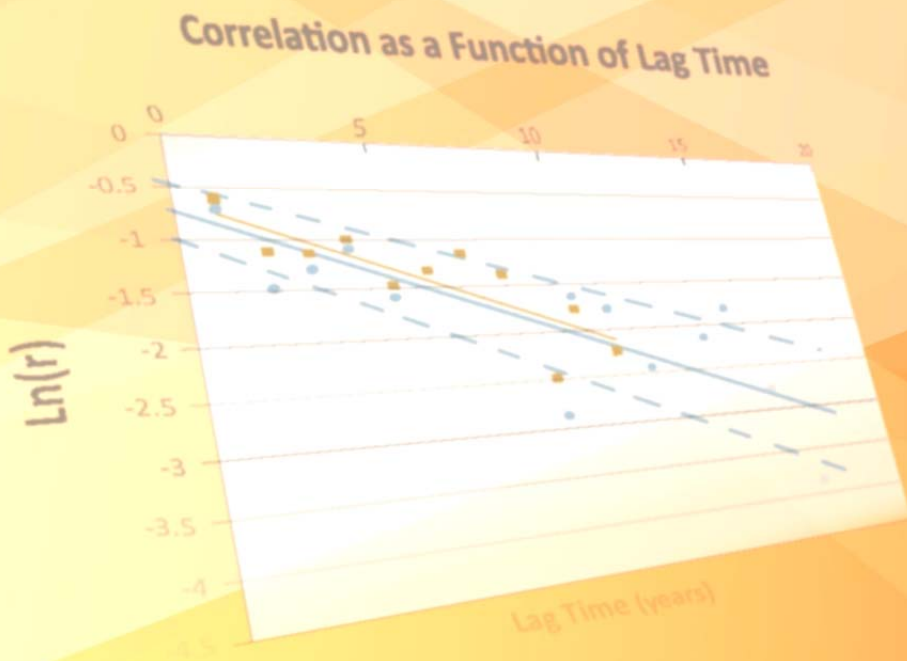


數學百子櫃系列（十三）

2011/12 中學生統計創意寫作比賽

作品集



教育局
課程發展處數學教育組

版權

©2012 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8123-97-1

編者的話

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於2007年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，以及蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《2011/12 中學生統計創意寫作比賽作品集》，是這個系列的第十三冊。本書輯錄的文章，大部分是「2011/12中學生統計創意寫作比賽」的優勝作品，由參賽的中學生撰寫。

統計與我們日常生活關係密切，我們每天都有機會接觸不同的數據，例如公司營業額、市場佔有率、客戶滿意度、電台收聽率和品牌知名度等。本書以趣味故事為藍本，透過統計創意寫作，以簡單的語言輕鬆地介紹概率及統計的常識。

本書共有 14 篇文章，第 1 至 8 篇為「2011/12中學生統計創意寫作比賽」的冠、亞、季和優異作品。其餘 6 篇則為邀請作品，分別由政府統計處的統計師，數學教育組的借調教師及課程發展主任，以及香港大學統計及精算學系的教授撰寫。每篇文章沒有關聯，讀者們可隨意選讀。讀者閱讀本書後，期望能對統計知識有所增加，以助

正確解讀統計數據。

此書得以順利出版，實有賴這次比賽的籌備委員會成員所付出的努力。在此，謹向撰寫作品的得獎隊伍、政府統計處的統計師、香港大學精算及統計學系的教授和數學教育組的同工致以衷心的感謝。最後，更要多謝這次比賽的籌備委員會主席楊良河博士和評審委員會首席評審員張家俊博士，兩位鼎力協助，審訂本書的內容，讓學生能夠閱讀更多有趣的文章，提升他們學習統計的興趣。

如對本書有任何意見或建議，歡迎以郵寄、電話、傳真或電郵方式聯絡教育局課程發展處數學教育組：

九龍油麻地彌敦道405號九龍政府合署4樓

教育局課程發展處

總課程發展主任(數學)收

(傳真: 3426 9265 電郵: ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處

數學教育組

前言

香港統計學會一直致力向社會各界推廣對統計的認知。除了每年與教育局合辦「中學生統計習作比賽」，以鼓勵同學透過團隊合作形式學習正確運用統計數據及增進對社會的認識外，我們於2009年再與教育局合作創辦「中學生統計創意寫作比賽」(SCC)。

回顧過往兩年的比賽，或許概率較容易於生活上應用，大部分的作品都把概率應用在不同的生活課題上。至於統計範疇方面的作品，選題上大多偏於基本統計學的量度或是統計的應用及誤用而少有回歸和相關性這類的作品。因此，籌委會在今屆比賽加入了新的元素，新增了最佳專題寫作獎，指定了「相關性」為專題題目，鼓勵同學在相關性這課題上發揮創意。

當然，同學們也不負所望，獲得最佳專題寫作獎的作品更是本屆的亞軍作品，而季軍作品亦是與相關性有關的題目，可見參與專題寫作的作品的質素不比其他課題的差。同學們除了掌握到相關性的統計知識外，亦充分發揮了其創意。

繼承以往的優良成績，今屆的SCC收到 68 份參賽作品，當中不乏精彩之作。本書輯錄今屆所有得獎作品，藉此嘉許得獎同學付出的努力。

籌備委員會主席 楊良河博士

2012年9月25日

序言

是次「中學生統計創意寫作比賽」共收到近 70 份參賽作品，經由教育局、政府統計處和香港大學統計及精算系內從事統計工作及教育的專業人士所組成的評審團進行評審。評審標準主要為創意和趣味性，及對統計知識的闡釋和正確應用。我謹此鳴謝一眾評審團成員，感激他們公正嚴謹地為我們選出優勝作品。

本書輯錄了今屆所有的得獎作品。能夠從芸芸參賽作品中脫穎而出，這些優勝作品都有其過人之處。文章取材創新，趣味盎然；同學能活學活用各種統計和概率的知識，分析有條理，見解獨到，言之有物。中學生能有這樣的水平，實在難能可貴，值得欣喜和嘉許。希望同學能夠從創作或閱讀這些得獎作品中得到啟發，對統計的知識及其運用有更深入和正確的理解。

評審委員會首席評審員 張家俊博士

2012年9月10日

目錄

編者的話.....	iii
前言.....	v
序言.....	vii
冠軍作品: 「級」「級」可危.....	1
亞軍作品: 不一樣的滿意度分析.....	13
季軍作品: 選科大作戰.....	29
優異作品: 中學排名 點先公平? !	41
優異作品: 誰是真正第一?	57
優異作品: 包剪揼分勝負?	70
優異作品: 「分」數陷阱.....	88
優異作品: 熱咖啡的統計學.....	101
邀請作品: 從相關性走到因果關係.....	120
邀請作品: 低糖誘惑—淺談假設檢定.....	130
邀請作品: 用心良苦的數學老師.....	135
邀請作品: 票房好的電影.....	139
Invited Article: Musical Dice Game.....	147
Invited Article: Dependence in the “Tail”	156

冠軍作品：「級」「級」可危

學校名稱：宣道會鄭榮之中學

學生姓名：周鈺喬、陳凱妍、區俊傑

級別：中四

顧問老師：朱吉樑

引言

自從巴士公司引入了新型號的巴士後，香港路上出現了直樓梯巴士。近年因為巴士樓梯引起的意外有上升的趨勢，令公眾對直樓梯和螺旋樓梯巴士的安全性有質疑。到底哪種樓梯比較危險呢？我們決定要以統計的方法找出答案。



森巴公司正在招聘年青有為的人才加入公司的管理層工作，在千挑萬選後，最後有兩名實力不相伯仲的應徵者晉身終極的面試對決。

兩名應徵者自信地步入面試室，面對著森巴公司的總裁依然沒有絲毫緊張。一名身材高挑的男子首先步入面試室，他跟總裁握一握手：「您好，我叫Samson。」尾隨的是一位身形略胖的男子，他也跟總裁握一握手：「您好，我叫Henry。」總裁說：「請坐下。這是應徵的最後階段，你們都是過五關斬六將才能留到最後的人才，但可惜我們只能挑選最優勝的一位坐上這個職位。經過一星期的準備，相信你們已經準備好了，現在可以說出你們的見解。」

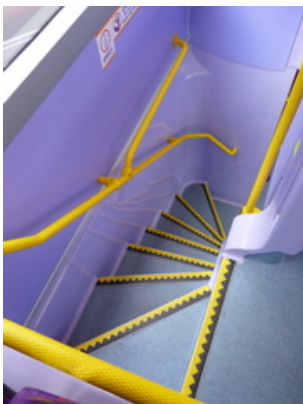
一星期前，總裁給了兩名應徵者一道題目：

新型號的直樓梯巴士是否比舊有的螺旋樓梯巴士危險？

兩名應徵者花了一星期的資料搜集和分析，各得出不同的結論。Henry毫不猶疑地說：「我認為直樓梯(見圖一)絕對比螺旋樓梯(見圖二)危險。請先看看這一份文件。這是



圖一：直樓梯



圖二：螺旋樓梯

本年二月一日立法會會議中，在議論「巴士車箱內意外」的一份附錄文件¹（見表一）。若單從意外宗數作比較，直樓梯巴士的意外宗數在2008年只是總意外數字的17%，直樓梯巴士看似意外較少。」

表一：2008 年及 2009 年森巴樓梯意外宗數

涉及巴士樓梯類型的意外宗數	2 008	2009
直樓梯	28	53
螺旋樓梯	136	118

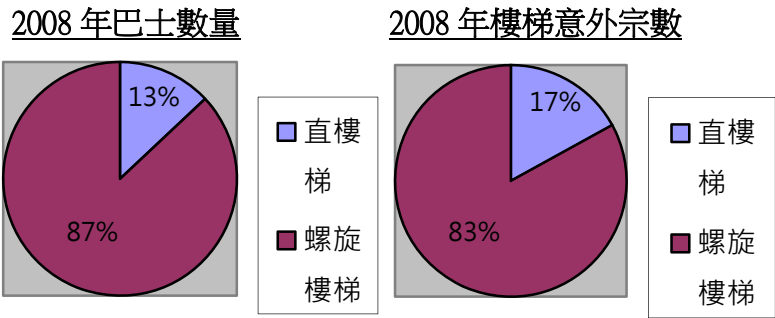
Henry 續說：「可是，根據森巴 2008 年年報²，2008 年底總共有 4000 部巴士，直樓梯巴士約佔 500 部，即佔車隊約 13%(見圖三)，但在樓梯意外中，假設直樓梯和螺旋樓梯的意外機會率是一樣的，若按照比率，直樓梯和螺旋樓梯的意外數字比率理論上應該約是 1：7 (13%：

