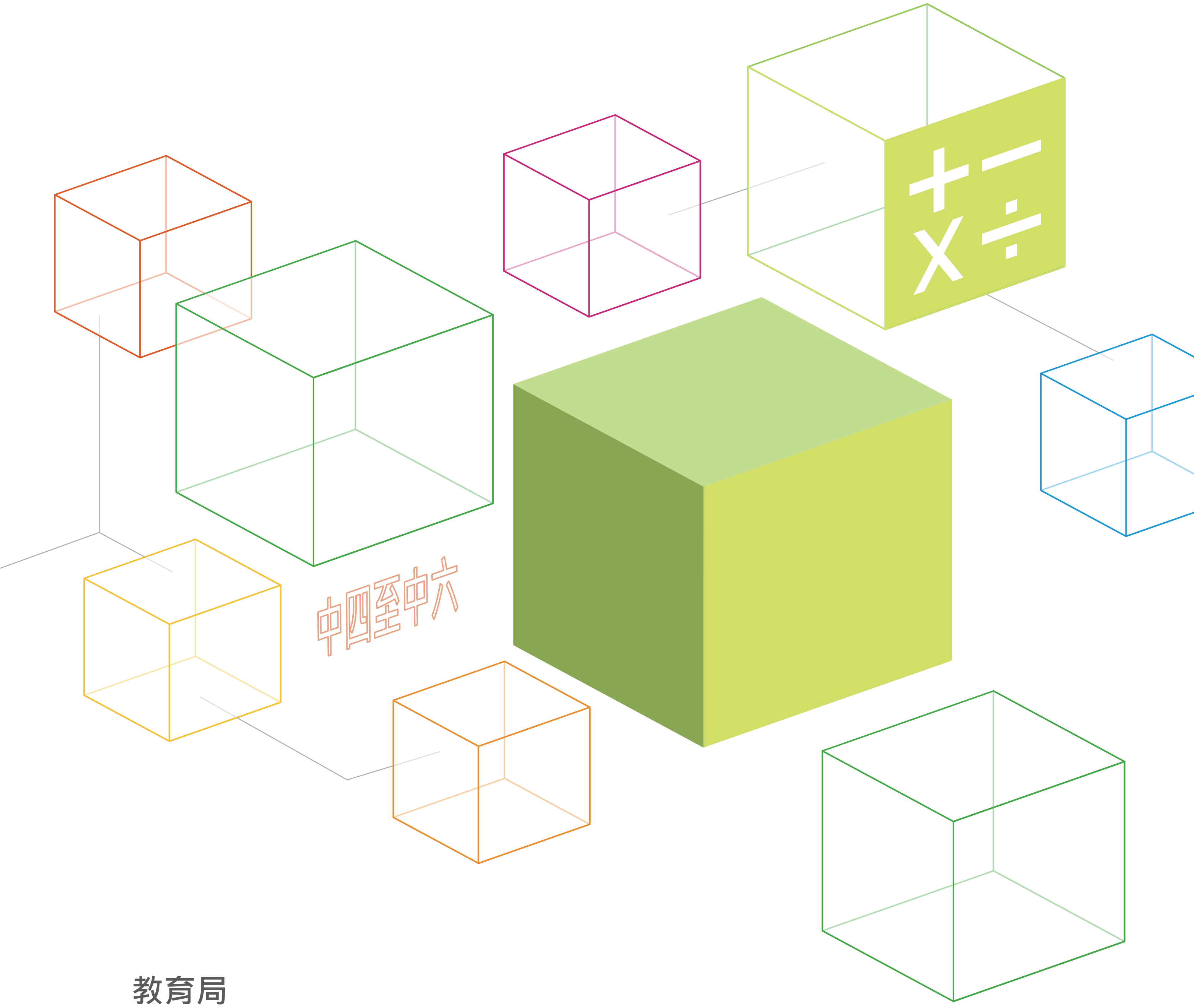
高中數學課程闡釋:

單元二 (代數與微積分)



教育局
課程發展處
數學教育組
二零零九年 (二零一八年八月更新)

(空白頁)

目　　錄

（空白頁）

前　言

為配合學校課程持續發展，《數學課程及評估指引（中四至中六）》（以下簡稱《課程及評估指引》）於 2017 年 12 月更新。高中數學課程包括必修部分和延伸部分。延伸部分包括兩個單元，分別是單元一（微積分與統計）和單元二（代數與微積分）。

