《數聞》第八期挑戰園地解答

1. 設 $ABCD$ 為凸四邊形，且不是平行四邊形。設 E 為 BD 的中點、F 為 AC 的中點。求證：若 L 為線段 EF 上的任何一點，則三角形 ALB 和 CLD 的面積之和，等於四邊形 $ABCD$ 的面積的一半。

   解答：設 $[XYZ]$ 代表三角形 XYZ 的面積。注意到 $[ALF]=[CLF]$ 和 $[BLF]=[DLF]$（為甚麼？），可以得到
   $$\begin{aligned}[ALB]+[CLD] &= [AFB]-[ALF]-[BLF]+[CFD]+[CLF]+[DLF] \\ &= [AFB]+[CFD].\end{aligned}$$
   現只需證明 $[AFB]+[CFD]$ 是 $ABCD$ 面積的一半即可。事實上，由於 F 是 AC 的中點，我們可得到 $[AFB]=[CFB]$ 和 $[CFD]=[AFD]$。證畢。

2. 求證：對於任意整數 a、b、c、d，以下算式可被 12 整除：
   $$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$
   解答：由此 a、b、c、d 中總有 2 個數被 3 除時餘數相同，因此上述算式中最少 1 個因式可被 3 整除。類似地，可以證明上述算式中最少 2 個因式可被 2 整除。因此全式可被 12 整除。

3. 某校有 1000 名學生，他們的編號分別是 1 至 1000。每名學生皆須在法語和德語兩者之間選修一科，並規定如果某 20 名學生的編號組成等差數列，則他們不能全部選修同一語文。是否有可能滿足以上要求？（可參閱本期《概率與 IMO》一文。）

解答：假設每一個學生均隨機在兩種中語文選修一種。設 S 為一個有 20 個數的集合，其中所有數均為 1 至 1000 中的整數，並且集合中的所有數可組成一個等差數列。考慮事件「所有編號為 S 中的數的學生均選修同一種語文」。由於任何等差數列均能由首 2 項決定，因此最多只會有 $k=\frac{1000\times 999}{2}=499500$ 個不同的事件，而每個事件的發生概率為 $p=\frac{2}{2^{20}}=\frac{1}{2^{19}}$。因此，發生最少其中一個事件的概率不多於 $kp=0.95...<1$。換言之，上述所有事件都不發生的概率為一正數，即有可能滿足題目的要求。

換一個方法，我們也可利用 Lovász local lemma 作證明。同樣考慮前述的事件。留意到每一個事件最多只會跟 $d=20\times 20\times 52=20800$ 個其他事件相關，因為：

- 每個事件涉及 20 個學生；
- 每個學生的編號最多在 20×52 個不同等差數列中，因為其編號可能是數列中第 1、2、……、20 項，而公差則只可能為 1、2、……、52 這些不同的數值。

計算 $epd=0.10...<1$，引用 Lovász local lemma，證畢。這方法比上一個方法能得出更強的結果，因為就算將學生的數目增加至超過 1000 人的大數目，仍可利用 Lovász local lemma 得到相同的結果。

4. 參見本期《不可能的藝術》一文。設有奇數名選民。對於單贏家的選舉，孔多塞法的定義是：每名選民在選票上為所有選項排序。如果存在一個選項 P，使得對於任何其他選項 Q，都有過半數選民把 P 排在 Q 之上，則 P 為贏家。求證：如果所有選民誠實投票的結果是有贏家，則沒有一名選民有單方面地不誠實投票的動機。

解答：考慮任意一名選民 V。如果當所有選民誠實投票時贏家 P 同時是 V 的最佳選項，則 V 沒有動機改變任何情況。相反，若 P 不是 V 的最佳選項，V 能否以不誠實投票令他心目中的較佳選項 R 勝出？首先，V 須確定超過一半的選民將 R 排在 P 之上，但 V 就算在誠實投票時，已經把 R 排在 P 之上，而結果仍然是超過半數選民把 P 排在 R 之上，因此無論如何 V 不能做任何事改變選舉結果。

得獎者名單：

學生姓名	學校名稱
謝卓熙	香港培正中學
張善明	協恩中學附屬小學 / 協恩中學
樊文瀚	港大同學會書院

得獎者亦會另外獲電郵通知。