¹ 以政府新聞資料庫「過去五年專營巴士非因車輛碰撞而乘客在巴士車廂內受傷意外宗數。」為藍本

網址：http://gia.info.gov.hk/general/201202/01/P201202010216_0216_89656.pdf

² 有關資料參考香港巴士大典：<http://hkbus.wikia.com/>

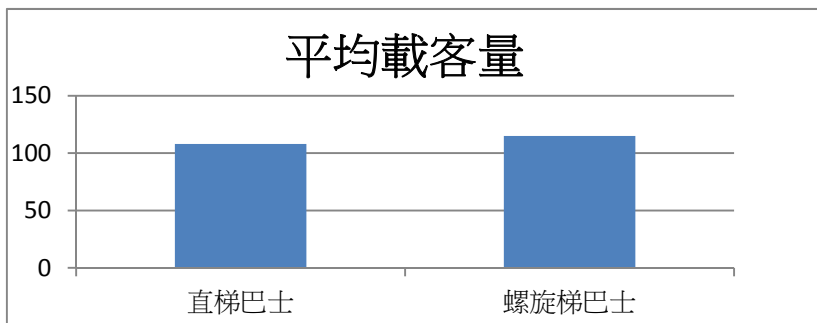
87%)(下稱為「理論意外比率」)，但 2008 年的意外數字比率卻大約是 1：5 (17%：83%) (見圖三) (下稱為「真實意外比率」)。你們看看下表(見表二)，直樓梯的意外比率實則上較理論為高，由此可見，直樓梯的意外機會率比螺旋樓梯高，也相對較危險。此外，棒形圖(見圖四)也顯示螺旋樓梯的平均載客量為 112 人，而直樓梯的平均載客量只有 108 人，按道理，載客量愈高，意外比率應更高，但現在比率反而較少，因此，我絕對認為直樓梯巴士比螺旋樓梯巴士更危險。」



圖三

表二：意外比率

	理論意外比率	真實意外比率
直樓梯 螺旋樓梯	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$



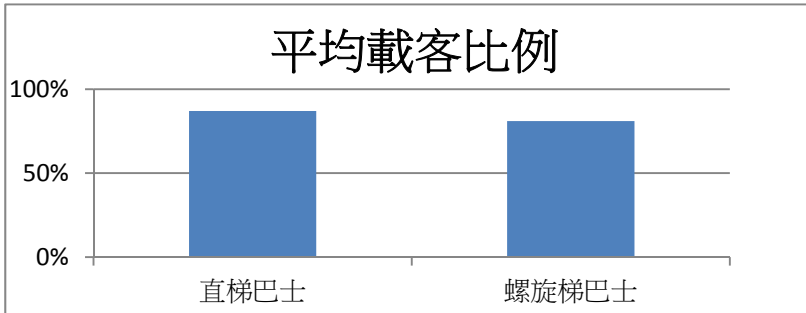
圖四

Samson 說：「我不認同 Henry 的說法。首先，由於直樓梯佔的空間較大，巴士的最大載客量只有 124 人，相比螺旋樓梯巴士的 139 人為少，若以載客的比例考慮，直樓梯巴士

($\frac{108}{124} \times 100\% = 87\%$) 反而比螺旋樓梯巴士

($\frac{112}{139} \times 100\% = 81\%$) 的乘客更多(見圖五)。而且由於

它是新型號，引入後多用作替換行走高客運量而耗損的舊型號巴士，因此直樓梯巴士大多行走於高客運量的路線，隨著距離和行車的時間增加，因而發生意外的機會率亦相對較大。根據森巴資料，行車里數最長日間線、日間單向線、通宵循環線均使用直樓梯巴士。以由聯和墟駛往東涌的深宵巴士為例，這為全港行車里數最長的通宵路線，全長 75.1km，全程最長行車時間為 100 分鐘。長的行車時間和里數及在晚間時段行駛等，均增加了直樓梯巴士整體意外的機會率。」



圖五

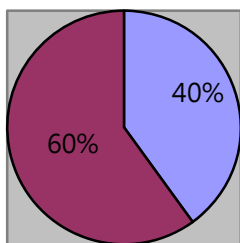
Samson 又說：「要真正比較兩者的意外情況，應找出類同的路線、距離和客量的巴士線，我在眾多路線中，找到約有 30 條類同的路線，我以下表(表三)概括了「類同情況」的意外數據。大家可以看一看在「類同情況」下的圓形圖比例(見圖六)與的意外比率(見表四)，你會看見「真實意外比率」為 $\frac{1}{9}$ ，相對以車輛數目考慮的

「理論比率」 $\frac{2}{3}$ 少了很多呢！其實直樓梯巴士相對螺旋樓梯巴士是較安全的呢！」

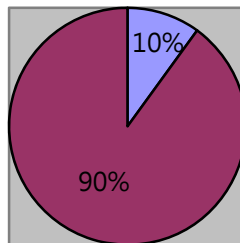
表三：類同情況下的巴士在 2008 年的意外數字

類型	巴士數量	意外次數
直樓梯巴士	80	4
螺旋樓梯巴士	120	36

2008 年巴士數量



2008 年樓梯意外宗數



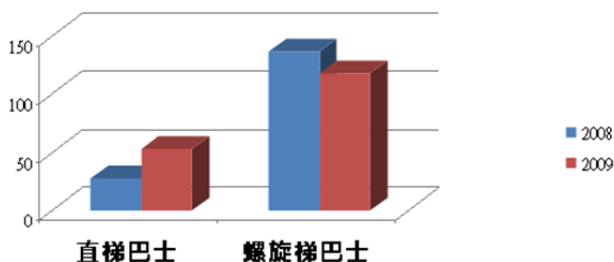
圖六

表四：類同情況下的巴士在 2008 年的意外比率

	理論意外比率	真實意外比率
$\frac{\text{直樓梯}}{\text{螺旋樓梯}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$

Henry 不憤地回應：「但你可以看見在 2009 年時，直樓梯巴士的意外數字正在上升，而螺旋樓梯巴士的意外數字則下跌(見圖七)。這不是正好代表直樓梯巴士不安全嗎？」

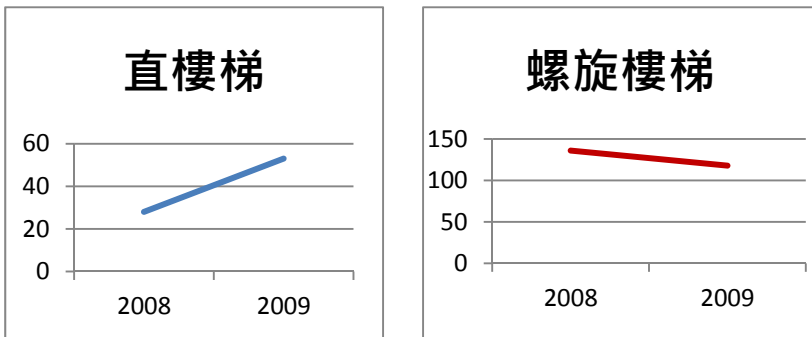
2008 至 2009 年巴士樓梯意外宗數



圖七

Samson 續說：「再看看這份附錄文件，我們發現到 2009 年涉及直樓梯巴士的數字不錯是由 28 上升至 53，共升了 89%，而螺旋樓梯的數字由 136 下降至 118，下跌了 13%。不過，原來 2008 年起，森巴公司需要為其下車齡達 17 年的空調巴士申請續牌及更替。並且，為了解決長遠換車問題，在 2009 年投入大量新型巴士，亦即是直樓梯巴士。」

Henry 不屑地說：「那 2008 年引入了新型號，亦即是多了直樓梯巴士，所以意外宗數字才於 2009 年升高了？你再看看以下兩幅折線圖(圖八)，直樓梯巴士的意外宗數由 2008 至 2009 的升幅近一倍，但螺旋梯巴士卻是有所下降。」



圖八

Samson 回應：「Henry，你單看數字的上升、下跌，但沒有留意巴士數量的改變。首先在

2009 年，直樓梯巴士的數量增加了一倍，由 2008 年的 500 輛增至 2009 年的 1000 輛，增加了的 500 輛正取代了舊有的螺旋樓梯巴士，所以數量由 3500 降至 3000。我們再看看「類同情況」下在 2008 – 2009 年的意外數字(表五)。你會發現直樓梯巴士的意外次數無疑是增加了，但你不要忘記，直樓梯巴士投入服務的數量也有增加呀！」

表五:「類同情況」下的巴士在 2008 至 2009 年的意外數字

	巴士數量		意外次數	
類型	2008	2009	2008	2009
直樓梯巴士	80	120	4	6
螺旋樓梯巴士	120	80	36	32

Samson 續說：「讓我們看一看在「類同情況」下，理論比率與真實比率的改變吧(見表六)！在 2008 年真實的比率較理論比率相差了

$$83\% \left(\frac{\frac{1}{9} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \times 100\% \right), \text{ 而在 2009 年更相差了 } 88\%。$$

即意外率再減少了呢！」

表六：「類同情況」下的巴士在 2008 至 2009 年的意外比率

	2008		2009	
	理論意外 比率	真實意外 比率	理論意外 比率	真實意外 比率
直樓梯	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{16}$
螺旋樓梯				
比率相差 %		-83%		-88%

Samson：「從比率的相差百分數，我們可以看到比率不是上升而是下降呢！因此，更加證明了直樓梯巴士比螺旋樓梯巴士更為安全。」

總裁高興地站起來拍手：「好！好！實在解釋得太好了！」他跟 Samson 握手，然後給他一紙合約：「我代表森巴公司歡迎你！請問你甚麼時候可以開始上班？」

Samson 笑道：「隨時可以！」

(字數：2100)

參考資料：

1. 香港巴士大典(巴士公司資料，巴士型號,路線,車隊等巴士有關資料): <http://hkbus.wikia.com/>
2. 香港巴士紀錄列表:
<http://hkbus.wikia.com/wiki/%E9%A6%99%E6%B8%AF%E5%B7%B4%E5%A3%AB%E7%B4%80%E9%8C%84%E5%88%97%E8%A1%A8>
3. 運輸署:
http://www.td.gov.hk/mini_site/atd/2010/cn/s5_p5.htm
4. 維基百科:
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B9%9D%E9%BE%8D%E5%B7%B4%E5%A3%AB>
5. 政府新聞資料庫:
<http://www.info.gov.hk/gia/general/201202/01/P201202010216.htm>
附件一:
http://gia.info.gov.hk/general/201202/01/P201202010216_0216_89656.pdf
6. 九龍巴士: <http://www.kmb.hk/tc/>

附錄(新聞個案)：

1. 2009 年 1 月， 82 歲老翁楊德華乘 1A 巴士至油麻地時，沿巴士的直梯級從上層下車，巴士疑靠站時急煞，楊失去重心墮下重傷不治。
2. 2011 年 12 月 7 日，一名 74 歲老伯，下午二時許在一輛九巴雙層巴士由上層跌落樓梯死亡，九巴表示，這名老伯乘坐的 3 號 C 線巴士屬三叉戟型，有八年車齡，也屬直通式樓梯設計。
3. 2011 年 9 月 13 日， 59 歲姓李女事主和鄧姓丈夫，由青衣長康邨寓所，到涌美路巴士站乘搭 243M 九巴擬往荃灣愉景新城吃飯，夫婦上車後，李婦跟隨丈夫行上上層，行至第三、四級樓梯時，她疑捉不緊扶手失平衡向後跌，滾落下層地面，頭撞扶手柱，後腦着地。243M 是富豪奧林比安型號，使用螺旋梯級。
4. 在 2003 年 6 月 1 日，一名女子，乘坐 102 號線雙層九巴駛至銅鑼灣，在巴士上層準備下車時，疑巴士突然加速，女乘客沿梯級直滾至下層地面，後腦撞及硬物昏迷，送抵灣仔律敦治醫院延至翌日傷重不治。102 號巴士為 AVBW1 型號，為直梯巴士。

