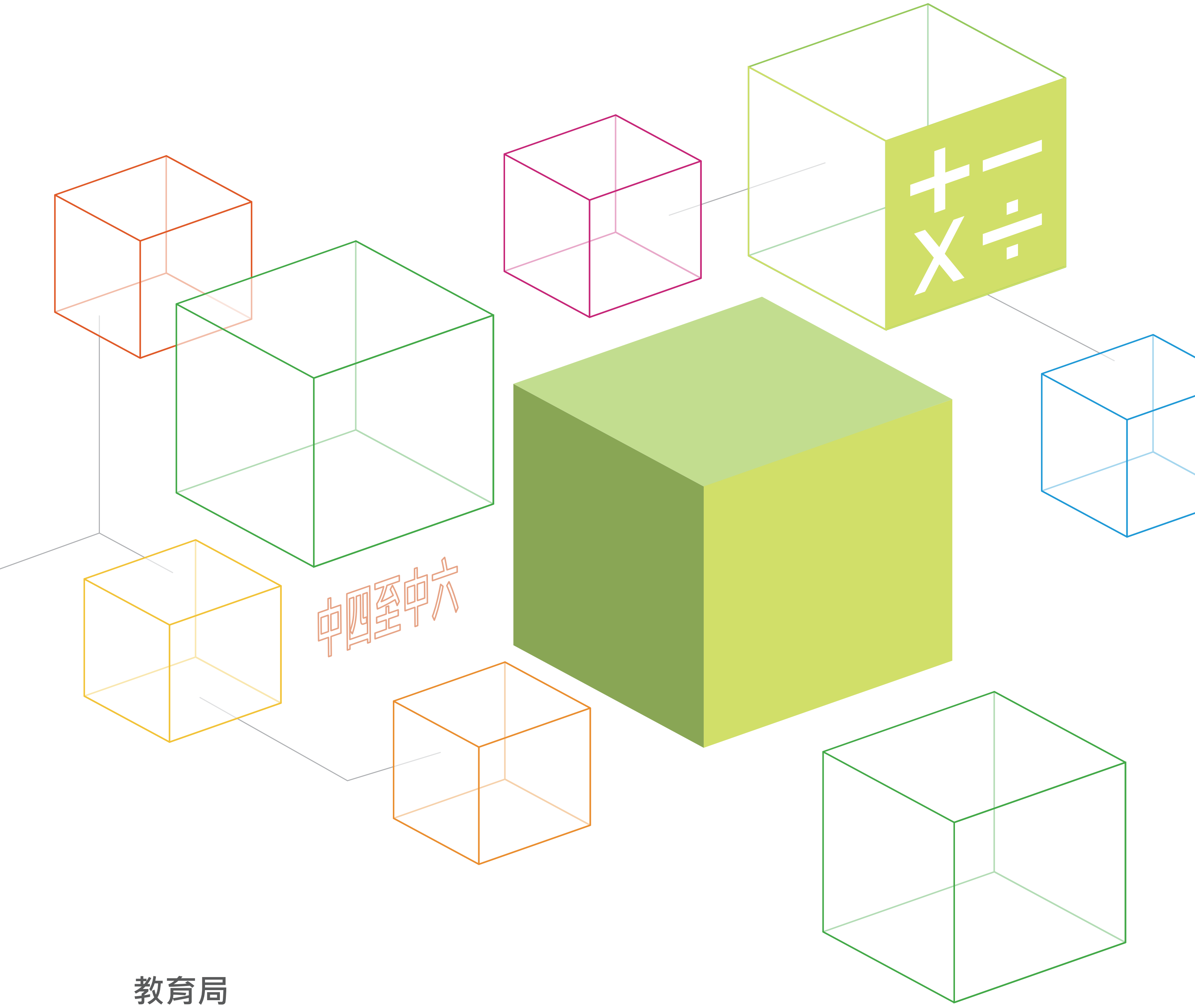
高中數學課程闡釋:

單元一 (微積分與統計)



教育局
課程發展處
數學教育組
二零零九年 (二零一八年八月更新)

（空白頁）

目　　錄

前　言

為配合學校課程持續發展，《數學課程及評估指引（中四至中六）》（以下簡稱《課程及評估指引》）於 2017 年 12 月更新。高中數學課程包括必修部分和延伸部分。延伸部分包括兩個單元，分別是單元一（微積分與統計）和單元二（代數與微積分）。