在《課程及評估指引》中，單元二的學習重點以表列形式歸於不同學習單位內。表中「注釋」欄的內容為學習重點的補充資料。本小冊子內的課程闡釋旨在進一步解釋：

（一）　單元二學習重點的要求；

（二）　單元二的教學建議；

（三）　單元二學習單位之間的關係和結構；及

（四）　必修部分與單元二的課程銜接。

本小冊子內的課程闡釋連同《課程及評估指引》內每一學習單位的「注釋」欄及教學時數，可顯示該學習單位處理的闊度和深度。教師宜在施教單元二時，把必修部分和單元二的內容視為連貫的數學知識，並培養學生運用數學解決問題、推理及傳意的能力。此外，教師須留意，《課程及評估指引》中的學習單位及學習重點的編排次序並不等同於學與教的次序，教師可因應學生需要有系統地編排學習內容。

歡迎各界人士就本小冊子提供意見和建議。來函請寄：

九龍油麻地彌敦道 405 號

九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

傳真：3426 9265

電郵：ccdoma@edb.gov.hk

（空白頁）

基礎知識

基礎知識內容包括五個學習單位，可作為單元二內微積分和代數的先備知識。這些基礎知識能貫通必修部分及單元二。因此，深入處理此領域內的課題並非本課程的重點。

學習單位「奇函數和偶函數」提供基礎知識協助學生理解涉及奇函數和偶函數的定積分的性質。學習單位「二項式定理」是證明學習單位「求導法」內的一些法則的基礎。學生須能運用數學歸納法證明命題。學習單位「續三角函數」介紹弧度法、三個新的三角函數和一些在學習微積分常用的三角公式。學生須理解弧度法在微積分中的重要性。學習單位「e 的簡介」幫助學生理解 e 和自然對數為重要的數學概念，特別是在微積分求導法及積分法中十分重要。

由於基礎知識與微積分和代數有很強的聯繫，教師應編排合適的教學次序以照顧學生的學習需要。例如，教師在教授 e 的定義時，可將學習單位「e 的簡介」融入學習單位「極限」中，使學習內容更為連貫。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
1. 奇函數和偶函數	1.1 認識奇函數和偶函數及它們的圖像	2

課程闡釋：

學生已在必修部分學習單位「函數及其圖像」學習函數的概念。在本學習單位中，學生須認識奇函數和偶函數的定義及其圖像。學習重點 10.2 中有部分定積分的性質涉及奇函數和偶函數的概念。但例如，奇函數 + 奇函數 = 奇函數和偶函數 + 偶函數 = 偶函數等奇函數和偶函數的性質則不屬課程所需。

學生須認識絕對值函數 $y=|x|$ 的定義及其圖像，並認識它是偶函數的一個例子。此外，在學習重點 9.2 中，公式 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 及其證明亦涉及絕對值函數的概念。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
2. 數學歸納法	2.1 理解數學歸納法原理	3

課程闡釋：

數學歸納法是證明數學命題的一個重要工具。在本學習單位中，學生須能運用數學歸納法證明與有限數列求和有關的命題。學生須理解數學歸納法的原理，懂得數學歸納法的步驟並能運用數學歸納法解決問題。運用數學歸納法證明與不等式和整除性有關的命題不屬課程所需。

教師可引導學生猜想一些有限數列求和的公式並讓學生驗證他們有關的猜想。教師應指出若已知一個命題對一些正整數為真，這仍然不足以保證該命題對所有正整數均為真。例如：當 n = 1、2、3、4 和 5 時，

命題 $1+3+5+...+(2n-1)=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ 成立。但該命題對其他正整數不為真。

當運用數學歸納法證明數學命題 $P(n)$ 對所有正整數 n 為真時，學生須注意在數學歸納法原理中以下兩個步驟的重要性：

(1) 證明 $P(1)$為真。

(2) 證明對任意正整數 k，若 $P(k)$為真，則 $P(k+1)$亦為真。

教師可運用反例闡釋若不能完成上述其中一個步驟時，我們不能證明命題 $P(n)$對所有正整數 n 均為真，例如：

(a) 對於任意正整數 n，$1+2+3+...+n=\frac{1+n}{2}$ 。

(b) 對於任意正整數 n，$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}+2$ 。

在例(a)中，雖然可以完成第 1 個步驟，但不能完成上述的第 2 個步驟，所以不能運用數學歸納法證明 $P(n)$對於任意正整數 n 均為真。

在例(b)中，雖然可以完成第 2 個步驟，但由於 $P(1)$不為真，所以不能運用數學歸納法證明 $P(n)$對於任意正整數 n 均為真。

學生已在必修部分學習單位「等差數列與等比數列及其求和法」學習等差和等比數列的求和公式。學生可嘗試運用數學歸納法來證明有關公式。

學生須能運用數學歸納法證明學習單位 3 中的二項式定理。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
3. 二項式定理	3.1 以二項式定理展開指數為正整數的二項式	3