亞軍作品：不一樣的滿意度分析

學校名稱：香港神託會培基書院

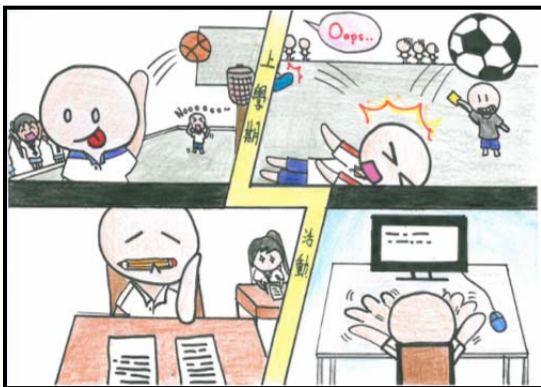
學生姓名：方綽瑤、許蔚瑩、黃皓心

級別：中三

顧問老師：黃智君

引言

為了解同學對活動或服務的意見，學校常會進行不同形式的問卷調查，但所得的數據應該怎樣分析呢？筆者將會帶領大家走進校園，透過學生會幹事與老師的對話，為大家講述問卷數據背後的關聯性，並進行「不一樣的滿意度分析」，以便了解各項活動是否迎合同學們的心意。



(人物：學生會主席、副主席及陳老師)

主席： 不知不覺，已步進下學期了，畢業班的同學已離校去準備考公開考試。當了半年學生會主席，我對同學的心意總是猜不透。為甚麼今年同學的反應好像很冷淡呢？學生會所舉辦的活動報名人數並不多，而且同學又不是很積極...

副主席： 主席，請你放心吧！我已經想好對策了。

主席： 是甚麼？是甚麼？快告訴我吧！

副主席： 我們將可以抽樣形式，邀請十位同學做問卷，那就知道他們對學生會各項活動是否滿意了。

主席： 好提議！那我們就從社際籃球比賽、班際足球比賽、硬筆書法比賽、中文打字比賽和上學期活動的整體評分五方面去收集意見吧！

學生會活動滿意度問卷調查

親愛的同學：

謝謝你抽空填寫此問卷，學生會希望透過這份問卷，了解同學們對學生會活動的滿意程度，作出改善。有勞之處，謹此先行致謝。

性別: ☐男 ☐女

級別: ☐中一 ☐中二 ☐中三 ☐中四 ☐中五

問題	非常 不滿 意	不滿 意	沒意 見	滿意	非常 滿意
1. 你對社際籃球比賽的滿意程度如何?	☐	☐	☐	☐	☐
2. 你對班際足球比賽的滿意程度如何?	☐	☐	☐	☐	☐
3. 你對硬筆書法比賽的滿意程度如何?	☐	☐	☐	☐	☐
4. 你對中文打字比賽的滿意程度如何?	☐	☐	☐	☐	☐
5. 你對上學期所有活動的整體滿意程度如何?	☐	☐	☐	☐	☐
6. 其他建議改善地方:					

主席： 可是，我們不懂得怎樣分析問卷調查的結果，那

怎麼辦？

副主席： 我們去請教數學科的陳老師吧！

主席： 陳老師，學生會收集了一些關於活動滿意度的問卷，請您教導我們怎樣分析吧！

陳老師： 沒問題！首先，我們需要將數據加以整理，從而找出同學對每個活動的滿意程度，然後...

<u>學生會問卷調查的結果分析</u>					
(1-非常不滿意		2-不滿意	3-沒意見	4-滿意	5-非常滿意)
學生	社際籃球 比賽評分	班際足球 比賽評分	硬筆書法 比賽評分	中文打字 比賽評分	所有活動 整體評分
A	4	3	4	2	3
B	4	4	4	3	3
C	1	1	4	1	1
D	5	5	5	2	4
E	5	4	2	3	4
F	5	4	1	1	5
G	4	3	1	4	3
H	4	3	5	2	4
I	2	2	3	1	2
J	5	3	4	1	4

學生會問卷調查的結果分析					
(1-非常不滿意 2-不滿意 3-沒意見 4-滿意 5-非常滿意)					
4、5 的 數量	8	4	6	1	5
滿意度	80%	40%	60%	10%	50%

副主席： 然後我們就可以知道同學不滿意哪些活動，從而作出改善。例如，大部分同學都對社際籃球比賽感到滿意，但中文打字比賽就不受好評。

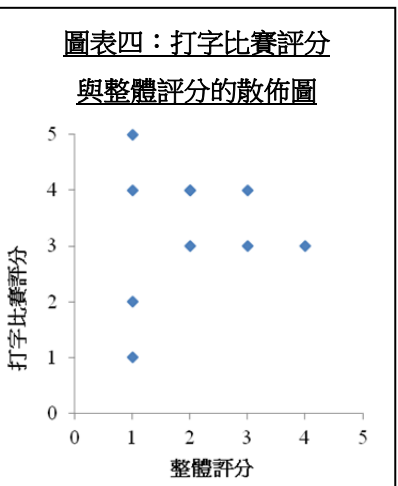
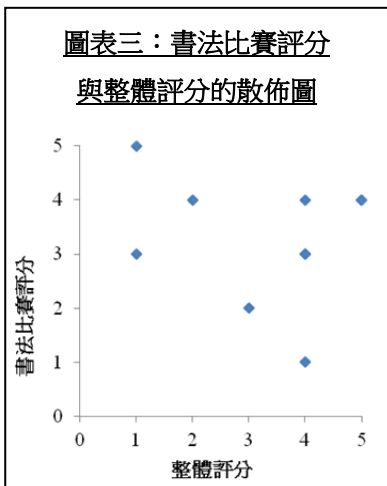
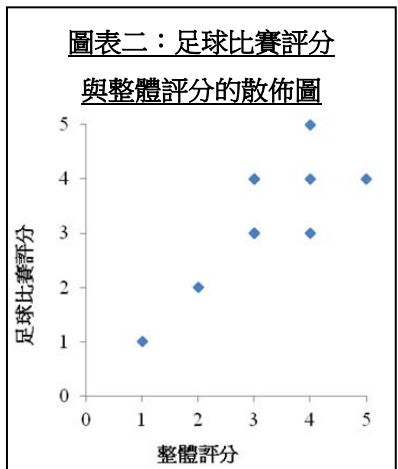
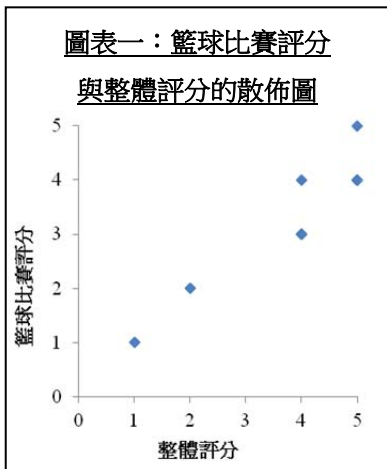
主席： 唉！上學期活動的整體評分只有 50%，下學年真是要加把勁啊！

副主席： 陳老師，我認為上學期活動的整體評分應該會受每個活動的評分影響呀！如果兩者有關聯，我們能否作進一步的分析呢？

主席： 對呀！若果某個活動對整體評分的影響很大，我們就應該集中資源改善有關活動，從而提升同學對學生會的滿意度。

陳老師： 真聰明！我們可以利用散佈圖(Scatter diagram)作進一步的分析，以便研究每個活動評分與整體評分的關係。

主席：繪製散佈圖並不困難呀！舉例來說，我們能以整體評分設為 x 座標，並將社際籃球比賽設為 y 座標，然後將十位同學的數據逐一標示在座標平面上。



陳老師： 從圖表一及圖表二中，我們可見當整體評分增加時，社際籃球比賽及班際足球比賽的評分也有增加的傾向。在統計學上，兩者的關係稱為「正相關」，這代表以上兩個比賽對學生會的整體評分很重要。

副主席： 那麼，學生會就應該集中資源提升社際籃球比賽及班際足球比賽的滿意度。

主席： 從圖表三及圖表四中，數據分佈在圖中的不同位置，沒有很明顯的關係，那又代表甚麼呢？

副主席： 這很簡單吧！這代表硬筆書法比賽及中文打字比賽對學生會整體評分的影響不大啊！

主席： 陳老師！除了利用散佈圖作分析，個別活動評分與整體評分的關係可否用一個具體的數值來表現呢？這樣才會客觀準確，更具說服力。

陳老師： 其實，只要我們學會相關係數 (correlation coefficient)，就可以用一個數值來表示兩個變數(variables)之間的關聯性。

主席： 相關係數應該怎樣計算呢？

陳老師： 好吧！請留心聽呀！假設現在有兩種相互對應的 n 個資料： $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 他們的相關係數 r 的定義如下：

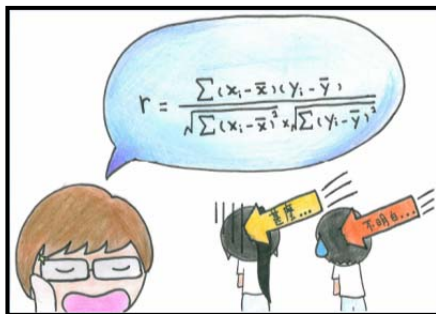
$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Σ (大寫的 SIGMA) 是代表「合計值」的符號，而 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 則分別代表兩種數據的平均數，

即 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 和 $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$ 。

主席： 這公式實在太複雜啊！

陳老師： 其實，如果我們利用電腦作輔助，相關係數的計算並不太困難。以社際籃球比賽評分及上學期活動整體評分為例，我們可以利用電腦的試算表(Excel)計算出所需的合計值，然後有關數值代入公式，便可計算出相關係數。



副主席： 好吧！讓我試試吧！

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{13.3}{\sqrt{16.9} \times \sqrt{12.1}} = 0.93$$

學生	社際籃球 比賽評分	所有活動整體評分
	x_i	y_i
A	4	3
B	4	3
C	1	1
D	5	4
E	5	4
F	5	5
G	4	3
H	4	4
I	2	2
J	5	4
合計值	39.0	33.0
平均數	3.90	3.30

學生	計算步驟				
	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
A	0.1	-0.3	0.01	0.09	-0.03
B	0.1	-0.3	0.01	0.09	-0.03
C	-2.9	-2.3	8.41	5.29	6.67
D	1.1	0.7	1.21	0.49	0.77
E	1.1	0.7	1.21	0.49	0.77
F	1.1	1.7	1.21	2.89	1.87
G	0.1	-0.3	0.01	0.09	-0.03
H	0.1	0.7	0.01	0.49	0.07
I	-1.9	-1.3	3.61	1.69	2.47
J	1.1	0.7	1.21	0.49	0.77
合計值	0.0	0.0	16.9	12.1	13.3

	社際籃球 比賽評分	班際足球 比賽評分	硬筆書法 比賽評分	中文打字 比賽評分
個別活動 的滿意度	80%	40%	60%	10%
與整體評分 的相關係數	0.93	0.79	-0.19	0.09

