

《數聞》第四期挑戰園地解答

1. 在社交網站 Mathbook 上，朋友關係是相互的（即如果 A 是 B 的朋友，則 B 也是 A 的朋友）。是否可能有 5 名用戶，其中既不存在 3 人全部互為朋友（即這 3 人中每人都跟其餘兩人為朋友），也不存在 3 人全部互相不是朋友（即這 3 人中沒有兩人是朋友）？

解答：可能。例如，設 5 名用戶為 A、B、C、D、E，其中只有五對朋友：(A,B)、(B,C)、(C,D)、(D,E)、(E,A)。

2. 若 x 為正實數，求 $x + \frac{1}{x}$ 的最小值。

解答：注意到

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2 \geq 2,$$

且當 $x = 1$ 時，等號成立。故答案為 2。

3. 設 $ABCD$ 為平行四邊形，並設 P 、 Q 、 R 、 S 分別為四邊 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上的點，使得 $PR \parallel BC$ 及 $QS \parallel AB$ 。若直線 AC 、 PQ 、 RS 沒有兩條平行，求證這三條直線交於一點。

證明：不失一般性，設 PQ 和 RS 的交點（相對 Q 和 R ）較接近 P 和 S 。設 PQ 與 AC 相交於 T ，及 RS 與 AC 相交於 U 。使用梅涅勞斯定理，可得 $1 = \frac{AT}{TC} \cdot \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{BP}{PA} = \frac{AT}{TC} \cdot \frac{SD}{AS} \cdot \frac{PB}{AP}$ 。相似地， $1 = \frac{AU}{UC} \cdot \frac{SD}{AS} \cdot \frac{PB}{AP}$ 。因此可證 T 和 U 為同一點。

4. 求以下數式的值：

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \dots + \frac{1}{97 \times 98 \times 100}$$

解答：由於

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \dots + \frac{1}{97 \times 98 \times 100} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{97} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{98} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{97} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{98} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} \right) + \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{98} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{565801}{2910600} \end{aligned}$$

得獎者名單：

學生姓名	學校名稱
張繁希	聖保羅男女中學
Yan Yau CHENG	智新書院
方子路	聖公會林護紀念中學

獎者亦會另外獲電郵通知。