課程闡釋：

學生已在第三學習階段學習整數指數定律、多項式的運算和恆等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。在這學習單位介紹二項式定理時，教師可讓學生認識到，當 n 很大時，運用在第三學習階段所學的方法展開 $(a+b)^n$，運算會變得非常繁複。

學生須能運用在學習單位 2 的數學歸納法證明二項式定理。

為使二項展式的表達更加簡潔，學生須認識求和記法（Σ）：

$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$，其中 n 為正整數。

學生亦須認識關係式：$\sum_{i=1}^{n} a = na$ 和 $\sum_{r=1}^{n}(ax_r \pm by_r) = a\sum_{r=1}^{n} x_r \pm b\sum_{r=1}^{n} y_r$，其中 a、b 為常數。

由於二項式定理是屬於基礎知識內的學習單位，涉及這定理的有關問題和例子應簡單和直接。因此，以下內容不屬課程所需：

- 三項式的展開
- 最大係數、最大項和二項式係數性質
- 求近似值的應用

在學習單位 7 中，學生從基本原理證明公式 $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ 時須能運用二項式定理，其中 n 為正整數。

此外，教師可向學生介紹以下的歷史事實：

帕斯卡於 1654 年出版的《算術三角論》介紹二項式係數的三角形排列方法及其應用。因此，一般稱這個三角形的排列方法為帕斯卡三角。事實上，早於 13 世紀，中國數學家楊輝在他的著作《詳解九章算術》(1261) 已展示相同的三角形，並指出「賈憲用此術」。故此，這個三角形的排列方法亦稱為「楊輝三角」或「賈憲三角」。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
4. 續三角函數	4.1 理解弧度法的概念 4.2 理解餘割函數、正割函數和餘切函數 4.3 理解正弦、餘弦、正切函數的複角公式、二倍角公式及正弦、餘弦函數的和積互化公式	15

課程闡釋：

在單元二，學生須能以弧度表示角的大小並能進行弧度與角度之間的轉換。在學習單位 6 和 7 中，教師可解釋學習弧度法在推導公式 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 和求三角函數導數時的意義。

學生已在必修部分學習單位「續三角學」學習正弦、餘弦和正切這些三角函數及其圖像和性質(包括極大值、極小值和週期性)。在本學習單位中，學生須理解另外三個三角函數，即餘割函數、正割函數和餘切函數的定義及兩個相關恆等式：$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 和 $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$。學生亦須能運用這些恆等式簡化其他三角數式。

學生須理解以下的公式：

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
- $\sin 2A = 2\sin A \cos A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

- $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$
- $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

此外，教師可介紹亞歷山大的克勞狄烏斯・托勒密(約公元 100 年－170 年)所構作的弦表與複角公式之間的關係和弦表中主要運用的定理為托勒密定理，而此定理是必修部分進階學習單位中一個可探究的課題。

學生會發現 $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$、$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$ 與和積互化公式是計算積分時的重要工具。

學生已在必修部分學習單位「續三角學」學習解簡易三角方程，其中答案限於 0° 至 360°。在此，學生亦須能解三角方程，其中答案限於 0 至 2π 而此內容可應用到解學習重點 8.4 內有關極值的問題。

輔助角的形式不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
基礎知識		
5. e 的簡介	5.1　認識 e 和自然對數的定義及其記法	2

課程闡釋：

學生會發現在本學習單位所學習的 e 和自然對數在微積分的學習中有重要的意義。學生已在必修部分學習單位「指數函數與對數函數」學習指數函數、對數函數和它們的圖像。在本學習單位中，學生須理解指數函數 e^x 和自然對數函數 $\ln x$。

教師可用不同方法介紹 e。例如：

(1) $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

學生須認識當 n 的值增加時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 會愈來愈接近一個數而那個數就是 e。

當學生學習極限的概念後，應認識 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。然而，證明 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的存在不屬課程所需。

教師可讓學生利用計算機或試算表，求 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的近似值。此外，教師亦可使用動態數學軟件繪製 $y = (1+\frac{1}{n})^n$ 的圖像以協助學生觀察當 n 增加時的 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的趨勢並估計 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的值。

學生須認識 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$，並可將 $x = 1$ 代入這個數式以求 e 的近似

值。

學生須認識自然對數函數具有必修部分學習單位「指數函數與對數函數」中對數函數的所有性質。換底公式在微積分求導法中求不同底的對數函數的導數是重要的。

因本學習單位可能涉及極限概念，本學習單位的教授可安排在教授學習重點 6.1 之前。

微積分

微積分由六個有關極限、求導法（或稱「微分法」）和積分法及其應用的學習單位組成。

在學習極限和求導法前，學生須掌握函數的概念、圖像及性質。函數極限是微積分的一個重要部分，透過函數極限的知識，學生可理解函數導數的概念及求導法有關的法則。在求導法的應用中，學生須能解關於變率、極大值及極小值等應用題。