主席： 陳老師！我們已經把所有相關係數計算出來了！但這個數值又代表甚麼呢？

陳老師： 其實，相關係數的數值介乎 -1 至 1 之間。當數值愈接近 -1 或 1 ，關係就愈緊密；相反地，數值愈接近 0 ，關係就愈薄弱。

副主席： 不過，相關係數的數值要多大才代表兩者之間的關係很密切呢？

陳老師： 其實，這要視乎情況及數據的性質，並沒有特定的標準。根據學校的經驗，我們可採用以下的準則：

$ r \geq 0.9$ ：	關係十分密切
$0.70 \leq r < 0.90$ ：	關係密切
$0.50 \leq r < 0.70$ ：	關係薄弱
$ r < 0.50$ ：	關係十分薄弱

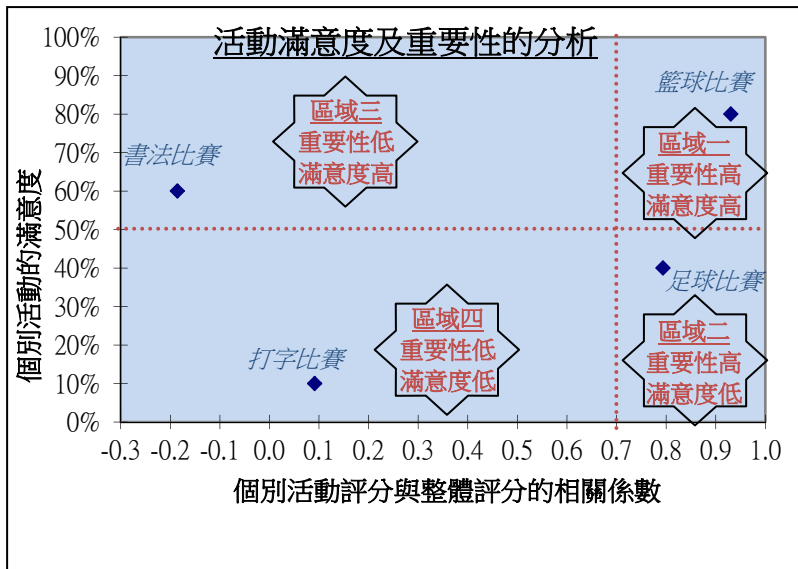
主席： 從社際籃球比賽和整體評分的相關係數來看，關係是十分密切呀！同樣地，班際足球比賽的相關係數亦很高呢！這代表同學都十分重視這兩個活動！

副主席： 相反地，硬筆書法比賽及中文打字比賽與整體評分的相關係數很接近 0 ，代表這兩個活動

對整體評分的影响不大！

陳老師： 其實，我們可將每個活動的滿意度及其與整體評分的相關係數繪畫在圖表上，便可以作進一步的分析。

主席： 好吧！我們用橫軸表示個別活動評分與整體評分的相關係數，並以 0.7 為界去區分關係親密與否。而縱軸代表個別活動的滿意度，並以 50% 為界去區分同學是否滿意活動。



陳老師： 我們可以將圖表分為四個區域，並就每個區域進行策略性分析。以區域一為例，大部分同學都很滿意社際籃球比賽，而且這活動對學生會的整體評分影響亦很大！既然此活動為同學最重視及最滿意的項目，學生會應該保留此優良傳統，並以此作為其他活動的借鏡。

副主席： 對呀！社際籃球比賽是由我一手策劃，的確很受同學歡迎呀！除了球員努力為各社作戰外，其他同學亦會為參賽健兒落力打氣。即使籌備這個比賽十分辛苦，我認為也是值得的...

主席： 行了...行了！小息快完了，我們先完成分析吧！



主席： 從區域二中，我們可以知道同學非常重視班際足球比賽，但只有 4 成的同學感到滿意。因此，學生會必須檢討不足之處，並作出適當改善。

副主席： 如區域三所顯示，雖然硬筆書法比賽的滿意度很高，但這對整體評分的影響不大。回想起來，很多同學都是被老師強迫去參賽的，雖然比賽能順暢地進行，但大家並不太投入呀！

主席： 那麼，我們可建議下年更改比賽模式或停辦這個活動，並將有限的資源投放在其他更重要的項目上。

副主席： 最後，區域四顯示了中文打字比賽的情況，這活動的滿意度及重要性同樣偏低！既然這樣，學生會應該將這個活動取消呀！

主席： 用右方的圖表就能總結我們的策略性分析。在未來的半年，我們要好好改善不足之處，不要辜負同學和老師對我們的期望。

策略性分析

		重要性低	重要性高
滿意度	高	此活動不太影響學生會的整體評分，學生會可考慮將有限的資源投放到其他更重要的項目。	此活動為同學最重視及最滿意的項目，學生會應該保留此優良傳統，並以此作為其他活動的借鏡。
	低	既然此活動的滿意度及重要性偏低，而且不會影響整體評分，學生會可考慮將活動取消。	因為同學非常重視此活動，但滿意度偏低，所以學生會必須檢討不足之處，並作出適當改善。

陳老師： 其實，這類型的策略性分析在商業及管理上都有廣泛的應用。除了根據統計數字作分析外，你們還要多諮詢同學的意見呀！

主席： 正如曾特首說：「我要做好這份工！」我們要堅守責任，為同學服務！不但要比之前的師兄師姐做得更好，而且要成為學校歷史上最好、最受歡迎的學生會！

副主席： 習近平先生也說過：「沒有最好，只有更好！」一齊努力吧！

(字數：2389)



參考資料：

1. 菅民郎、土方裕子(2011)《真希望老師這樣教統計：了解到活用，公司只給你三天，想被重用嗎？》，大是文化有限公司
2. 高橋信(2010)《世界第一簡單統計學 迴歸分析篇》，世茂出版有限公司
3. 今野紀雄(2010)《3 小時讀通統計(漫畫版)》，祥新印刷事業有限公司

季軍作品：選科大作戰

學校名稱：宣道會鄭榮之中學

學生姓名：杜卓霖、李桂楠、蕭揚庭

級別：中四

顧問老師：朱吉樑

引言

相關係數可以用作判斷兩種變數的相關性，可是一不留神便可能作出錯誤的分析，或把當中的相關性作了錯誤的考慮，故此我們嘗試透過中三選科的事例來探討一下使用相關係數時要留意的數個重點。當中，我們亦會看看「獎題」(Bonus Question)的設立和處理，對相關係數(Coefficient of Correlation)的影響。



中三同學快要為升中四作準備，積極備戰，期望在期終試中考到好成績，希望可以選修心儀的科目，而物理科正是大部分同學心儀的科目，在一次選科問卷中，幾乎有七成學生把可以修讀物理科的4A班視為第一志願(見下圖)。李校長對此頭痛不已，故找來物理科科主任蕭老師和數學科科主任杜老師商量。

班級	4A	4B	4C	4D
選修科目 (X1)	物理	生物	中國文學	經濟
百分比	69%	12%	10%	9%

李校長： 究竟要用甚麼方法來選擇哪些學生可以升讀4A 班呢？

蕭老師： 不如以學生的總排名作選擇吧！級名次愈高，便讓他修讀。

杜老師： 但過往有一些學生因心志不太成熟，未有按本身能力，只一窩蜂的選了 A 班，但因為級名次較高而入讀了，結果選錯科，白白浪費了入大學的機會。

李校長： 其實中三的同學有修讀科學科，科學科不就是物理的入門課嗎？若同學選修 A 班，我們大可以把在選科的計分上，把科學科的權數

增加¹，由 100 分升為 200 分，同學考慮本身的意向時，亦能同時顧及其能力啊！

蕭老師： 不過，科學科其實滲入了物理、生物及化學三大部份，而三種科目的性質又實在不同，科學好也不一定物理好，而且中三程度的科學，與高中的物理亦有一定的分別，未必是最好的比較。

杜老師： 其實，有很多人認為數學好的人，物理也好。最近，我看到一些有關數學科與物理科的相關性研究，可能會有些幫助。而且，一般而言，數學表現的穩定性也很強，初中表現好的學生，往往在高中也有好的表現呢。

李校長： 下星期的家長會，我要和中三的家長交代一下，唔……兩位老師，不如你們試一試向友校取些資料來分析，看看數學科是否一個合適的選擇。

杜老師： 好的！校長，我提議可以把中四學生的數學成績和物理成績作比較，如何？

蕭老師： 不過，我們的目的是要了解選科時中三學生的數學成績與將來中四讀物理時是否有幫助，故使用中四的數學成績未必合適。

¹ 例子可參看附錄一。

杜老師： 哦，是啊，差點就犯了錯誤呢！這是一個效度(Validity)的問題，所以應該用中四學生的物理成績與他們本身在中三時的數學成績作考慮。

蕭老師： 不錯，理應如此。

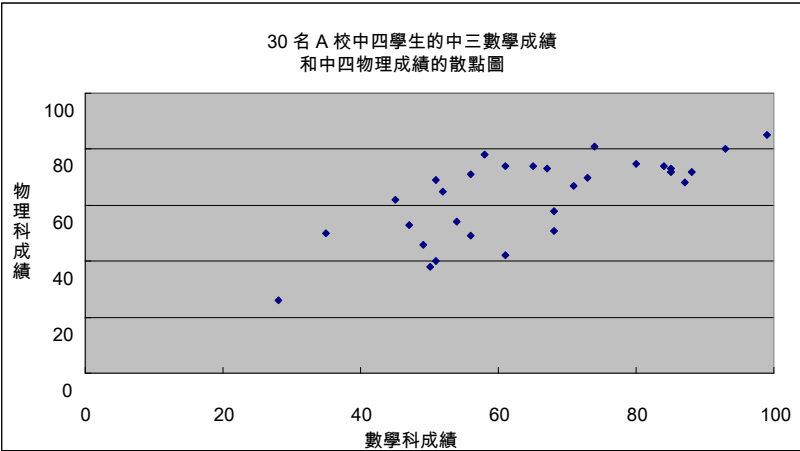
於是，杜老師便搜集了 A 校的資料，並且利用他們中四物理科和他們在中三時的數學成績作分析。

杜老師： 以下是學生數據(見下表)²。

學生編號	數學成績	物理成績	學生編號	數學成績	物理成績	學生編號	數學成績	物理成績
1	28	26	11	56	71	21	73	70
2	35	50	12	56	49	22	74	81
3	45	62	13	58	78	23	80	75
4	47	53	14	61	42	24	84	74
5	49	46	15	61	74	25	85	72
6	50	38	16	65	74	26	85	73
7	51	40	17	67	73	27	87	68
8	51	69	18	68	51	28	88	72
9	52	65	19	68	58	29	93	80
10	54	54	20	71	67	30	99	85