在《課程及評估指引》中，單元一的學習重點以表列形式歸於不同學習單位內。表中「注釋」欄的內容為學習重點的補充資料。本小冊子內的課程闡釋旨在進一步解釋：

（一）　單元一學習重點的要求；

（二）　單元一的教學建議；

（三）　單元一學習單位之間的關係和結構；及

（四）　必修部分與單元一的課程銜接。

本小冊子內的課程闡釋配合《課程及評估指引》內每一學習單位的「注釋」欄及教學時數，可作為教師規劃該學習單位教學的闊度和深度之參考。教師宜在施教單元一時，把必修部分和單元一的內容視為連貫的數學知識，並培養學生運用數學解決問題、推理及傳意的能力。此外，教師須留意，《課程及評估指引》中的學習單位及學習重點的編排次序並不等同於學與教的次序，教師可因應學生需要有系統地編排學習內容。

歡迎各界人士就本小冊子提供意見和建議。來函請寄：

九龍油麻地彌敦道 405 號

九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

傳真：3426 9265

電郵：ccdoma@edb.gov.hk

（空白頁）

基礎知識

基礎知識內容由兩個部分組成：二項展式、指數函數和對數函數。二項展式為掌握二項分佈的基礎。很多和自然現象有關的數學模型皆涉及指數函數。正態分佈的概率分佈函數亦涉及指數函數。

基礎知識的內容是單元一內微積分和統計的先備知識。教師教授基礎知識內的課題時應避免嚴謹的處理。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
1. 二項展式	1.1 認識展式 $(a+b)^n$，其中 n 為正整數	3

課程闡釋：

學生已在第三學習階段學習 a^0 的定義和整數指數定律，並進行多項式的加、減、乘及其混合運算和多項式的因式分解。

介紹二項展式有多種方法，諸如以乘法展開 $(a+b)^n$ 或利用組合的概念解釋二項展式等。

學生須認識 $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$，其中 n 為正整數。“C_r^n”、“${}_nC_r$”、“${}^nC_r$”、“$\binom{n}{r}$”等記法皆可使用。

為方便表達二項展式，學生須認識求和記法“Σ”，諸如 $\sum_{i=1}^{n} 2$、$\sum_{i=0}^{n} 4^i$ 和 $\sum_{k=1}^{7} k^3$。學生亦須認識關係式：$\sum_{i=1}^{n} a = na$ 和 $\sum_{r=1}^{n} (ax_r \pm by_r) = a\sum_{r=1}^{n} x_r \pm b\sum_{r=1}^{n} y_r$，其中 a、b 為常數。

以下內容不屬課程所需：

- 三項式的展開
- 求最大係數和最大項
- 二項式係數的性質
- 求近似值的應用，例如求 $(1.01)^{10}$ 的近似值

教師可引導學生透過帕斯卡三角展開二項式，並可介紹以下的歷史事實：帕斯卡於 1653 年出版的《算術三角論》介紹二項式係數的三角形排列方法及其應用。因此，一般稱這個三角形的排列方法為帕斯卡三角。事實上，早於

13 世紀，中國數學家楊輝在他的著作《詳解九章算法》(1261) 已展示相同的三角形，並指出 「賈憲用此術」。故此，這個三角形的排列方法亦稱為「楊輝三角」或 「賈憲三角」。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
2. 指數函數和對數函數	2.1 認識 e 的定義和指數級數 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ 2.2 理解指數函數和對數函數 2.3 運用指數函數和對數函數解應用題 2.4 將 $y = ka^x$ 和 $y = k\left[f(x)\right]^n$ 化為線性關係式，其中 a、n 和 k 為實數，$a > 0$，$a \neq 1$，$f(x) > 0$ 和 $f(x) \neq 1$	8

課程闡釋：

學生須認識當 n 的值增大時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 愈來愈接近一個固定的數 e。當學生認識極限概念後，他們須認識 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

學生可運用計算機或電腦軟件，求 e 的近似值。

教師可利用人口增長、放射性衰變、利息計算等現實生活上的例子介紹 e 的概念。

學生須認識指數級數：　$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$。

學生須能把諸如 e^{-x}, e^{kx}, e^{-x^2} 和 e^{x+k} 等指數函數展開成指數級數，其中 k 為常數。

學生已在必修部分的學習單位「指數函數和對數函數」中學習指數函數 $y = a^x$ 和對數函數 $y = \log_a x$ ($a > 0$，$a \neq 1$) 的性質及其圖像。學生須理解指數函數 $y = e^x$ 和自然對數函數 $y = \ln x$ ($x > 0$)分別是指數函數 $y = a^x$ 和對數函數 $y = \log_a x$ 的特例。

學生須理解指數函數圖像和對數函數圖像之間的關係。為鞏固學生對 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的理解，教師可要求學生探究 $y=2^x$、$y=e^x$、$y=3^x$、$y=2^{-x}$、$y=e^{-x}$、$y=3^{-x}$、$y=\log_2 x$、$y=\ln x$ 和 $y=\log_3 x$ 等圖像之間的關係。

學生須理解 $e^{\ln x}=x$，$\ln e^x=x$ 和 $a^x=e^{x\ln a}$ 這三個等式。

指數函數可用於模擬許多自然現象，諸如連續增長、細菌增長、物質冷卻率、放射性元素衰變等。教師可透過學生在第三學習階段所學習的複利息概念介紹連續增長的概念。

學生須懂得解涉及以下公式的應用題:

