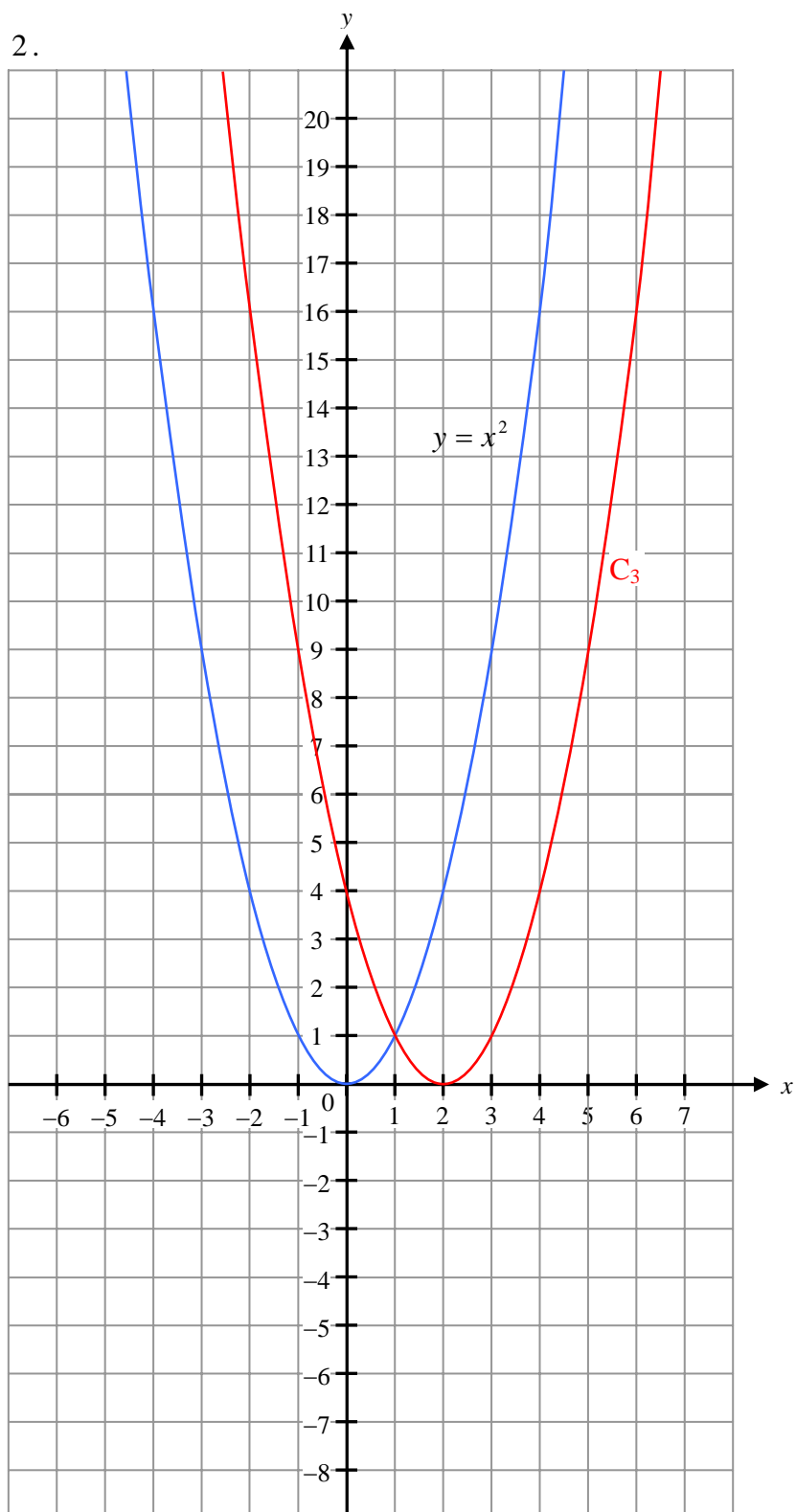
1. 试完成下表。

x	C_1 $y = x^2$	C_3 $y = (x-2)^2$
-4	16	36
-3	9	25
-2	4	16
-1	1	9
0	0	4
1	1	1
2	4	0
3	9	1
4	16	4

注：

部分学生会在 $x = -5$ 及 $x = -6$ 上没有对应的 y 坐标，故会漏画对应曲线部分，因此学生未能观察新图像是由图像 $y = x^2$ 平移得出。

2.