² 數據參考了百度文庫《中學生數學成績與物理成績的關係研究作業》的資料。

杜老師： 我把兩科成績以散點圖(下圖)表示。根據此圖我們可以看出學生的數學科成績與物理科成績是有一個正相關性，而相關性當以相關係數(ρ)量度時為 0.72。



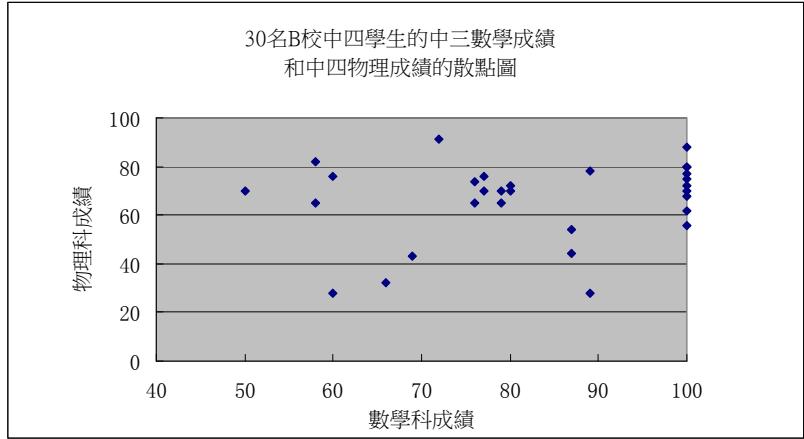
李校長： 等一等，「 $\rho = 0.72$ 」這個代表甚麼？

杜老師： 哦，這是相關係數 (coefficient of correlation)，衡量兩個變量線性相關的程度， ρ 越接近 1，代表兩個變量之間的正相關性越大。現在的相關係數(ρ)約為 0.72，則中三數學成績與中四的物理科表現有頗大的正相關性。

蕭老師： 可是 B 校的結果卻不同啊！校長，你先看一看學生的成績(見後表)。

學生編號	數學成績	物理成績	學生編號	數學成績	物理成績	學生編號	數學成績	物理成績
1	100	75	11	80	72	21	87	44
2	100	80	12	89	78	22	79	70
3	100	88	13	77	70	23	66	32
4	100	62	14	76	74	24	60	28
5	100	80	15	87	54	25	60	76
6	100	72	16	79	65	26	58	65
7	100	77	17	80	70	27	58	82
8	100	56	18	89	28	28	50	70
9	100	68	19	77	76	29	69	43
10	100	70	20	76	65	30	72	91

蕭老師： 我也準備了它的散點圖(見下圖)。



李校長： 是啊，B 校學生的中三數學科成績與中四物理科兩者似乎沒有關係啊。你有計算杜老師所說的相關係數嗎？

蕭老師： 當然有，你看相關係數(ρ)才只有 0.19！

杜老師： 讓我看一看。

杜老師： 校長，我發現這張散點圖有兩個特別的地方。這班同學在中三時的數學成績很高？只有很少人取得低分，你看看，基本上沒有人的得分是 0 – 40 分的，但是卻有很多人取得 100 分呢！據我所知，B 校的數學科評估是設有「獎題」³的部份呢！可能亦因此而導致當中的相關性被隱藏了呢！

李校長： 什麼是「獎題」？

杜老師： 所謂「獎題」(Bonus Question)，一般是較難解答的問題，通常設在評卷的最後部份。而最特別的，是它的分數不佔試卷的總得分，若學生未有解答「獎題」，仍可得滿分；而當學生在「獎題」獲得分數，卻可以在試卷上加分，舉例評卷滿分是 100 分，另有一「獎

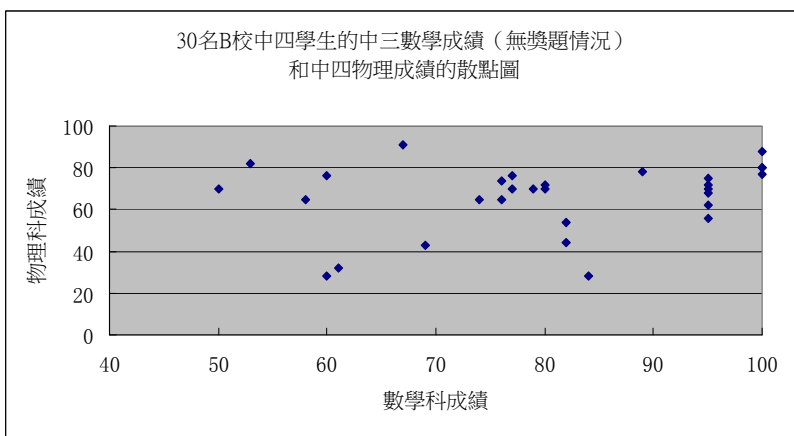
³ 例子見附錄二。

題」，佔分為額外的 5 分(即 $100 + 5$)，若某學生在評卷中得 100 分，並答對「獎題」，他仍是 100 分；若他在評卷中獲得 95 分，並答對「獎題」，他的得分也是 100 分。

李校長： 那為甚麼會出現相關性被隱藏呢？

杜老師： 「獎題」讓學生的數學分數極端化，於是令數據不夠全面，使相關性被隱藏。因為「獎題」不是每一個學生都懂得作答，但通常都是能力較高的同學才可獲加分，形成有一堆 100 分的同學，當中高分同學的差異變得模糊了，以獎分為 5 分為例，原本 95 – 100 分的同學便可能都得 100 分，數學能力較高的同學，即散點圖中的右方都聚集在一起，與物理科成績的關係便會變得不明顯。

蕭老師： 雖然杜老師說得也有道理，但當我把 30 名學生的「獎題」分數扣除後，物理和數學成績之間也還是沒有太大關係啊(見右圖)，當中的相關係數(ρ)才只有 0.24，只有輕微的上升，杜老師，你的理論似乎不正確呢！



杜老師： 請問蕭老師，你在計算時，使用的數據是從
B 校哪一個班級選取的呢？

蕭老師： 是從 B 校同樣讀物理的 4A 班學生中抽取
的。

杜老師： 呵呵，我知道怎麼回事了！

蕭老師： 此話怎解？

杜老師： 沒錯，B 校的 4A 班學生的確是讀物理科，但
是班裏有九成的學生去年是 3A 班的學生，而
3A 班卻是 B 校中三級的數學精英班（Elite
Class）！所以他們的數學成績比普通學生的
優秀。

蕭老師： 有問題麼？照你的說法，數學好應該物理也

好才對啊！

杜老師： 問題與「獎題」的情況相似。由於數據只集中於一小部份數學成績好的學生身上，沒有考慮數學成績一般的學生的表現，由於調查的數據傾向一面，我們只看到兩個變數的整個關係的右上端，相關程度被模糊了。

蕭老師： 哦，我明白了。然而你的數據又怎樣能確保無誤呢？

杜老師： A 校是全部學生必須修讀物理科，而我得到的數據又是隨機抽取的，故不同程度的學生的成績都得以考慮，而 A 校的考試中亦無「獎題」部份，所以不會出現之前的問題。

李校長： 原來如此！那麼換句話說，數學科的成績是和物理科其實還是有一定的正相關，那麼杜老師，你現在可以在中三選 4A 班的計分上，把數學科的權數增加，由 100 分升為 200 分，並且在家長日當天通知學生及家長了！

杜老師： 好的，遵命！

(字數：約 2500)

參考資料：

1. 百度百科《相關係數》
<http://baike.baidu.com/view/172091.htm>
2. 百度文庫《中學生數學成績與物理成績的關係研究作業》
<http://wenku.baidu.com/view/c6669cd86f1aff00bed51e7d.html?from=rec&pos=0&weight=6&lastweight=2&count=5>
3. 宣道會鄭榮之中學網頁(中四選修科安排2012-2013及選科計分方法)
<http://www.cwgc.edu.hk/>
4. 宣道會鄭榮之中學數學考試試卷（獎題設立）

附錄一：選科比重節錄。

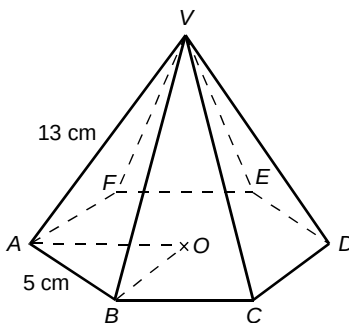
中三科目	中國語文	英國語文	數學	科學	地理	中國歷史	電腦認知
高中一甲物理	1	2	2	1	0.25	0.25	0.25
高中一丁中國歷史	1	2	1	1	0.25	2	0.25

附錄二： 中三級統測卷 2012「獎題」例子。

BONUS QUESTION (EXTRA 4 MARKS)

The figure shows right pyramid $VABCDEF$. O is the centre of regular hexagonal base $ABCDEF$.

Find the volume of the pyramid. (Give your answers correct to 3 significant figures.)



優異作品：中學排名 點先公平？！

學校名稱：保良局第一張永慶中學

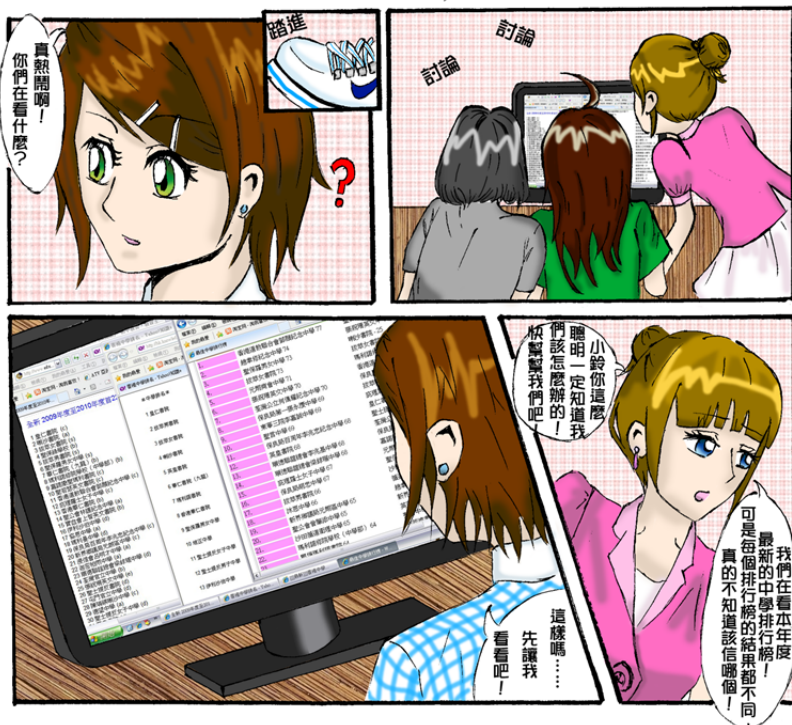
學生姓名：陳穎琛

級別：中四

顧問老師：霍逸遠

引言

作為一位學生，或想知道本身學校在全港的排名。然而網上有無數的中學排名榜，即使是同一年的統計，各個排名榜之間也有出入，每一個都標榜是最客觀、最全面的，那麼我們該相信哪一個呢？有沒有較完善的方法製作中學排名榜呢？



花子： 為甚麼會有那麼多不同的的排名？它們有甚麼分別？



小鈴：坊間的中學排名沒有一個標準的排名準則，它們有些是以公開考試的成績作準則，有的則是參考師資、大學入學率等。每間學校都有不同的專長，因此每個排名都有出入。

子瑩：那我們怎樣才知道哪一間學校最優秀？它們在各個排行榜中都有不同的排名，我們根本沒法直接比較它們呀！

琪琪：那麼，我們直接比較所有項目不就行了？我有每一項的資料啊！

排名準則						
中學名稱	公開 試優 良百 分率 (%)	公開 試平 均分	教師學 位數目 (轉化 為分數 10 為 最佳)	大學 入學 率 (%)	課外 活動 奪獎 數目	學校 投入 教育 資金 (百萬元)
喇叭書院	80	17	5	80	80	25
杏仁書院	68	10	4	70	650	21
日睡中學	67	12	3	78	398	23
香城官立 中學	55	8	2	50	104	13
西洋一院 中學	65	12	5	46	350	16