不定積分與求導法有一個互逆的聯繫，而微積分基本定理將這兩個表面上不同的概念連繫起來。在這階段，定積分的應用則集中於求平面圖形的面積和旋轉體的體積。學生更可欣賞如何使用定積分來計算一些由非直線所組成的圖形面積，例如圓面積等。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
6. 極限	6.1 理解函數極限的直觀概念 6.2 求函數的極限	3

課程闡釋：

學生已在必修部分學習單位「函數及其圖像」和「續函數圖像」學習不同函數的概念和圖像。動態數學軟件在探究函數圖像時是十分有用的。函數極限是微積分的一個重要部分。學生須以代數方法和函數圖像理解函數極限的直觀極念。教師可利用動態數學軟件幫助學生掌握相關概念。但須注意，函數極限的嚴格定義不屬課程所需。

學生須認識對某些函數 $f(x)$，當 x 趨向 a 時，$f(x)$ 的極限可能不存在，諸如函數 $f(x)=\frac{1}{x}$，當 x 趨向 0 時，$f(x)$ 的極限不存在。

從函數的圖像區分連續函數和不連續函數不屬課程所需。

學生須認識有關函數的和、差、積、商、純量乘法極限和複合函數極限的定理，但其證明不屬課程所需。學生亦須認識這些定理所需的條件，例如，學生須認識如果定理 $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$ 成立須預設 $\lim_{x\to a}f(x)$ 和 $\lim_{x\to a}g(x)$ 同時存在。

另一方面，教師可以要求學生舉出 $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$ 不成立的例子。

在本學習單位中，教師應介紹複合函數的概念。

學生須能把諸如 $\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ 與 $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)$ 的數式互相轉化。教師可在這學習單位中當計算諸如 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ 、$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{5}}$ 和 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{x}$ 等時介紹上述有關數式互相轉化的方法。

學生須能運用兩個重要的公式 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (θ是以弧度為單位)和 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 求三角函數的導數和指數函數的導數。

教師可用不同的方法，例如運用圖像或動態數學軟件等方法解釋上述兩個公式成立的理由。

此時，學生須能求有理函數在無窮大時的極限。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
7. 求導法	7.1 理解函數導數的概念 7.2 理解求導法的加法法則、積法則、商法則及鏈式法則 7.3 求包含代數函數、三角函數、指數函數和對數函數的函數之導數 7.4 以隱函數求導法求導數 7.5 求顯函數的二階導數	13

課程闡釋：

學生已在學習單位 6 學習函數極限的概念。在本學習單位中，學生須理解：給定函數 $y=f(x)$，若 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，則此極限定義為 $y=f(x)$ 在 x 的導數。同時，學生須能運用函數 $y=f(x)$ 的圖像來解釋函數 $y=f(x)$ 在 x 的導數是當 Δx 趨向 0，通過 $(x, f(x))$ 和 $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ 的割線斜率的極限。教師亦應介紹曲線的切線的概念。

學生須能從基本原理求初等函數的導數，例如，常數函數、x^n (其中 n 為正整數)、$\sqrt{x}$、$\sin x$、$\cos x$、e^x 和 $\ln x$ 等。他們亦須能運用諸如互相轉化數式 $\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}$ 與 $\frac{-\Delta x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}}$ 的方法從基本原理求函數 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的導數。學生須能從基本原理並運用二項式定理證明 $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$，其中 n 為正整數。學生亦可運用數學歸納法證明此公式。

學生須認識導數的記法：y'，$f'(x)$ 和 $\frac{dy}{dx}$。

判別函數的可導性不屬課程所需。

學生須理解加法法則、積法則、商法則和鏈式法則，及能運用這些法則求函數的導數。

法則包括：

- 加法法則：$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$
- 積法則：$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$
- 商法則：$\frac{d}{dx}(\frac{u}{v})=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
- 鏈式法則：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

教師可選用諸如 $\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{dx}=\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{d\left(\sin x\right)}\cdot\frac{d\left(\sin x\right)}{dx}=2\sin x\cos x$ 等適當的例子以助學生理解鏈式法則。

學生須理解以下的公式：

- $(C)'=0$
- $(x^n)'=nx^{n-1}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\tan x)'=\sec^2 x$
- $(e^x)'=e^x$
- $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

學生須能運用以上的法則和公式求包含代數函數、三角函數、指數函數和對數函數的函數之導數。代數函數須包括以下函數：

- 多項式函數
- 有理函數

- 冪函數 x^{α}
- 由上述各函數的加、減、乘、除和複合而成的其他函數，諸如 $\sqrt{x^2+1}$

當求諸如 $y=\log_2 x$ 等底不是 e 的對數函數的導數時，學生須能運用必修部分學習單位「指數函數與對數函數」所學的換底公式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_2 x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x\ln 2}\text{ 。}$$