連續增長: $f(t)=P_0e^{rt}$，$r>0$

人口增長： $f(t)=P_0e^{kt}$，$k>0$

放射性衰變： $f(t)=P_0e^{-kt}$，$k>0$

學生須能將 $y=ka^x$ 和 $y=k[f(x)]^n$，其中 a、n 和 k 是實數，$a>0$，$a\neq 1$，$f(x)>0$ 和 $f(x)\neq 1$ 化為線性關係式。當給出 x 及 y 的實驗數據時，學生須能描繪對應的直線圖像，並從圖像的斜率和截距來確定未知常數的值。函數 $f(x)$ 並不局限於多項式函數。

（空白頁）

微積分

微積分內容分為兩部分：求導法（或稱「微分法」）及其應用、積分法及其應用。函數的導數概念涉及函數極限的概念。在求導法及其應用這部分，學生須理解導數的定義，求導法的基本公式及運算法則。學生亦須能利用導數求曲線的切線方程和研究函數極大值和極小值的問題。

在許多涉及科學、科技和經濟情況的問題，學生須由已知函數的導數 $f'(x)$ 求函數 $f(x)$。這逆運算的做法就是不定積分的概念。同時，教師應介紹以長方形面積總和的極限作為定積分概念。教師可引導學生認識微積分基本定理，將兩看似不同的概念(不定積分和定積分)聯繫起來。

教師應採用直觀但概念正確的介紹方法。對於學生較難掌握的內容如極限的概念，教師可配合計算機或電腦軟件的數值方法，幫助學生認識相關概念。教師可協助學生透過動態數學軟件的互動介面，理解數學概念。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
3. 函數的導數	3.1 認識函數極限的直觀概念 3.2 求代數函數,指數函數和對數函數的極限 3.3 透過基本原理認識函數的導數的概念 3.4 認識曲線 $y = f(x)$ 在點 $x = x_0$ 的切線的斜率	5

課程闡釋：

函數極限是微積分中的一個基本概念。在介紹函數的極限的概念前，教師應簡略地重溫函數的概念和記法。

教師可利用列表顯示函數值在 $x = x_0$附近的微小變化，以幫助學生認識當 x 趨向 x_0時，函數 $f(x)$的極限概念。

學生須認識對某些函數 $f(x)$，當 x 趨向 x_0時，$f(x)$的極限可能不存在，諸如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 。

學生須認識有關函數的和、差、積、商、純量乘法和複合函數極限的定理，但其中的證明不屬課程所需。學生須能運用這些定理求代數函數、指數函數和對數函數的極限。代數函數須包括多項式函數、有理函數、冪函數 x^α 和由上述各函數的加、減、乘、除和複合而成的其他函數，諸如 $\sqrt{x^2+1}$。學生亦須能求當 x 趨向無窮大時，諸如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^3}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3e^x}{x}$ 等函數極限。

學生須認識當給定函數 $f(x)$，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，則此極限定義為 $f(x)$ 在 x 的導數。教師可向學生展示如何運用基本原理求諸如 x^2 和 $\frac{1}{x-1}$ 等函數的導數，但運用基本原理求導數不屬課程所需。

學生須認識導數的記法，例如: y'、 $f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$。學生須認識 $\frac{d}{dx}$ 只是一個算子，而 $\frac{dy}{dx}$ 不是一個分數。

學生須認識曲線 $y=f(x)$ 在點 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的切線的斜率為 $f'\left(x_0\right)$ 和它的記法 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 及須能求取曲線在該點的切線方程。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
4. 函數的求導法	4.1 理解求導法的加法法則、積法則、商法則和鏈式法則 4.2 求代數函數，指數函數和對數函數的導數	8

課程闡釋：

學生須理解以下求導法的法則：

- 加法法則：$\dfrac{d}{dx}(u+v)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$
- 積法則：$\dfrac{d}{dx}(uv)=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}$
- 商法則：$\dfrac{d}{dx}(\dfrac{u}{v})=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
- 鏈式法則：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

學生須能結合以下公式求諸如 $f(x)=\left(2x^2+5x+3\right)^8$、$f(x)=\sqrt{5x^2+2x-1}$、$f(x)=e^{x^2+1}$和 $f(x)=\ln\sqrt{x^3-1}$等代數函數、指數函數和對數函數的導數：

- $(C)'=0$
- $(x^n)'=nx^{n-1}$
- $(e^x)'=e^x$
- $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
- $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

- $(a^x)' = a^x \ln a$

反函數求導法、參數方程求導法、隱函數求導法和對數求導法均不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
5. 二階導數	5.1 認識函數的二階導數的概念 5.2 求顯函數的二階導數	2