清補涼中學	60	17	6	91	465	17
杏壇中學	46	5	4	43	400	9
名外中學	57	9	7	45	521	10
人仔中學	30	10	2	40	610	23
寰宇書院	34	7	5	30	650	50

子瑩： 琪琪，你說怎樣比較啊……你看！一大堆沒經過整理和分析的資料，只是毫無意義的數字吧！我有點暈……

小鈴： 先別急，讓我想一個方法吧……有了！首先列出各項排名：

排名準則							
中學名稱	公開試優良百分率	公開試平均分	教師學位數目(轉化為分數)	大學入學率(%)	課外活動奪獎數目	學校投入教育資金(百萬元)	平均分
喇叭書院	1	1	3	2	10	2	3.17
杏仁書院	2	5	6	4	1	5	3.83

日睡 中學	3	3	8	3	7	3	4.50
香城 官立 中學	7	8	9	5	9	8	7.67
西洋 一院 中學	4	3	3	6	8	7	5.17
清補 涼中 學	5	1	2	1	5	6	3.33
杏壇 中學	8	10	6	8	6	10	8.00
名外 中學	6	7	1	7	4	9	5.67
人仔 中學	10	5	9	9	3	3	6.50
寰宇 書院	9	9	3	10	1	1	5.50

平均分越低，排名越高。根據以上得出的平均分，再得出總排名如下：

1	喇叭書院
2	清補涼中學
3	杏仁書院
4	日睡中學
5	西洋一院中學
6	寰宇書院
7	名外中學
8	人仔中學
9	香城官立中學
10	杏壇中學

這樣就可以知道這些學校的整體表現了。我真是很聰明呢！

琪琪： 慢著！根據資料，人仔中學雖然在課外活動方面的表現有明顯的優勢，但因這間學校在學術成績方面比較遜色，只取得榜尾的位置，反觀學術成績和課外活動都表現普通的西洋一院中學卻獲得中等的位置，這不是有點不合理嗎？

小鈴： 也對啊.....那麼，我們可以試著利用「標準差」來求得「標準分數」，並得出一個相對客觀的排名。



花子： 甚麼是「標準差」和「標準分數」？

子瑩： 花子，妳上課時一定是只顧睡覺沒聽課了！簡單來說，標準差是一組數值自平均值分散開來的程度的一種測量觀念。一個較大的標準差，代表大部分的數值和其平均值之間差異較大；一個較小的標準差，代表這些數值較接近平均值。

琪琪： 標準分數則是一個利用了標準差和平均值計算出來的數值，用來量度一項資料與中心資料的差距，可以幫助我們直接對比兩組不同的資料呢。

花子： 呃.....雖然我不是很明白，但說了一輪，我們可以怎樣利用標準差和標準分數來將學校排名啊？

小鈴： 這個方法有點複雜，聽好了喔！

1) 首先取得每個排名標準中的平均值。

要得出平均值，只需將該類別中所有數目相加，再將總數除以項數就成了。

這是平均值的公式：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

以公開試優良百分率為例：

$$\bar{x} = \frac{80+68+67+55+65+60+46+57+30+34}{10} = 56.2$$

得出各項平均值如下：

公開試 優良百 分率 (%)	公開試 平均分	教師學 位數目 (轉化為 分數)	大學入 學率 (%)	課外活 動奪獎 數目	學校投 入教育 資金(百 萬元)
56.2	10.7	4.3	57.3	422.8	20.7

2) 找出每個排名標準中的標準差。

找出標準差的方法，是將每個項目與平均值的差自乘，再將之相加，除以項數，然後開方。

這是標準差的算式：

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

再以公開試優良百分率為例：

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(80 - 56.2)^2 + (68 - 56.2)^2 + \cdots + (34 - 56.2)^2}{10}} \\ &= 15.633 \end{aligned}$$

得出各項標準差如下：

公開試 優良百 分率	公開試 平均分	教師學 位數目	大學入 學率	課外活 動奪獎 數目	學校投 入教育 資金
15.633	3.945	1.636	20.608	204.202	11.710

3) 計算標準分數。

要找出標準分數，可以從該項目減去平均值，再除以標準差。

這是標準分數的算式：

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

以喇叭書院公開試優良百分率為例：

$$z = \frac{80 - 56.2}{15.633} = 1.522$$

得出各項標準分數如下：

排名準則						
中學 名稱	公開 試優 良百 分率	公開 試平 均分	教師學 位數目	大學 入學 率	課外 活動 奪獎 數目	學校 投入 教育 資金
喇叭 書院	1.522	1.597	0.428	1.102	-1.679	0.367

杏仁書院	0.755	-0.177	-0.183	0.616	1.113	0.026
日睡中學	0.691	0.33	-0.795	1.004	-0.121	0.196
香城官立中學	-0.077	-0.684	-1.406	-0.354	-1.561	-0.658
西洋一院中學	0.563	0.33	0.428	-0.548	-0.357	-0.401
清補涼中學	0.243	1.597	1.039	1.635	0.207	-0.316
杏壇中學	-0.652	-1.445	-0.183	-0.694	-0.112	-0.999
名外中學	0.051	-0.431	1.65	-0.597	0.481	-0.914
人仔中學	-1.676	-0.177	-1.406	-0.839	0.917	0.196
寰宇書院	-1.42	-0.938	0.428	-1.325	1.113	2.502

花子： 等一下！標準分數有甚麼意義啊？

小鈴：標準分數中的分子測量該項目與平均值的差距，顯示該校在那方面的表現是高於或低於平均表現多少。分母中的標準差能反映組內個體間的離散程度。數字越離散，標準差就越大。這樣就能確保每個標準分數不會因為排名準則組中本身的離散影響結果。

子瑩：我明白了！之後只要得出各學校的標準分數平均值，就可以將之排名了！像是這樣：

中學名稱	標準分數平均值	排名
喇叭書院	0.556	2
杏仁書院	0.358	3
日睡中學	0.218	4
香城官立中學	-0.790	10
西洋一院中學	0.002	7
清補涼中學	0.734	1
杏壇中學	-0.681	9
名外中學	0.040	6
人仔中學	-0.498	8
寰宇書院	0.060	5

整理過後，排名如下：

1	清補涼中學
2	喇叭書院
3	杏仁書院
4	日睡中學
5	寰宇書院
6	名外中學
7	西洋一院中學
8	人仔中學
9	杏壇中學
10	香城官立中學

琪琪：雖然人仔和西洋一院的差距是拉近了，可是細心想想！公開試優良百分率、公開試平均分和大學入學率，都是量度了學術方面的表現，而教師學位數目和學校投入的教育資金，都間接地影響學生的學術成績。而課外活動奪獎數目卻是獨立的一個方向，變相令學術成績所佔的比重上升，因此這個排名方式對於不精於學術方面，但課外活動表現出色的學校很不公平！

子瑩： 琪琪說得很有道理啊……不如我們再將它們分類，分成學術方面（公開試優良百分率，公開試平均分，教師學位數目，大學入學率，學校投入教育資金）和課外活動方面（課外活動奪獎數目，學校投入教育資金）去比較它們的標準分數吧！



中學名稱	學術方面 平均值	課外活動 平均值	總平均值	排名
喇叭書院	1.0032	-0.656	0.1736	4
杏仁書院	0.2074	0.5695	0.38845	3
日睡中學	0.2852	0.0375	0.16135	5
香城官立 中學	-0.6358	-1.1095	-0.87265	10
西洋一院 中學	0.0744	-0.379	-0.1523	8
清補涼 中學	0.8396	-0.0545	0.39255	2
杏壇中學	-0.7946	-0.5555	-0.67505	9
名外中學	-0.0482	-0.2165	-0.13235	7
人仔中學	-0.7804	0.5565	-0.11195	6
寰宇書院	-0.1506	1.8075	0.82845	1

整理過後，最終排名如下：

1	寰宇書院
2	清補涼中學
3	杏仁書院
4	喇叭書院
5	日睡中學
6	人仔中學
7	名外中學
8	西洋一院中學
9	杏壇中學
10	香城官立中學

琪琪： 你看！人仔中學超越西洋一院中學了！

花子： 可是在這個方法下，學術成績和課外活動表現的比重是一比一，不太符合一般市民的期望嗎？

琪琪： 花子說得對，所以我們應在學會這套方法後，按個人的價值觀，兩個方面調節不同的比重，製作一個最適合自己的中學排名。這遠比盲目地運用他人給我們的資料、人云亦云，來得明智啊！

花子： 那麼說，這個方法近乎完美？為甚麼不是那麼多人採用？

小鈴： 這大概是因為它較繁瑣吧！現時網上的排名方法都簡單易明——將數字由大至少排列，有誰不會呢？可是剛才單是解釋標準差和標準分數就已經弄得花子一頭霧水，還要經過複雜的過程才得出最後排名，很費時。加上參考排名的市民未必有這樣的知識水平，因此這個排名的方法對很多人來說都顯得艱澀難懂，令他們懷疑這個排名的可信性。

子瑩： 對啊，雖然用標準分數能考慮以上所有資料，但正因如此，萬一其中一項資料出錯，便要相對地修訂其他分數，牽一髮動全身，對製作者帶來不便！為了省卻麻煩，大家便不採用這個方法。

花子： 原來是這樣……

琪琪： 是呢，每個方法都有不同的著眼點，我們應該在理解方法背後的原理後，找出一個適合自己的方法。而且，要得到更好的結果就要多下工夫，就和學習一樣，一分耕耘一分收穫啊！

(字數：1965)

參考資料：

1. 標準差 - 維基百科，自由的百科全書：
<http://zh.wikipedia.org/zh-hk/%E6%A8%99%E6%BA%96%E5%B7%AE>
2. 標準分數 - 維基百科，自由的百科全書：
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A8%99%E6%BA%96%E5%88%86%E6%95%B8>
3. New Trend Senior Secondary Mathematics S5A – Hong Kong: Chung Tai Educational Press (2010)

繪圖：陳穎琛

優異作品：誰是真正第一？

學校名稱：保良局第一張永慶中學

學生姓名：甘穎琛、秦梓建

級別：中四

顧問老師：霍逸遠

引言

不少的賽事評分都會刪去選手一對、甚至兩對的最高最低得分，奧運會中的跳水項目是其中一個例子。究竟這評分制度有何好處？統計方法這麼多，不同的統計方法更可能導致結果出現分歧。現行的評分制度，真的公平嗎？

頒獎場上，貝貝踏上稍稍突出的亞軍台階，心裡滿是不甘。只是0.2分的差距，她把冠軍的寶座雙手奉上。本來，她還佔有1.55分的優勢。

是因為計分制度的不公平嗎？說起來，選擇性刪去分數也不太合理吧！統計方法有這麼多，為甚麼要採用現行的方法？

我要上訴!!!



陳： 各位，今天委員會召開特別會議，是由於奧委會跳水比賽後，收到一名運動員的來信。

黃： 是上訴信？比賽中似乎發現不了甚麼犯規問題.....