學生須能運用隱函數求導法求導數。方程諸如 $x^3-3xy+y^3=3$ 和 $x=y+y^2$ 可作為說明運用隱函數求導法求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子。對一些方程，y 是不容易或不可能以 x 表示 y。若目的只是求導，學生不須一定要以 x 表示 y。

學生須能運用對數求導法的技巧求諸如 $y=(x^2+2)(3x-2)^2(4x+5)^6$ 和 $y=\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^4$ 等函數的導數。

學生須能求顯函數的二階導數並認識記法：y''、$f''(x)$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。學生須能運用函數 $f(x)$ 的二階導數判別該函數的圖像在 $a\le x\le b$ 的凹性。在學習重點 8.2 中，二階導數對判別函數的凹性和求函數的極值是十分有用的。

三階及更高階的導數不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
8. 求導法的應用	8.1 求曲線的切線方程 8.2 求函數的極大值和極小值 8.3 描繪多項式函數及有理函數的曲線 8.4 解與變率、極大值和極小值有關的應用題	14

課程闡釋：

學生已在必修部分學習求直線方程。在學習重點 8.1 中，學生不單須能找出曲線上一點的切線方程，亦能求曲線外一點至曲線的切線方程。

學生已在必修部分學習單位「函數及其圖像」學習運用圖解法和代數方法求二次函數的極大值和極小值。在本學習單位中，學生須能運用求導法求其他函數的極大值和極小值。

學生須理解函數遞增、遞減和凹性的概念並能運用有關概念求函數的極大值和極小值。

學生須能運用一階導數和二階導數判斷函數的轉向點是極大點或極小點並求函數的局部極值（即是局部極大值和局部極小值）和全局極值（即是全局極大值和全局極小值）。若 $f''(x_0)=0$，二階導數不適用於判別在 $x=x_0$ 的極值。在這情況下，學生須採用一階導數求函數的極值。

學生須能描繪多項式函數及有理函數的曲線。當描繪曲線時，學生須注意：

- 曲線的對稱性
- x 值和 y 值的限制
- 曲線與兩軸的截距
- 極大點和極小點

- 拐點
- 曲線的垂直、水平和斜漸近線

學生須能運用二階導數判別函數的凹性，並使用這些性質求曲線上的拐點。學生可利用動態數學軟件探索曲線上拐點的切線是否可以是水平或斜的。對於能力較佳的學生，教師還可進一步討論曲線上拐點的切線是否可以是垂直的。

學生應注意到當描繪函數的曲線時，他們不一定須要考慮上述所有的特徵。

求有理函數的斜漸近線方程有可能涉及長除法。教師教授這學習重點前，可鞏固學生在必修部分學習單位「續多項式」中的有關多項式除法的知識。

教師應注意在學習重點 8.4 中，學生須解與變率、極大值和極小值的應用題，其中須包括涉及位移、速度和加速度的應用題。

如果應用題涉及其他學科的用語，則須在問題中提供該用語的定義，而這些用語並非在學習重點 8.4 中的「位移」、「速度」和「加速度」。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
9. 不定積分法及其應用	9.1 認識不定積分法的概念 9.2 理解不定積分的性質及運用代數函數積分公式、三角函數積分公式和指數函數積分公式求不定積分 9.3 理解不定積分在數學情境的應用 9.4 運用代換積分法求不定積分 9.5 運用三角代換法求含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 、 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 或 $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ 形式的不定積分 9.6 運用分部積分法求不定積分	15

課程闡釋：

學生須認識不定積分是求導法的逆運算。

學生須認識不定積分的記法為：$\int f(x)dx$ 和關係式 $\int f(x)dx = F(x)+C$ 並理解這關係式中積分常數 C 的意義。

學生須認識「被積函數」、「原函數」和「積分常數」等名詞。

學生須認識不同方法計算不定積分可得出看似不同答案，諸如

$\int (x+1)^2 dx = \int (x^2+2x+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C_1$ 和

$\int (x+1)^2 dx = \int (x+1)^2 d(x+1) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_2$ 。

學生須理解以下不定積分的性質：

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，其中 k 為常數
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

學生須理解並能運用以下公式求不定積分：

- $\int k\ dx = kx + C$，其中 k 和 C 為常數。
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$，其中 $n \neq -1$。
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

學生須理解涉及不定積分在諸如幾何學方面等數學情境的應用。如果應用題涉及其他學科的用語，則須在問題中提供該用語的定義，而這些用語並非在學習重點 8.4 中的「位移」、「速度」和「加速度」。