課程闡釋：

學生須認識函數 $y=f(x)$ 的二階導數的概念及其記法: $f''(x)$、y'' 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

求隱函數的二階導數和求三階或以上的導數不屬課程所需。

教師可指出一般來說 $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 。

學生須能運用函數 $f(x)$ 的二階導數判別該函數的圖像在 $a \leq x \leq b$ 的凹性。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
6. 求導法的應用	6.1 運用求導法解涉及切線、變率、極大值和極小值的應用題	10

課程闡釋：

學生須能運用求導法解涉及切線和變率的應用題，須包括位移、速度和加速度的概念。

學生須能運用一階導數或二階導數解涉及極大值和極小值的應用題。極值須包括全局和局部的極值。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
7. 不定積分法及其應用	7.1 認識不定積分法的概念 7.2 理解不定積分的基本性質及不定積分法的基本公式 7.3 運用不定積分法的基本公式求代數函數和指數函數的不定積分 7.4 運用代換積分法求不定積分 7.5 運用不定積分法解應用題	10

課程闡釋：

學生須認識不定積分是求導法的逆運算，並理解 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ 這關係式中積分常數 C 的意義。

學生須認識記法：$\int f(x)\,dx$ 和「被積函數」、「積分常數」和「原函數」這些名詞。

學生須理解不定積分的基本性質和基本公式：
性質包括:

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，其中 k 為常數
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

公式包括:

- $\int k\ dx = kx + C$，其中 k 和 C 為常數
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$，其中 $n \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$，$x \neq 0$ (學生須認識絕對值的概念)

- $\int e^x dx = e^x + C$

學生須能運用代換積分法求諸如 $\int \left(3+\frac{x}{2}\right)^3 dx$ 和 $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$ 等不定積分。

以分部積分法求不定積分不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
8. 定積分法及其應用	8.1 認識定積分法的概念 8.2 認識微積分基本定理及理解定積分的性質 8.3 求代數函數和指數函數的定積分 8.4 運用代換積分法求定積分 8.5 運用定積分法求平面圖形的面積 8.6 運用定積分法解應用題	12

課程闡釋：

學生須認識定積分的定義為曲線下矩形條的面積和的極限，並能區分定積分與不定積分的概念。

學生須認識記法：$\int_a^b f(x)\,dx$和啞變量的概念，例如：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$。

學生須認識微積分基本定理：$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$，其中 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$，並透過這定理認識定積分和不定積分的關係。

學生須理解以下定積分的性質:

- $\int_a^b f\left(x\right)dx = -\int_b^a f\left(x\right)dx$
- $\int_a^a f\left(x\right)dx = 0$
- $\int_a^c f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx + \int_b^c f\left(x\right)dx$
- $\int_a^b kf\left(x\right)dx = k\int_a^b f\left(x\right)dx$，其中 k 為常數
- $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

教師可幫助學生探討這些性質的幾何意義。

學生須能計算代數函數和指數函數的定積分，及能運用代換積分法求定積分。當學生運用代換積分法計算定積分時，他們須能相應地改變定積分的上限和下限。

學生須能運用定積分法求平面圖形的面積，例如：求曲線 $y = f(x)$、x 軸與直線 $x = a$ 和 $x = b$ 所圍成區域的面積。

運用定積分法求曲線與 y 軸之間的面積和兩條曲線之間的面積不屬課程所需。

學生須能運用定積分法解諸如直線運動、增長模型等現實生活的應用題。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
9. 運用梯形法則計算定積分的近似值	9.1 理解梯形法則及運用它計算定積分的近似值	4

課程闡釋：

學生不容易，甚至不可能，求取一些諸如 $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 等定積分的數值。梯形法則是計算定積分的近似值其中的一種方法。

在運用梯形法則時，學生只須用闊度相同的子區間計算定積分的近似值。學生須理解子區間數目愈多，所得的近似值愈準確。

梯形法則的誤差估值不屬課程所需。

學生須能運用二階導數判別法及凹性判別估計值是過高還是過低，例如：

- 若函數 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 凹向上的，則梯形法則便會高估了定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值。
- 若函數 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 凹向下的，則梯形法則便會低估了定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值。

統計

統計內容由四個部分組成：條件概率和貝葉斯定理、離散概率分佈及其應用、正態分佈及其應用、點及區間估計。

單元一統計中的概率既基本又重要。隨機變量的概念對於學生來說是新的知識。學習二項分佈、泊松分佈和正態分佈有助加深學生對概率分佈的認識。課程亦包括統計推斷的討論。

研究學習總體參數及樣本統計量有助找出總體及樣本之間的關係。這部分包括點估計和區間估計。

點估計是利用樣本數據計算樣本統計量，作為未知的總體參數的猜測。置信區間則是總體參數的區間估計。置信區間的闊度因應所選的置信水平而決定。

學習單位	學習重點	時間
統計		
10. 條件概率和貝葉斯定理	10.1 理解條件概率的概念 10.2 運用貝葉斯定理解簡單應用題	6

課程闡釋：

學生已在必修部分的學習單位「續概率」中學習了獨立事件的概念，並能運用這概念判別兩個事件是否獨立。學生亦已在必修部分學習了條件概率的概念、記法及法則 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$。學生在這學習單位須進一步理解條件概率的概念，並結合「續概率」中的定律，得出如果 A 和 B 為獨立事件時，則 $P(A|B)=P(A)$ 和 $P(B|A)=P(B)$，且反之亦然。