工作纸 3

1. (a) C_2 的图像是将 C_1 向 左 / 右 移动 2 个单位。
(b) C_2 的方程是 $y = (x+2)^2$ 。

2. (a) C_3 的图像是将 C_1 向 左 / 右 移动 3 个单位。
(b) C_3 的方程是 $y = (x+3)^2$ 。

3. (a) C_4 的图像是将 C_1 向 左 / 右 移动 1 个单位。
(b) C_4 的方程是 $y = (x-1)^2$ 。

4. (a) C_5 的图像是将 C_1 向 左 / 右 移动 3 个单位。
(b) C_5 的方程是 $y = (x-3)^2$ 。

5. 试写出下列各函数变换所对应的图像。

	原有方程 C_1	水平平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	向右移动 <u>3</u> 单位	$y = (x-3)^2$
(b)	$y = x^2 + 1$	向右移动 <u>7</u> 单位	$y = (x-7)^2 + 1$
(c)	$y = x^2 + x$	向右移动 <u>2</u> 单位	$y = (x-2)^2 + (x-2)$
(d)	$y = x^2 - x$	向右移动 <u>1</u> 单位	$y = (x-1)^2 - (x-1)$
(e)	$y = x^2 + x + 3$	向右移动 <u>5</u> 单位	$y = (x-5)^2 + (x-5) + 3$
(f)	$y = x^3$	向右移动 <u>9</u> 单位	$y = (x-9)^3$
(g)	$y = x^3 + 7$	向右移动 <u>12</u> 单位	$y = (x-12)^3 + 7$
(h)	$y = x^2$	向左移动 <u>5</u> 单位	$y = (x+5)^2$
(i)	$y = x^2 + 1$	向左移动 <u>7</u> 单位	$y = (x+7)^2 + 1$
(j)	$y = x^2 + x$	向左移动 <u>1</u> 单位	$y = (x+1)^2 + (x+1)$
(k)	$y = 3x^2 + 2x$	向左移动 <u>5</u> 单位	$y = 3(x+5)^2 + 2(x+5)$
(l)	$y = x^3$	向左移动 <u>2</u> 单位	$y = (x+2)^3$
(m)	$y = f(x)$	向右/ <u>左</u> *移动 <u>h</u> 单位	$y = f(x-h)$
(n)	$y = f(x)$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移动 <u>h</u> 单位	$y = f(x+h)$
(o)	$y = x^2$	向右/ <u>左</u> *移动 <u>12</u> 单位	$y = (x-12)^2$
(p)	$y = x^2$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移动 <u>2</u> 单位	$y = (x+2)^2$
(q)	$y = x^2 + 3x$	向右/ <u>左</u> *移动 <u>5</u> 单位	$y = (x-5)^2 + 3(x-5)$
(r)	$y = x^2 + 3x$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移动 <u>3</u> 单位	$y = (x+3)^2 + 3(x+3)$
(s)	$y = x^2 - 5x - 7$	向 <u>右</u> / <u>左</u> *移动 <u>2</u> 单位	$y = (x+2)^2 - 5(x+2) - 7$
(t)	$y = x^3 + 4x^2 + 1$	向右/ <u>左</u> *移动 <u>7</u> 单位	$y = (x-7)^3 + 4(x-7)^2 + 1$