陳： 猜對了一半。她於信中表示了對現行計分制度的質疑，又提出採用其他統計方法，包括幾何平均及調和平均、保留所有或只刪除最高最低得分各一對的建議。教人疑惑的是，採用上述任何方法，都不約而同顯示：該名選手可能為是次大賽的冠軍！究竟誰的跳水技術更勝一籌？真讓人摸不着頭腦。

黃： 不如讓大家一起看看信中的內容？

敬啟者：

關於今屆奧運會女子單人 3 米彈板跳水比賽，本人發現賽事中所使用的計分和排名方法缺乏說服力，故特致函提出質疑，並以此作理據上訴。

現行的計分方法，是在 7 名評判打出分數後，先刪去兩對最高最低無效分，再把餘下的分數加起來，乘以運動員所跳動作的難度系數。可是，這個方法是否真的合理？是否真的可以充分反映運動員的表現，以至差距？

首先，統計的方法五花八門，為何只純粹把有效分數加起來，而不考慮其他平均值？根據本人僅有的統計學知識，最少還有兩種計算平均值的方法，包括幾何平均、調和平均。幾何平均（ G ）定義如下：

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

而調和平均（ H ）的定義則如下：

$$H = \frac{1}{\frac{\sum \frac{1}{x}}{n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$$

根據這些定義，我們就可以從相同的數據得出不一樣的分數，得出不同的名次（見附錄）。

另一方面，現行方法會刪去兩對最高最低無效分，但這個方法是否真的公平呢？選擇性刪去分數會令不同的運動員分別接受不同的評判評分，而不同的評判有不同的標準，這樣真的公平嗎？撇除奧運會，不少其他具有代表性而需要計分的比賽，例如寬板滑水世界錦標賽，都只是把全部裁判的總分取平均值。再者，為何要刪去兩對，而不是刪去一對呢？而如果是想避免極端分數影響，為何又不使用中位數呢？根據此價值觀，它更能避免結果受到個別評判的主觀因素影響，繼而不偏不倚地反映選手的能力吧！顯而易見，現行方法根本毫無理據支持，欠缺說服力，理應重新檢討。

假如不刪去任何無效分，或只刪去 1 個，甚至使用中位數，也會得出不同的結果（見附錄）。

根據這些分析，只有利用現行方法會得到晶晶險勝的結果，其餘 5 個方法都得出本人才是真正的勝出者，有些情況更顯示本人以較大的差距取勝。暫時撇開較具爭議的部份，即哪一種方法較公平的問題，本人也足足有 5 項數據支持戴上桂冠，因此，本人現提出上訴。

此致
國際奧委會

貝貝謹上

附錄

(為了方便比較，所有數據均以相關比例處理)

							難度 系數
M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	D
晶晶 5 跳得分							
9	9	9.5	9.5	10	10	10	3
8.5	9	9	9	9.5	9.5	9.5	3.2
8.5	8.5	8.5	9	9.5	9.5	9.5	3.2
8.5	8.5	9	9	9	9	9.5	3.3
9	9	9	9.5	10	10	10	3.4

							難度 系數
M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	D
貝貝 5 跳得分							
9	9	9.5	9.5	9.5	10	10	3
8.5	9	9.5	9.5	9.5	9.5	10	3.1
9	9	9	9	9	9.5	9.5	3.3
8.5	9	9	9	9	9.5	10	3.3
9	9	9	9.5	9.5	9.5	10	3.4

晶晶	原本得分	幾何平均	調和平均
	$(M3 + M4 + M5) \times D$	$\sqrt[3]{M3 \times M4 \times M5 \times D \times 3}$	$\frac{3}{\frac{1}{M3} + \frac{1}{M4} + \frac{1}{M5}} \times D \times 3$
	87	86.97443	86.94915
	88	87.97125	87.94286
	86.4	86.31102	86.22204
	89.1	89.1	89.1
	96.9	96.81044	96.72089
總分	447.4	447.1671	446.9349
貝貝	原本得分	幾何平均	調和平均
	$(M3 + M4 + M5) \times D$	$\sqrt[3]{M3 \times M4 \times M5 \times D \times 3}$	$\frac{3}{\frac{1}{M3} + \frac{1}{M4} + \frac{1}{M5}} \times D \times 3$
	85.5	85.5	85.5
	88.35	88.35	88.35
	89.1	89.1	89.1
	89.1	89.1	89.1
	95.2	95.16927	95.13818
總分	447.25	447.2193	447.1882
冠軍得主	晶晶	貝貝	貝貝

晶晶	不刪去無效分	只刪去 1 對無效分	中位數
	$(M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6 + M7) \times D \times \frac{3}{7}$	$(M2 + M3 + M4 + M5 + M6) \times D \times \frac{3}{5}$	$M4 \times D \times 3$
	86.14286	86.4	85.5
	87.77143	88.32	86.4
	86.4	86.4	86.4
	88.39286	88.11	89.1
	96.9	96.9	96.9
總分	445.6071	446.13	444.3
貝貝	不刪去無效分	只刪去 1 對無效分	中位數
	$(M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6 + M7) \times D \times \frac{3}{7}$	$(M2 + M3 + M4 + M5 + M6) \times D \times \frac{3}{5}$	$M4 \times D \times 3$
	85.5	85.5	85.5
	87.02143	87.42	88.35
	90.51429	90.09	89.1
	90.51429	90.09	89.1
	95.44286	94.86	96.9
總分	448.9929	447.96	448.95
冠軍得主	貝貝	貝貝	貝貝

黃： 同樣的分數，不同的統計方法，結果竟有如此落差。統計真是一門神奇的魔術！中位數.....記憶中社會上似乎很多數據都是以中位數來表示，例如入息中位數，應該可行吧!

張： 沒錯，由於不同員工的工資可能存在頗大差異，平均值可能被誇大或低估。此時，處於中點位置的變量值 — 中位數就是比較合適的代表值。然而，它不是取決於數據的量，即這情況的分數，而是取決於數據的位置，雖然不易受到極端數的影響，但缺乏敏感度，不能充份反映其他評判的意見，因此不適用於計分。

區： 至於幾何平均，多適用於計算平均比率或平均速度，亦用於動態平均的計算，如平均變化率。

李： 假設 A 城 2000 年的人口數目是 100 萬人，2020 年的人口數目是 120 萬人，則 2010 年時的人口數目是多少？

黃： 是 110 萬人嗎？又似乎有點問題.....

李： 因人口數目隨著時間的延續而呈等比變化，即每一項與前一項的比都是一個常數，故應以幾何平均數的方法計算。因此，答案應是 $\sqrt{(100 \times 120)} = 109.5$ 萬人。幾何平均用於計算

平均收益(如股票的平均收益率)時亦有其優越之處，可通過對時間進行加權來衡量最初投資價值的複合增值率，考慮了資金的時間價值。另外，平均人口成長率、平均物價變動率亦是幾何平均普遍的應用。

陳： 這樣說，幾何平均似乎不適宜用以計算運動員得分。調和平均又如何呢？

區： 調和平均主要用於找出比例或比率之平均值。調和平均應用的範圍比較少，容易受極端值影響。它多用於已知分子資料但缺分母資料時。

黃： 我還是不太明白，可有實質例子？

張： 看一看眼前的水果籃：假設蘋果\$2/kg，橙\$3/kg，如果各買 1kg，顯然，平均價格 $= (2+3)/(1+1) = \$2.5/\text{kg}$ ，而這是算術平均的概念。但當我兩種水果各買一元，平均價格依舊 $= \text{價格}/\text{份量} = (1+1)/(1/2+1/3) = \$2.4/\text{kg} \dots$ 這就是調和平均了。

陳： 那即是說，調和平均先計算固定預算能買的平均數量，然後轉回平均價格，用的性質不同，取決於所掌握的資料和目的，用以計算是次比賽的評分，似乎又不太合適。

黃： 就是說，不同的統計方法都有各自的應用範疇，又怎能把它們都混為一談呢？不過，說起來，現行「斬頭斬尾各二」的評分制度是從何而來呢？

陳： 現行評分制度所採用的統計方法稱為「切尾均值法」。要知道，任何數據的變動都會引起算術平均數(現行制度採用的概念)的變動及其集中趨勢。若數據出現極端數據，算術平均對該組數據的代表性就會被大為削弱。例如，若參加者的得分為 7, 7, 7, 7, 7.5, 7.5, 9.5，難度為 3.4，明顯他的表現只是一般，只有一個評判認為值得欣賞。然而，如考慮所有分數，得分折合為 76.5；如刪去 2 對無效分，得分為 73.1，差距足足有 3.4 分，有力影響賽果。

李： 因此，不少比賽都會除去最高及最低的極端評分。若評委較多，極端分數不止一個，普遍都會去掉兩對。至於會造成運動員接受不同評判評分的局面，恐怕也無可避免。

張： 統計方法這麼多，選用時真應小心處理。畢竟，不同的統計方法，是基於不同的理念，亦有各自的應用及方法。錯誤選用，後果真是可大可小。

區：當然，有時，選用統計方法沒有絕對的對錯。機構或團體會根據各自的需要去選取，以致出現「相同數據，不同結果」的可能性。例如，中國2011 年收視率計算因為不同的測量樣本、不同的城鄉覆蓋面，造成兩個收視冠軍的現象；同年1 月國家房管局和統計局對廣州一手樓價的計算出現大分歧。但若只為得到利己結果而盲目選用，而忽略可能出現的誤差和不當，甚至玩數字遊戲，實有誤用統計之嫌。

陳：對呀！但評分標準，其實都是比賽的一部分。作為參賽者，亦應試着接受，尊重比賽的評分方式。第一名，終究只有一個。希望運動員能體諒我們的難處吧。

(字數：2483)

參考資料：

1. 顏泳紅 (2008) 《生活中的統計學》
2. 菅民郎・土方裕子 (2010) 《想被重用，你一定要有的市場判斷力》
3. 知識叢林《算術平均數與調和平均數的應用》張萌物、張偉 (2005)
4. 鳳凰網 《統計方法不同導致房價打架》
http://house.ifeng.com/rollnews/detail_2011_02/19/4756458_0.shtml
5. 星島環球網 《人保部:失業率資料相差 5.2%是"統計方法"不同》
http://www.stnn.cc/china/200901/t20090120_965601.html
6. 維基百科 跳水評分
<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E8%B7%B3%E6%B0%B4&variant=zh-hk#.E5.8B.95.E4.BD.9C.E7.B5.84.E5.88.A5>

7. MBA 智庫百科 幾何平均收益率
<http://wiki.mbalib.com/zh-tw/%E5%87%A0%E4%BD%95%E5%B9%B3%E5%9D%87%E6%94%B6%E7%9B%8A%E7%8E%87>
8. 單維彰 (2009) 《想要知道幾何平均這個名字是怎麼來的嗎？》
http://www.sanmin.com.tw/learning/science/highschool/math_text/p19.pdf