學生須認識若 A 和 B 為獨立事件，則 A' 和 B，B' 和 A，A' 和 B' 也為獨立事件。

在處理那些只有有限數目的結果的應用題時，繪製樹形圖可有效地列出所有可能的結果。學生運用貝葉斯定理解簡單應用題時，可透過繪畫樹形圖或其他圖形列出所需的條件概率。

教師可透過日常生活例子解釋條件概率和獨立事件的概念。

學習單位	學習重點	時間
統計		
11. 離散隨機變量	11.1　認識離散隨機變量的概念	1

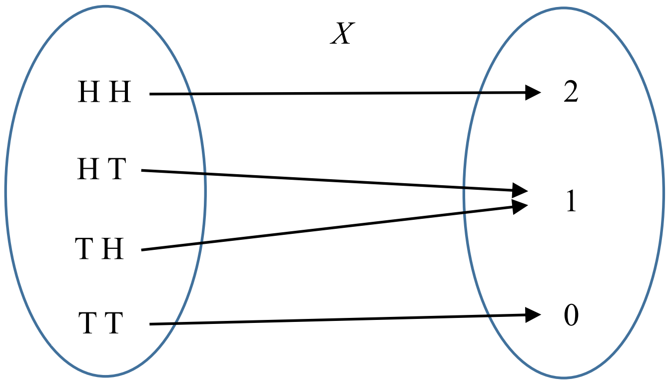
課程闡釋：

教師可透過日常生活的例子和必修部分中函數的概念介紹隨機變量的概念，及可引導學生認識隨機變量與代數中的變量在概念上有甚麼分別。

學習單位	學習重點	時間
統計		
12. 概率分佈，期望值和方差	12.1 認識離散概率分佈的概念及以表列、圖像和數學公式表示離散概率分佈 12.2 認識期望值 $E[X]$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)$ 的概念及運用它們解簡單應用題	7

課程闡釋：

教師可透過諸如以下的日常生活例子介紹離散概率分佈的概念:
設我們投擲兩枚勻稱硬幣一次，有四個可能的結果：HH、HT、TH、TT。
考慮擲得正面的數目，有以下隨機變量 X:



隨機變量 X 的概率分佈以表列表示:

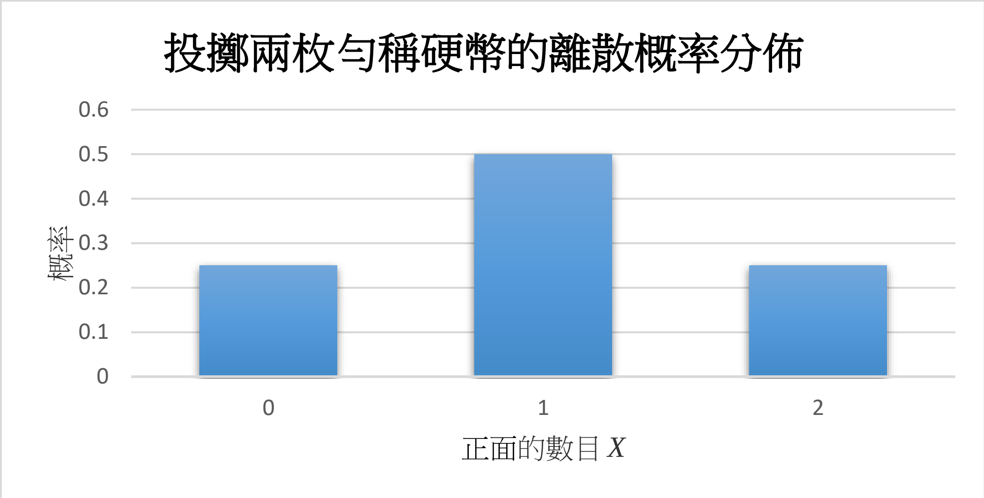
x	0	1	2
$P(X=x)$	0.25	0.5	0.25

其中 $P(X=x)$ 表示隨機變量 X 取值 x 時的概率，且 $0 \le P(X=x) \le 1$ 和 $\sum_x P(X=x)=1$。

隨機變量 X 的概率分佈亦可以用公式表示：

$$f(x)=P(X=x)=C_x^2\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$$,其中 $x=0,1,2$