* 删去不适用者

6. 由此写出下列各函数变换所对应的图像方程。

	原有方程 C_1	水平平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	向右移动 8 单位	$y = (x - 8)^2$
(b)	$y = x^3$	向右移动 5 单位	$y = (x - 5)^3$
(c)	$y = x^2 + 1$	向右移动 5 单位	$y = (x - 5)^2 + 1$
(d)	$y = x^2 - x$	向右移动 3 单位	$y = (x - 3)^2 - (x - 3)$
(e)	$y = x^2 + 3x + 2$	向右移动 7 单位	$y = (x - 7)^2 + 3(x - 7) + 2$
(f)	$y = x^3 + 3x^2 + 2x - 5$	向右移动 7 单位	$y = (x - 7)^3 + 3(x - 7)^2 + 2(x - 7) - 5$
(g)	$y = x^2$	向左移动 4 单位	$y = (x + 4)^2$
(h)	$y = x^2 + 1$	向左移动 2 单位	$y = (x + 2)^2 + 1$
(i)	$y = x^3 + x$	向左移动 4 单位	$y = (x + 4)^3 + (x + 4)$
(j)	$y = x^2 + 3x + 2$	向左移动 5 单位	$y = (x + 5)^2 + 3(x + 5) + 2$
(k)	$y = x^3 - x^2 + x + 1$	向左移动 7 单位	$y = (x + 7)^3 - (x + 7)^2 + (x + 7) + 1$
(l)	$y = f(x)$	向右移动 h 单位	$y = f(x - h)$
(m)	$y = f(x)$	向左移动 h 单位	$y = f(x + h)$
(n)	$y = x^4$	向左移动 6 单位	$y = (x + 6)^4$
(o)	$y = x^2 + 5x$	向右移动 4 单位	$y = (x - 4)^2 + 5(x - 4)$
(p)	$y = x^3 + 2x$	向左移动 3 单位	$y = (x + 3)^3 + 2(x + 3)$

工作纸 4

1. (a) C_6 的图像是将 C_1 向 左/右 移动 2 个单位及 上/下 移动 2 个单位。
 (b) C_6 的方程是 $y = (x-2)^2 + 2$ 。
2. (a) C_7 的图像是将 C_1 向 左/右 移动 3 个单位及 上/下 移动 7 个单位。
 (b) C_7 的方程是 $y = (x-3)^2 - 7$ 。

3. 试写出下列各函数所对应的图像。

	原有方程 C_1	水平平移	铅垂平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	<u>左/右</u> * <u>3</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>4</u> 单位	$y = (x-3)^2 - 4$
(b)	$y = x^2$	<u>左/右</u> * <u>3</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>4</u> 单位	$y = (x+3)^2 + 4$
(c)	$y = x^3$	<u>左/右</u> * <u>4</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>3</u> 单位	$y = (x-4)^3 + 3$
(d)	$y = x^3$	<u>左/右</u> * <u>6</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>4</u> 单位	$y = (x+6)^3 + 4$
(e)	$y = x^3$	<u>左/右</u> * <u>12</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>5</u> 单位	$y = (x-12)^3 - 5$
(f)	$y = f(x)$	<u>左/右</u> * <u>h</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>k</u> 单位	$y = f(x+h) + k$ 当 $h > 0, k > 0$
(g)	$y = f(x)$	<u>左/右</u> * <u>h</u> 单位	<u>上/下</u> * <u>k</u> 单位	$y = f(x+h) - k$ 当 $h > 0, k > 0$

* 删去不适用者

4. 试写出下列各函数所对应的图像

	原有方程 C_1	水平平移	铅垂平移	新的方程 C_2
(a)	$y = x^2$	向右移动 10 单位	向上移动 1 单位	$y = (x - 10)^2 + 1$
(b)	$y = x^2$	向右移动 8 单位	向下移动 2 单位	$y = (x - 8)^2 - 2$
(c)	$y = x^2$	向左移动 1 单位	向上移动 7 单位	$y = (x + 1)^2 + 7$
(d)	$y = x^2$	向左移动 12 单位	向下移动 1 单位	$y = (x + 12)^2 - 1$
(e)	$y = x^2 + x - 1$	向右移动 10 单位	向下移动 20 单位	$y = (x - 10)^2 + (x - 10) - 21$
(f)	$y = x^3$	向左移动 1 单位	向上移动 3 单位	$y = (x + 1)^3 + 3$
(g)	$y = x^3$	向右移动 3 单位	向下移动 1 单位	$y = (x - 3)^3 - 1$
(h)	$y = x^3 - 4x + 3$	向左移动 10 单位	向下移动 20 单位	$y = (x + 10)^3 - 4(x + 10) - 17$
(i)	$y = f(x)$	向左移动 h 单位	向上移动 k 单位	$y = f(x + h) + k$
(j)	$y = f(x)$	向右移动 h 单位	向下移动 k 单位	$y = f(x - h) - k$
(k)	$y = f(x)$	向右移动 h 单位	向上移动 k 单位	$y = f(x - h) + k$

鸣谢：本示例大部分教学活动取材自中华圣洁会灵风中学，蒙学校慷慨允许于本教学资源套印出，谨此致谢。