

《數聞》第一期挑戰園地解答

1. 本題中，若一個正整數有奇數個不同的正因數，則稱為「怪數」。例如 4 有 3 個不同的正因數（即 1、2、4），所以 4 是怪數；但 10 有 4 個不同的正因數（即 1、2、5、10），所以 10 不是怪數。在 1、2、……、2016 中，共有多少個怪數？

解答：如果 a 是正整數 n 的正因數，則 $b = \frac{n}{a}$ 也是，且 $\frac{n}{b} = a$ 。故 n 的正因數總可兩兩配對，即 n 總有偶數個正因數，除非對於其中一個正因數 a ，有 $\frac{n}{a} = a$ ，即 $n = a^2$ 為平方數。1、2、……、2016 中共有 44 個平方數，亦即有 44 個「怪數」。

2. 已知以下數式代表一個實數，試求它的值。

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

解答：設 $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ ，則 $x = \sqrt{2 + x}$ ，故 $x^2 - x - 2 = 0$ 。解之，得 $x = 2$ 或 $x = -1$ （捨去）。

3. 假設在社交網站 Mathbook，每名用戶的朋友數目沒有限制，且朋友關係是相互的（即如果 A 是 B 的朋友，則 B 也是 A 的朋友）。求證必有兩名 Mathbook 用戶的 Mathbook 朋友數目相同。

解答：設共有 n 個 Mathbook 用戶。每名用戶的朋友數目皆在 0 和 $n-1$ 之間（包括 0 和 $n-1$ ）。如果沒有兩名用戶的朋友數目相同，則這 n 名用戶的朋友數目必定分別為 0、1、……、 $n-1$ 。現在，有 0 個朋友的用戶跟任何用戶都不是朋友，而有 $n-1$ 個朋友的用戶跟所有其他用戶都是朋友，矛盾。

4. 設 P 為 $\triangle ABC$ 的平面內的一點。設 X 為平面內的一點，使得 PX 的中點是 BC 的中點。設 Y 為平面內的一點，使得 PY 的中點是 CA 的中點。設 Z 為平面內的一點，使得 PZ 的中點是 AB 的中點。求證 AX 、 BY 、 CZ 交於一點。（提示：試用本期有關坐標幾何的文章中介紹的方法！）

解答：使用坐標幾何。設 $A=(a_1, a_2)$ 、 $B=(b_1, b_2)$ 、 $C=(c_1, c_2)$ 、 $P=(p_1, p_2)$ 。則 $Z=\left(\frac{a_1+b_1-p_1}{2}, \frac{a_2+b_2-p_2}{2}\right)$ 、 $X=\left(\frac{b_1+c_1-p_1}{2}, \frac{b_2+c_2-p_2}{2}\right)$ 、 $Y=\left(\frac{c_1+a_1-p_1}{2}, \frac{c_2+a_2-p_2}{2}\right)$ （試證明之！）。故 CZ 的中點為 $\left(\frac{a_1+b_1+c_1-p_1}{2}, \frac{a_2+b_2+c_2-p_2}{2}\right)$ 。同理可知， AX 的中點和 BY 的中點也是這點。

得獎者名單：

| 學生姓名 | 學校名稱 |
|------|---------------|
| 張繁希 | 聖保羅男女中學 |
| 鍾凱琪 | 沙田培英中學 |
| 黃嘉慧 | 聖保羅男女中學 |
| 黎俊豪 | 保良局馬錦明夫人章馥仙中學 |
| 黃德祺 | 保良局馬錦明夫人章馥仙中學 |

得獎者亦會另外獲電郵通知。