隨機變量 X 的概率分佈也可以用棒形圖表示。



學生已在必修部分學習平均值和標準差的概念和應用。在介紹離散隨機變量的期望值與方差前，教師可簡要地重溫這些概念。

學生須能運用以下的公式解簡單應用題:

- $E[X]=\sum xP(X=x)$
- $\mathrm{Var}(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]$
- $E[g(X)]=\sum g(x)P(X=x)$
- $E[aX+b]=aE[X]+b$
- $\mathrm{Var}(X)=E\left[X^2\right]-(E[X])^2$
- $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

$E(X)$這記法亦可使用。

隨機變量的和與差及聯合概率分佈均不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
統計		
13. 二項分佈	13.1　認識二項分佈的概念及其性質 13.2　計算涉及二項分佈的概率	5

課程闡釋：

學習二項分佈前，學生須認識伯努利分佈。

學生須認識二項實驗具有以下的特性：

- 有 n 次相同的試驗。
- 每次試驗只有兩種可能結果：成功和失敗。
- 每次試驗，成功的概率為 p 和失敗的概率為 $1-p$。概率 p 在實驗中保持不變。
- 試驗彼此相互獨立。

二項隨機變量 X 表示 n 個試驗的成功次數。學生須認識 $E\left[X\right]=np$ 及 $\mathrm{Var}\left(X\right)=np\left(1-p\right)$，但這兩公式的證明均不屬課程所需。

此外，運用二項分佈表求相關的概率不屬課程所需。

二項分佈公式涉及很耗時的運算。教師可使用免費在線計算機或諸如 BINOM.DIST（r，n，p，T）等試算表軟件的內置功能，求個別和累積二項分佈的概率。

學習單位	學習重點	時間
統計		
14. 泊松分佈	14.1 認識泊松分佈的概念及其性質 14.2 計算涉及泊松分佈的概率	5

課程闡釋：

教師可透過現實生活例子介紹泊松分佈，並可與學生討論泊松分佈其實為二項分佈的極限形態，並在 n 很大和 p 很小時，泊松分佈可用來逼近二項分佈。

學生須認識泊松實驗具有以下特性：

- 在某區間內任何一個事件的出現皆獨立於在其他非重疊區間內事件的出現。
- 在任何區間內，事件出現的平均值與該區間的大小成正比。
- 超過一個事件出現於一個非常小的區間的概率是微不足道的。

學生須認識若 X 依循泊松分佈，其中 λ 代表事件在某段時段所出現的平均值，則 $E[X]=\lambda$ 及 $\mathrm{Var}(X) = \lambda$。但這兩公式的證明不屬課程所需。

此外，運用泊松分佈表求相關的概率不屬課程所需。

泊松分佈公式涉及耗時的運算。教師可使用免費的在線計算機或諸如 POISSON.DIST (x, n, T)等試算表軟件的內置功能，求個別和累積泊松分佈的概率。

學習單位	學習重點	時間
統計		
15. 二項分佈和泊松分佈的應用	15.1　運用二項分佈和泊松分佈解應用題	5

課程闡釋：

為判斷隨機變量依循哪種離散概率分佈，學生須認識離散概率分佈的特徵。二項分佈的特徵包括方差小於平均值，而泊松分佈的特徵包括方差等於平均值。這些概念提供判斷兩種分佈的線索。若蒐集數個隨機樣本，比較它們的平均值及方差有助於揀選適當的概率分佈。

學習單位	學習重點	時間
統計		
16. 正態分佈的基本定義及其性質	16.1 通過正態分佈，認識連續隨機變量及連續概率分佈的概念 16.2 認識正態分佈的概念及其性質	3

課程闡釋：

學生已掌握離散隨機變量和離散概率分佈的概念，教師應將此概念延伸至連續隨機變量和連續概率分佈。

學生須認識離散隨機變量的概率分佈與連續隨機變量的概率分佈的分別。

教師可介紹有關概率密度函數(p.d.f.) $f\left(x\right)$的概念和性質。

計算連續概率分佈的期望值和方差及推導正態分佈的平均值和方差均不屬課程所需。

學生須認識學習重點 12.2 的公式亦適用於連續隨機變量。

學生須認識正態分佈的概念，當中 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 代表 X 依循正態分佈，其中平均值為μ，標準差為 σ。

教師可介紹正態分佈的概率密度函數 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 其中 $x\in\left(-\infty,\infty\right)$，平均值為 μ 和標準差為 σ。

學生須認識正態分佈的以下性質:

- 正態曲線為鐘形並對稱於平均值
- 平均值、眾數和中位數均相等
- 正態曲線的平坦度取決於 σ 值
- 正態曲線下的面積為 1

學習單位	學習重點	時間
統計		
17. 正態變量的標準化及標準正態分佈表的運用	17.1 將正態變量標準化並運用標準正態分佈表求涉及正態分佈的概率	2

課程闡釋：

學生須認識 $Z \sim N(0,1)$ 代表 Z 依循標準正態分佈，其中平均值為 $\mu = 0$ 和標準差為 $\sigma = 1$。$N(0,1)$ 稱為「標準正態分佈」。

對於 $Z \sim N(0,1)$，學生須能運用標準正態分佈表求 $P(Z > a)$、$P(Z \le b)$ 和 $P(a \le Z \le b)$ 等值。學生亦須能在查表前將這些分佈 $N(\mu,\sigma^2)$ 變換為 $N(0,1)$。

學生須認識若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 及 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，則

- $Z \sim N(0,1)$
- $E[Z] = 0$ 和 $\mathrm{Var}(Z) = 1$
- $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \le \dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{b-\mu}{\sigma}) = \mathrm{P}(z_1 \le Z \le z_2)$

教師可介紹免費的在線計算機或諸如以下的試算表軟件的內置功能求標準分、正態隨機變量的個別和累積概率：

- **NORMDIST (*x*, *μ*, *σ*, *T*):** 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，當 $T = 1$，我們得到 $P(X \le x)$
- **NORMINV(*p*, *μ*, *σ*):** 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，我們得到 $P(X \le x) = p$ 中 x 的值
- **NORMSDIST(*z*):** 若 $Z \sim N(0,1)$，我們得到 $P(Z \le z)$
- **NORMSINV(*p*):** 若 $Z \sim N(0,1)$，我們得到 $P(Z \le z) = p$ 中的 z 的值

- **STANDARDIZE (x, μ, σ):** 我們得到 $Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

學習單位	學習重點	時間
統計		
18. 正態分佈的應用	18.1 在已知 x_1，x_2，μ 和 σ 的值的情況下，求 $P(X > x_1)$、$P(X < x_2)$、$P(x_1 < X < x_2)$ 及相關概率的值，其中 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 18.2 在已知 $P(X > x)$、$P(X < x)$、$P(a < X < x)$、$P(x < X < b)$ 或相關概率的值的情況下，求 x 的值，其中 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 18.3 運用正態分佈解應用題	7

課程闡釋：

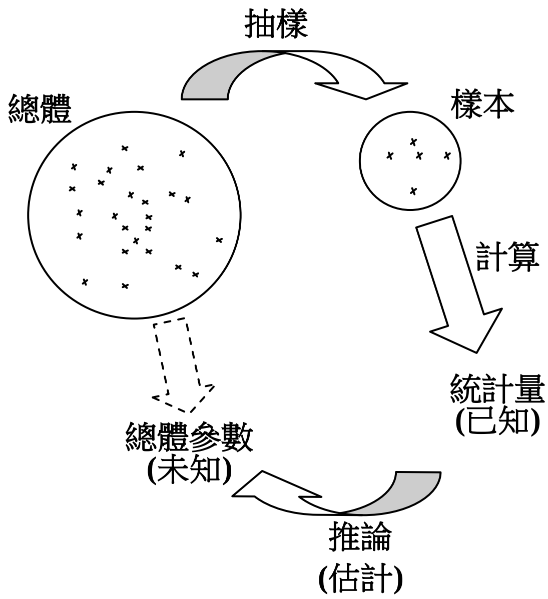
在計算有關概率的值時，學生須認識:

- $P(X > x_1) = P(X \geq x_1)$
- $P(X < x_2) = P(X \leq x_2)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$
- $P(X = x_1) = 0$

學習單位	學習重點	時間
統計		
19. 抽樣分佈和點估計	19.1 認識樣本統計量和總體參數的概念 19.2 當隨機樣本大小為 n 時，認識樣本平均值 $\bar{X}$ 的抽樣分佈 19.3 當樣本大小 n 足夠大時，運用中心極限定理把 $\bar{X}$ 的分佈當成正態分佈 19.4 認識點估計的概念，當中包括樣本平均值和樣本方差	9

課程闡釋：

學生已在必修部分學習總體和樣本的概念。學生在這學習單位須認識樣本統計量和總體參數的概念及這些概念之間的關係:



學生須認識：

- 樣本統計量未必與總體參數相同，但它可以提供與參數有關的訊息。
- 大部分樣本統計量與總體參數的數值相近。只有少數是非常大於或非常小於總體參數。
- 一般而言，較大樣本所提供的樣本統計量與總體參數較接近。

學生須認識以下有關總體平均值 μ 和總體方差 σ^2 的公式：

- $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$
- $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$

教師可通過進行一些抽樣活動，幫助學生認識樣本平均值 $\bar{X}$ 的抽樣分佈的概念及認識若總體平均值為 μ 和總體方差為 σ^2，則 $E\left[\bar{X}\right] = \mu$ 和 $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$。