學生須能運用代換積分法求不定積分。

學生須能運用三角代換法求含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$、$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 或 $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ 形式的不定積分，並認識記法：$\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 和 $\tan^{-1} x$ 和它們主值的概念。被積函數包括 $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 和 $\tan^{-1} x$ 的積分不屬課程所需。

學生須能運用分部積分法求不定積分。教師可利用 $\int \ln x\, dx$ 作例子解釋分部

積分法。須注意在單元二求一個積分時只限使用最多兩次分部積分法。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
10. 定積分法	10.1 認識定積分法的概念 10.2 理解定積分的性質 10.3 求代數函數、三角函數和指數函數的定積分 10.4 運用代換積分法求定積分 10.5 運用分部積分法求定積分	10

課程闡釋：

學生須認識定積分作為和的極限及由此定義求定積分。學生須認識記法：$\int_a^b f(x)dx$ 和啞變量的概念，例如 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$。以定積分法求無窮數列之和不屬課程所需。

學生須理解以下定積分的性質：

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$，其中 k 是常數
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- 若 $f(x)$ 為奇函數，則 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$。
- 若 $f(x)$ 為偶函數，則 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$。

教師可和學生探討這些性質的幾何意義。

當定積分 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 中的 $f(x)$ 涉及絕對值且為奇函數或偶函數時，學生可運用偶函數和奇函數定積分的性質得出諸如：

$\int_{-3}^{3} x|x|\,dx = 0$，其中 $y = x|x|$ 為奇函數。

求其他涉及絕對值的被積函數的定積分，則不屬課程所需。

當運用代換積分法計算定積分時，學生須能相應地改變定積分的上限和下限。

學生須認識微積分基本定理並透過這定理認識定積分和不定積分的關係：

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$，其中 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$。

教師可介紹微積分基本定理的證明。

學生須能運用分部積分法求定積分，但求一個積分時最多運用分部積分法兩次。

學習單位	學習重點	時間
微積分		
11. 定積分法的應用	11.1 理解以定積分求平面圖形面積的應用 11.2 理解以定積分求沿坐標軸或平行於坐標軸的直線旋轉而成的旋轉體體積的應用	4

課程闡釋：

在本學習單位中，定積分的應用只限於求平面圖形面積和旋轉體體積。教師可以幾何方法表示定積分和平面圖形面積之間的關係。

學生須理解及能運用圓盤法求旋轉體體積，其中須包括求諸如以曲線 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=e^{-x^2}$，其中 $1\le x\le 2$，圍成的面積沿 y 軸旋轉而成的旋轉體體積。運用外殼法求旋轉體體積不屬課程所需。

為使學生欣賞定積分法的應用，教師可引導學生運用定積分法推導圓面積、直立圓錐體體積和球體體積公式。

代數

代數內容包括行列式、矩陣、線性方程組及向量。

學生須理解矩陣的概念、運算及性質、逆矩陣的存在及行列式。行列式是研究矩陣性質的重要工具。

學生已在第三學習階段學習運用代數方法和圖像法解聯立二元一次方程。在單元二，學生須認識相容（有解）和不相容（無解）的概念並進一步探究線性方程組相容性或不相容性的條件。他們須能運用克萊瑪法則、逆矩陣和高斯消去法解線性方程組。教師應讓學生知道每一個方法的強項與弱項及如何選擇合適的方法解題。

為進一步延伸學生在代數的知識，在這階段向學生介紹向量的概念、運算及性質。純量積和向量積是研究幾何性質包括平行和正交的兩個重要工具。此外，學生亦須能運用向量方法求得兩向量的交角和三角形或平行四邊形的面積等。

學習單位	學習重點	時間
代數		
12. 行列式	12.1 認識二階及三階行列式的概念	2

課程闡釋：

行列式是在隨後的兩個學習單位中學習矩陣和線性方程組的重要先備知識。

教師應強調行列式在單元二的主要應用在求逆矩陣和解線性方程組。

學生須認識諸如以下二階和三階行列式的定義：

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

- 利用 $\begin{matrix} & & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ & & & + & + & + \end{matrix}$ 方法表示三階行列式如下的結果：

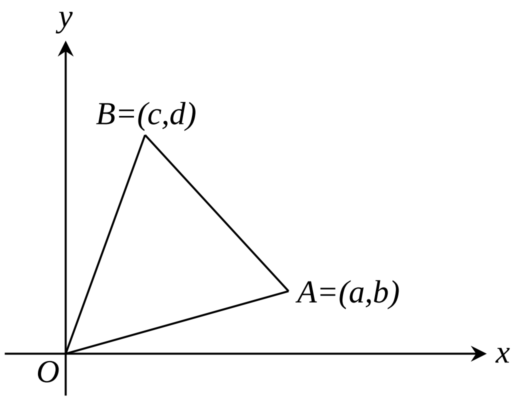
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

