《數聞》第六期挑戰園地解答

1. 一個古戈爾有多少個正因數？（關於古戈爾的定義，請參看本期 Jacob Lurie 教授的訪問。）

   解答：由於一個古戈爾是 $10^{100}=2^{100}\times 5^{100}$，因此古戈爾的所有正因數均為 2 和 5 不同冪之積，當中 2 和 5 的冪分別有 101 個不同的選擇。因此，所求答案為$101\times 101=10201$。

2. 考慮一個2015×2015的棋盤。現移除左上角那個1×1的小格。問餘下部分可否以1×4和4×1的長方形無重疊地密鋪？

   解答：對於所有 x 和 y，在第 x 行第 y 列的小格填上複數 i^{x+2y}。由此，任何一個1×4 或 4×1 的長方形所覆蓋小格數值之和為零。但可以證明棋盤移除左上角小格後，所有小格數值之和非零，因此得證不可能如題無重疊地密鋪。

3. 求一個邊長為 5、5、6 的三角形的外接圓半徑。

   解答：設該三角形為 ABC，且 BC 邊長為 6。設 D 為 BC 的中點。由畢氏定理，$AD=4$。考慮 ABC 的對稱性，其外心 O 位於直線 AD 之一。由於角 BAC 為銳角，O 位於三角形內。設 ABC 的外接圓半徑為 R。由於 $OD^2+BD^2=OB^2$，可得$(4-R)^2+3^2=R^2$，因此 $R=\dfrac{25}{8}$。

4. 若 x、y、z 為正實數，滿足$xyz=x+y+z$，求證：存在一個三角形 ABC，使得$x=\tan A$、$y=\tan B$、$z=\tan C$。

   解答：由於 x、y、z 為正數，因此有實數 a、b、c 介乎 0 與 $\pi/2$之間，令 $x=\tan a$、$y=\tan b$及$z=\tan c$。由已知條件，可知 $\tan c=\dfrac{\tan a+\tan b}{\tan a\tan b-1}=-\tan(a+b)=\tan(-a-b)$，因此$c=k\pi-a-b$，其中 k 為整數。由於 $0<a,b,c<\pi/2$，可得 $c=\pi-a-b$。證畢。

得獎者名單：

學生姓名	學校名稱
賴俊延	聖文德書院
謝卓熙	香港培正中學
許晉瑋	仁愛堂田家炳小學
周永豪	荃灣官立中學
吳庭俊	宣道會陳瑞芝紀念中學

得獎者亦會另外獲電郵通知。