學生須認識若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，則 $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$，但證明不屬課程所需。

教師可透過一些諸如 $n=1$ 或 $n=N$ 等極端的例子或電腦的模擬程式，幫助學生認識：

- 不論甚麼的概率分佈，當樣本大小足夠大時，樣本平均值的抽樣分佈近似正態分佈
- 當樣本大小增加時，大多數概率分佈很快近似正態分佈
- 在抽樣分佈中，樣本的數量假設為無限
- 當樣本大小增加時，概率分佈的伸展幅度減少

點估計是參數估計的其中一種方法。學生須認識運用樣本統計量估計總體參數的概念，例如，運用樣本平均值 $\bar{x}$ 估計總體平均值 μ。教師可指出樣本中位數或樣本眾數亦可作為點估計量。

在抽樣的過程中，不同的樣本可能會產生不同的估計量。我們很難決定哪一個估計量比較好。我們希望用一個無偏的估計量估計未知參數。長遠來說，採自大量樣本估計量的平均值會等同總體參數：E(樣本估計量) = 總體參數。學生須認識總體參數的無偏估計量不是唯一的。

學生須認識無偏估計量的概念，例如：樣本平均值 $\bar{x}$ 是總體平均值 μ 的一個無偏估計量，而樣本方差 $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ 則為總體方差 σ^2 的一個無偏估計量。

學習單位	學習重點	時間
統計		
20. 總體平均值的置信區間	20.1　認識置信區間的概念 20.2　求總體平均值的置信區間	6

課程闡釋：

學生須認識置信區間的概念，並認識較常用的為 95% 及 99% 的置信區間。

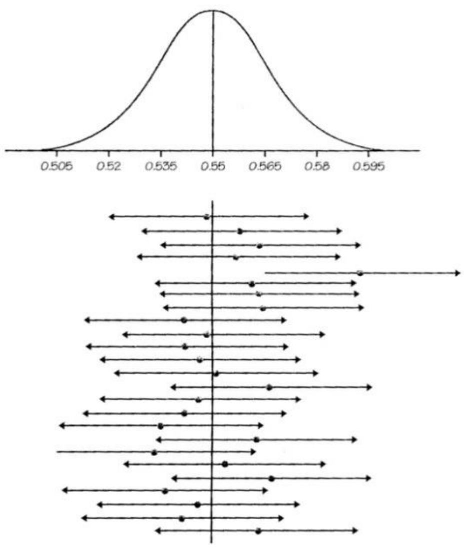
在建立總體平均值μ 的置信區間時，學生應考慮以下問題：
- 是否從正態分佈選取隨機樣本?
- 總體方差是否已知?
- 樣本大小是否足夠大?

教師可透過電腦模擬程式繪畫諸如以下置信區間的圖像，幫助學生認識:

- 從總體隨機抽樣，從中構作一個總體參數為 95% 的置信區間，學生可預期 5% 的區間不包含該總體參數。若學生計算一置信區間，他們並不知道該區間是否包含該總體參數。

- 當樣本大小增加，或選取較低的置信水平，置信區間的長度便會縮短。

- 在建立置信區間時，我們希望得到一個既狹窄(更準確的估計)及高置信水平的置信區間。惟在大部分情況下，這兩個條件不能兼得。



學生須能在以下的條件下求總體平均值 μ 的置信區間：

條件	μ 的 95%置信區間	μ 的 99%置信區間
正態總體 • 已知總體方差 σ^2 • 不論樣本大小 n • 樣本平均值為 $\bar{x}$	$(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x}-2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
非正態總體 • 已知總體方差 σ^2 • 足夠大的樣本 n ($n \geq 30$) • 樣本平均值為 $\bar{x}$	$(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x}-2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
非正態總體 • 不知總體方差 σ^2 • 足夠大的樣本 n ($n \geq 30$) • 樣本平均值為 $\bar{x}$ • 樣本方差為 s^2	$(\bar{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}})$	$(\bar{x}-2.575\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+2.575\frac{s}{\sqrt{n}})$

學習單位	學習重點	時間
進階學習單位		
21. 探索與研究	通過不同的學習活動，發現及建構知識，進一步提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力	7

課程闡釋：

本學習單位旨在提供更多學習空間，讓學生在學習其他學習單位的內容時，能參與更多有助發現及建構知識、提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力之活動。換句話說，這並非一個獨立和割裂的學習單位，活動可在課堂中引起動機、發展、鞏固或評估等不同環節進行。

鳴　謝

我們特別向下列委員會及工作小組的委員致謝，多謝他們對本小冊子所提供的寶貴意見和建議。

課程發展議會數學教育委員會

課程發展議會－香港考試及評核局　數學教育委員會

檢視中學數學課程專責委員會（高中延伸部分／選修科）

課程發展議會－香港考試及評核局　高中數學課程（單元一）工作小組