教師可向學生解釋以上三種三階行列式的定義是相同的。

學生須認識 $|A|$ 和 $\det A$ 為矩陣 A 的行列式的兩個常用記法。

教師可向學生介紹行列式的一些幾何上的應用，例如：

如下圖，OAB 為一經過原點 O 的三角形，其中 $A=(a,b)$，$B=(c,d)$，而 O、A 和 B 則按逆時針方向排列。



$$\text{三角形 } OAB \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\text{。}$$

行列式的性質不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
代數		
13. 矩陣	13.1 理解矩陣的概念、運算及其性質 13.2 理解二階及三階方陣逆矩陣的概念、運算及其性質	10

課程闡釋：

學生須理解矩陣的一般形式，有 m 行和 n 列的矩陣稱「$m \times n$ 矩陣」。學生須能對矩陣進行加法、減法、純量乘法和乘法及理解以下性質：

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $A(BC)=(AB)C$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)C=AC+BC$
- $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)AB$
- $|AB|=|A||B|$

學生須理解矩陣乘法的不具交換性質，即 AB 不一定等於 BA。

$|AB|=|A||B|$，其中 A 和 B 為 n 階方陣的一般證明不屬課程所需。然而，對於二階行列式的情況，其證明較為容易，教師可與學生進行較深入的討論。

學生須認識「零矩陣」、「單位矩陣」、「轉置矩陣」和「方陣」這些名詞。學生須理解二階和三階方陣逆矩陣的概念、運算及以下性質：

- A 的逆矩陣是唯一的
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

其中 A 和 B 為可逆矩陣，λ 為非零純量。

學生須能判斷方陣的是否可逆，並能求可逆矩陣的逆矩陣，例如使用伴隨矩陣和基本行運算等方法以求得逆矩陣。此外，在某些情況下，學生亦可能須要使用數學歸納法來證明一些有關涉及矩陣的命題。

學生在判斷 2×2矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是否可逆時，可考慮解以 x, y, z及 w為未知數的矩陣方程 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

學習單位	學習重點	時間
代數		
14. 線性方程組	14.1 以克萊瑪法則、逆矩陣和高斯消去法解二元和三元線性方程組	6

課程闡釋：

學生已在第三學習階段學習運用代數方法和圖像法解二元一次方程。在這學習單位中，學生須能運用克萊瑪法則、逆矩陣和高斯消去法解二元和三元線性方程組，並須認識「齊次」、「非齊次」、「相容」和「不相容」等名詞。

克萊瑪法則是行列式中一個重要的課題。學生須認識到，由克萊瑪法則，對於線性方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，若 Δ 為係數矩陣的行列式，其中 $\Delta \neq 0$，方程組有唯一解。若 $\Delta=0$，則不能使用克萊瑪法則。教師可與學生討論 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 與以下等式的邏輯關係：

$\Delta \cdot x = \Delta_x$，$\Delta \cdot y = \Delta_y$ 及 $\Delta \cdot z = \Delta_z$ (*)。

例如：

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解是否必然是(*)的解？

(*)的解是否必然是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解？

Δ_x 是以列矩陣 **b** 取代係數矩陣的第一列而得出的行列式；Δ_y 是以列矩陣 **b** 取代係數矩陣的第二列而得出的行列式；Δ_z 是以列矩陣 **b** 取代係數矩陣的第三列而得出的行列式。此外，學生須認識以下的一些結論：

情況	條件	結論
1	$\Delta \neq 0$	方程組有唯一解。
2	$\Delta = 0$ 及其中最少須須 Δ_x，Δ_y 或 $\Delta_z \neq 0$	方程組沒有解。
3	$\Delta = 0$ 及 $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$	方程組沒有解或有無限多個解。

在情況 1 中，方程組有唯一解及 $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$。

在情況 2 中，由於已知條件與(*)互相予盾，故方程組沒有解。

在情況 3 中，可利用以下例子解釋方程組沒有解或有無限多個解。

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \quad (\text{沒有解}) \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \quad (\text{無限多個解}) \\ 3x+3y+3z=9 \end{cases}$$

矩陣是解線性方程組的另一個重要的工具。利用學習單位 13 所得知識，學生須能以矩陣形式表示線性方程組。若係數矩陣的逆矩陣存在，可運用逆矩陣方法解線性方程組。學生須認識在逆矩陣不存在時，這方法失效。

