

## 《數聞》第七期挑戰園地解答

1. 任何足球陣式由  $x$  個後衛、 $y$  個中場、 $z$  個前鋒組成，其中  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為非負正數，且後衛、中場、前鋒的總數為 10。例如  $(x, y, z) = (4, 4, 2)$  和  $(x, y, z) = (10, 0, 0)$  均為足球陣式，但  $(x, y, z) = (3.5, 6, 0.5)$  和  $(x, y, z) = (4, 4, 1)$  則不是。問共有多少個足球陣式？

**解答：**若有陣式中有  $x$  個後衛，則中場人數  $y$  有  $11 - x$  個不同的可能值（即 0、1、2、……、 $10 - x$ ）。此外，當  $x$  與  $y$  的值固定時， $z$  的值亦固定。因此，答案為：

$$11 + 10 + 9 + \dots + 1 = 66$$

2. 見本期文章《魔鬼細節》中的例三。試以不同方式應用規則，得出關於各隊排名的不同結論。

**解答：**黃隊得 9 分，入 10 球失 1 球。另外三隊皆得 3 分，入 3 球失 6 球。因此黃隊得第一，但另外三隊的得分、得球和失球皆相同，因此需以對賽得分決勝負。

考慮紅、綠、藍三隊的對賽成績，其中紅勝藍 2:1、藍勝綠 2:0、綠勝藍 3:0，因此對賽成績全為 3 分。

紅隊領隊：「得失球差和對賽成績皆相同，應該抽籤決定二、三、四名。」

綠隊領隊：「不，還得考慮對賽得失球差呢。」

藍隊領隊：「同意！三隊之間的對賽，紅隊入 2 球失 4 球，藍隊和綠隊皆是入 3 球失 2 球。」

綠隊領隊：「所以紅隊第 4 名，然後藍綠兩隊抽籤決定二、三名。」

藍隊領隊：「不對啊，應該再考慮藍綠兩隊的對賽成績。因為我們曾以 2:0 擊敗綠隊，所以應該是我們排第二，綠隊排第三。」

3. 已知一個三角形的三邊邊長之積為 480、外接圓半徑為 5，求其面積。

**解答：**考慮三角形面積為  $\frac{1}{2}ab\sin C$ 。由正弦公式，可知  $\sin C = \frac{c}{2R}$ 。因此，三

角形面積亦即  $\frac{abc}{4R} = 24$ 。

4. 求證對於任何正實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，以下不等式成立：

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

**解答：**不失一般性，設  $a \geq b \geq c$ 。由此， $b+c \leq c+a \leq a+b$ ，即

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}。利用排序不等式，可得$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

及

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}。$$

將兩條不等式相加，可得所需結果。

除此方法外，亦可使用展開所有分數，若引用《數聞》第二期介紹的 Muirhead's 不等式來證明求證的不等式。

得獎者名單：

學生姓名	學校名稱
謝卓熙	香港培正中學
賴俊延	聖文德書院
樊文瀚	港大同學會書院
吳庭俊	宣道會陳瑞芝紀念中學
林俊燊	迦密主恩中學

得獎者亦會另外獲電郵通知。