學生亦須能運用高斯消去法解線性方程組。藉著建立增廣矩陣，利用基本行運算解線性方程組。

、

教師可藉著解線性方程組，展示矩陣、行列式和基本行運算之間的聯繫。

學生須理解：一個齊次二元或三元線性方程組有非平凡解當且僅當它的係數矩陣為奇異矩陣。教師可運用一些簡單齊次二元線性方程組引導學生發現此定理。學生亦須理解一個齊次二元或三元線性方程組必定相容，且知道若它的係數矩陣為奇異矩陣時如何找出其非平凡解。

學習單位	學習重點	時間
代數		
15. 向量的簡介	15.1 理解向量及純量的概念 15.2 理解向量的運算及其性質 15.3 理解向量在直角坐標系統的表示法	5

課程闡釋：

在本學習單位中，教師應強調模和方向是向量兩個重要的概念。教師應向學生解釋純量和向量的不同之處。在討論向量的性質時，向量只限於 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$。學生須理解零向量、單位向量、相等向量和負向量的概念。

學生須認識印刷時採用的向量記法(包括 $\mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{AB}$)以及書寫時採用的記法(包括 $\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 和 $\underset{\sim}{a}$)和表示向量的模的記法(包括 $|\mathbf{a}|$ 和 $|\vec{a}|$)。

學生須理解向量的加法、減法和純量乘法的概念，並理解以下有關向量的性質：

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
- $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$
- $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$
- $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$
- 若 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b}$ (當中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 為非零並且互相不平行的向量)，則 $\alpha=\alpha_1$ 及 $\beta=\beta_1$。

教師可運用向量在直角坐標系統的表示法來討論以上的向量性質。

教師應介紹方向分別與正 x 軸、正 y 軸和正 z 軸相同的單位向量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$。學生須能分別以 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ 和 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 表示任何在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 的向量。學生須理解以下公式：

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，當 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 。

2. $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 和 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， 當中 θ 是非零向量 $\overrightarrow{OP}$ 與正 x 軸的交角，而 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$。

3. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，其中 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 。

方向餘弦的概念不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
代數		
16. 純量積與向量積	16.1 理解向量的純量積（點積）的定義及其性質 16.2 理解在 $\mathbf{R}^3$ 中向量的向量積（叉積）的定義及其性質	5

課程闡釋：

學生須理解向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的純量積的定義及以下性質：

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
- $\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
- $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2\geq 0$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$ 當且僅當 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\geq|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

教師可採用以下其中一個定義介紹向量積：

(1) 對於兩個在 $\mathbf{R}^3$的非零及互不平行的向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$，其中 θ 為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之間的交角($0°<\theta<180°$)，$\hat{\mathbf{n}}$ 是一個與 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均正交（垂直）的單位向量，且 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 滿足右手定則。否則，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$。

(2) 若向量 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$，

則 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$。

學生須理解以行列式表示向量積：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$。

學生須理解以下向量積的性質：

- $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$
- $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
- $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
- $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
- $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$

教師應提醒學生在學習重點 16.2 中，所有關於向量的討論只限於 $\mathbf{R}^3$。

教師應在本學習單位和學生討論純量積和向量積的幾何意義，並在學習單位 17 中強調純量積和向量積的幾何應用。

純量三重積的定義及其性質和「平行六面體」一詞均不屬課程所需。

學習單位	學習重點	時間
代數		
17. 向量的應用	17.1 理解向量的應用	6

課程闡釋：

學生已在第三學習階段學習在直角坐標系統下兩線平行和垂直的條件。在本學習單位中，學生須能運用向量的性質來解決涉及平行和正交的問題。

例如：若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 為非零向量，

1. $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ 其中 λ 為實數，當且僅當 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相平行。
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 當且僅當 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 正交。
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$ 當且僅當 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相平行。

學生亦須能運用向量的概念解涉及線段的分割和一個向量至另一向量的投影的問題。此外，學生須能運用純量積和向量積分別求為兩向量之間的夾角（或稱「交角」）和三角形或平行四邊形的面積。

學習單位	學習重點	時間
進階學習單位		
18. 探索與研究	通過不同的學習活動，發現及建構知識，進一步提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力	7

課程闡釋：

本學習單位旨在提供更多學習空間，讓學生在學習其他學習單位的內容時，能參與更多有助發現及建構知識、提高探索、溝通、思考和形成數學概念的能力之活動。換句話說，這並非一個獨立和割裂的學習單位，活動可在課堂中引起動機、發展、鞏固或評估等不同環節進行。

鳴 謝

我們特別向下列委員會及工作小組的委員致謝，多謝他們對本小冊子所提供的寶貴意見和建議。

課程發展議會數學教育委員會

課程發展議會 – 香港考試及評核局數學教育委員會

檢視中學數學課程專責委員會（高中延伸部分／選修科）

課程發展議會 – 香港考試及評核局高中數學課程（單元二）工作小組

(空白頁)