優異作品：包剪揼分勝負？

學校名稱：沙田培英中學

學生姓名：曾翠玉、梁璟熹、黃天朗

級別：中五

顧問老師：鄭偉中

引言

我們經常在生活中運用「包剪揼」。它原理簡單，而且可快速分出勝負。但是，隨著人數上升，出現「打和」的情況亦好像愈來愈多，愈難分出勝負。為甚麼會有這個現象？

有見及此，我們希望以統計學的角度探討隨著玩家人數上升，「包剪揼」分出勝負機會率的轉變。同時，找出能比「包剪揼」更快分出勝負的方法。



體育課時，一班女生在玩數字球，正在猜包剪揼，輸的一人要先拋球叫號數。女生們：「包剪揼，包剪揼...」可是她們猜了幾回都未能分出勝負，開始不耐煩。

假設有兩個人(甲和乙)玩包剪揼，當中有一個人能勝出的組合數量為 $2\text{ }_2\text{C}_1$ ，不是甲贏就是乙贏。但是，甲勝出的手勢可以是 A、B 或 C (設 A 為包，B 為剪，C 為揼； $A > B > C > A$)，同樣地，乙勝出的手勢可以

	甲	乙
二人包剪揼 所有可能的組合 (藍色代表能分出勝負的組合)	A	A
	A	B
	A	C
	B	A
	B	B
	B	C
	C	A
	C	B
	C	C

是 A、B 或 C。這個情況能分出勝負的組合數量應為 6 (即 2×3)。

總觀，甲可以出 3 個不同手勢，而不論甲出其中任何一個手勢，乙亦可以出 3 個不同手勢。因此，總可能組合的數量應為 9 (即 3×3)。

因此，兩人猜包剪揼能分出勝負的機率等於 6 (能分出勝負的組合) 除以 9 (總可能組合)，即 $\frac{6}{9} = 0.667$ (能分出勝負的機率)。

當有 3 人 (甲、乙和丙) 猜包剪揼，一人在遊戲中勝出的組合數量為 3 (${}_3C_1$)，即甲或乙或丙勝；兩個人能同時勝出的組合數量亦為 3 (${}_3C_2$)，即甲和乙勝或甲和丙勝或乙和丙勝。合共能分出勝負的組合數量是 6 (即 $3 + 3$)。但由於他們勝出的手勢可能是 A、B 或 C，因此能分出勝負的組合是 18 (即 6×3)。

二人包剪揼的總可能組合數量為 9。當多一個人(丙)的加入，在原本的每一個可能組合裡，丙都有出 A、B 或 C 的可能。因此，三人包剪揼的總可能組合數量為 27 (即 9×3)。在這，我們能知道每當玩家數量加一，總可能組合數量要乘三。

因此，三人猜包剪揼能分出勝負的機率等於 18 (能分出勝負的組合) 除以 27 (總可能組合)，即 $\frac{18}{27} = 0.667$ (能分出勝負的機率)。

	甲	乙	丙
	A	A	A
	A	A	B
	A	A	C
	A	B	A
	A	B	B
	A	B	C
	A	C	A
	A	C	B
	A	C	C
	B	A	A
	B	A	B
	B	A	C
	B	B	A
	B	B	B
	B	B	C
	B	C	A
	B	C	B
	B	C	C
	C	A	A
	C	A	B
	C	A	C
	C	B	A
	C	B	B
	C	B	C
	C	C	A
	C	C	B
	C	C	C

三人包剪揔
所有可能的組合
(藍色代表能分出勝
負的組合)

運用「Excel」進行窮舉，我們製造出以下的統計表。「No.」的百位代表「包」、十位代表「剪」、個位代表「揼」；數字則代表出該手勢的人數。而「No.」的三個位中一定存在一個「零」，因為要分出勝負便不能同時存在包、剪、揼。「Freq.」則表示一個能分出勝負組合所出現的次數；「Sum」就表示能分出勝負的組合的總和。

2p		3p		4p		5p	
No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.
11	2	12	3	13	4	14	5
101	2	21	3	22	6	23	10
110	2	201	3	31	4	32	10
Sum:	6	102	3	301	4	41	5
		120	3	202	6	401	5
		210	3	103	4	302	10
		Sum:	18	130	4	203	10
				220	6	104	5
				310	4	140	5
				Sum:	42	130	10
						320	10
						410	5
						Sum:	90

6p		7p		8p		9p	
No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.
15	6	16	7	17	8	18	9
24	15	25	21	26	28	27	36
33	20	34	35	35	56	36	84
42	15	43	35	44	70	45	126
51	6	52	21	53	56	54	126
501	6	61	7	62	28	63	84
402	15	601	7	71	8	72	36
303	20	502	21	701	8	81	9
204	15	403	35	602	28	801	9
105	6	304	35	503	56	702	36
150	6	205	21	404	70	603	84
240	15	106	7	305	56	504	126
330	20	160	7	206	28	405	126
420	15	250	21	107	8	306	84
510	6	340	35	170	8	207	36
Sum:	186	430	35	260	28	108	9
		520	21	350	56	180	9
		610	7	440	70	270	36
		Sum:	378	530	56	360	84
				620	28	450	126
				710	8	540	126
				Sum:	762	630	84
						720	36
						810	9
						Sum:	1530

觀察這兩個統計表，我們發現能分出勝負的組合可劃為三組，分別以黃色、綠色、藍色表示。由此證實能分出勝負的組合的總和是 3 的倍數。觀看黃色部分，我們發現「Freq.」的上升趨勢與「楊輝三角形」有關聯：

(前方兩個相鄰數的和等於後方夾在中間的數)

3p		4p		5p		6p	
No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.
12	3	13	4	14	5	15	6
21	3	22	6	23	10	24	15
		31	4	32	10	33	20
				41	5	42	15
						51	6

因此，我們可將之表達為：

3p		4p		5p		6p	
No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.	No.	Freq.
12	${}_3C_1$	13	${}_4C_1$	14	${}_5C_1$	15	${}_6C_1$
21	${}_3C_2$	22	${}_4C_2$	23	${}_5C_2$	24	${}_6C_2$
		31	${}_4C_3$	32	${}_5C_3$	33	${}_6C_3$
				41	${}_5C_4$	42	${}_6C_4$
						51	${}_6C_5$

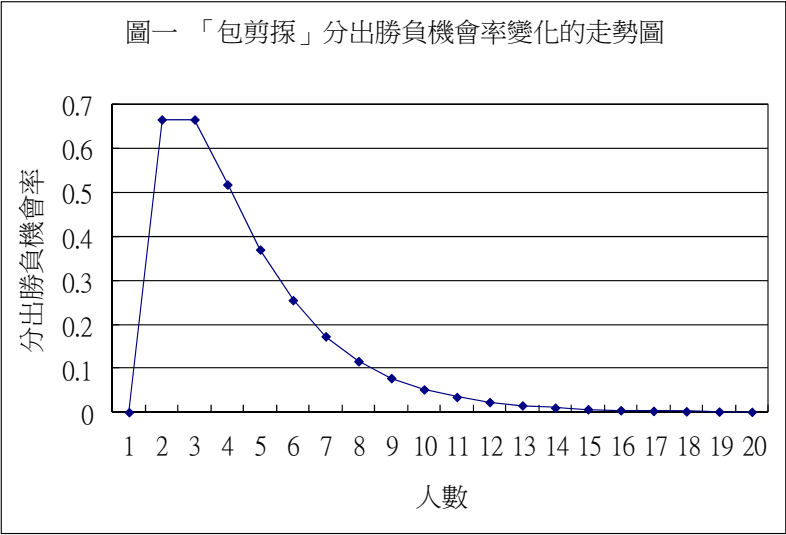
總結來說，我們歸納出隨著人數上升，「包剪揼」分出勝負的機會率變化的經驗公式。設 P 為玩家的數量、 Y 為分出勝負的機會率， 3^P 為總可能組合的數量，則：

$$Y = 3 \sum_{i=1}^{P-1} \frac{{}_P C_i}{3^P} = \frac{1}{3^{P-1}} \sum_{i=1}^{P-1} {}_P C_i$$

運用數學邏輯，我們可證明這經驗公式是成立的。在這算式中，「 i 」代表勝出的人數，「 P 」代表參與的人數， ${}_P C_i$ 可求得在「 P 」位玩家下，有「 i 」人勝出時有多少個組合。要分出勝負，就必須最少一人贏，最多「 $P - 1$ 」人贏，於是把「 $i = 1$ 」至「 $i = P - 1$ 」全部以 ${}_P C_i$ 的函數加起，便得到能分出勝負的組合數。但是，由於勝利的一方可能出包、剪或揼，所以真正能分出勝負的組合數需要乘 3，即是等於：

$$3 \sum_{i=1}^{P-1} {}_P C_i$$

根據這條公式，我們找出了「包剪揼」分出勝負機會率變化的走勢圖：



上圖顯示隨著「包剪揼」玩家的人數增加，分出勝負的機會率會趨向 0。因此，「包剪揼」最適當玩家人數是二至三人，所以人數愈多，愈難分出勝負。

其實還有另一個可以分出勝負的方法，就是「包揼」。玩家可出「包」或者「揼」，手勢佔較多的一方便能勝出，俗稱「包揼少走」。而「包揼」最少需要 3 個玩家

才能進行。而要找出「包揀」分出勝負的機會率的原理跟「包剪揀」相似。

與包剪揀一樣，包揀的「分出勝負機率」等於「分出勝負組合」除以「總可能組合」的數量。

假設有 3 人 (甲、乙和丙)在玩「包揀」，而勝出的人數一定是多於一半的玩家人數(即 2 人)。於是，二人能勝出的組合數量為 $3\text{ }({}_3\text{C}_2)$ ，即甲和乙、

	甲	乙	丙
三人包揀 所有可能的組合 (藍色代表能分出 勝負的組合)	A	A	A
	A	A	B
	A	B	A
	A	B	B
	B	A	A
	B	A	B
	B	B	A
	B	B	B

乙和丙或丙和甲。但是，二人勝出的手勢可以是 A 或 B，所以能分出勝負的組合數量為 6 (即 3×2)。

總可能組合方面，一個人的手勢有兩個可能(A 或 B)，當兩個人猜包揀的時候，總可能組合數量便是 4 (即

2×2)；當三個人猜的時候，在原本的每一個可能組合裡，第三個人(丙)都有出 A、B 的可能。因此，總可能組合的數量應為 8 (即 4×2)。

因此，三人包探能分出勝負的機率等於 **6 (能分出勝負的組合)** 除以 **8 (總可能組合)**，即 $\frac{6}{8} = 0.75$ (**能分出勝負的機率**)。

當四人(甲、乙、丙和丁)在猜包探，因為勝出人數要多於一半的玩家人數(3 人)，所以有三個人勝出的組合數量為 4 (即 $4C_3$)。同樣地，三人勝出的手勢可以是 A 或 B，所以能分出勝負的組合數量應為 8 (即 4×2)。

	四人包揀所有可能的組合 (藍色代表能分出勝負的組合)							
甲	A	A	A	A	A	A	A	A
乙	A	A	A	A	B	B	B	B
丙	A	A	B	B	A	A	B	B
丁	A	B	A	B	A	B	A	B
甲	B	B	B	B	B	B	B	B
乙	A	A	A	A	B	B	B	B
丙	A	A	B	B	A	A	B	B
丁	A	B	A	B	A	B	A	B

當四人猜包揀時，在原本三個人猜的總可能組合「8」裡，第四個人(丁)都有出 A、B 的可能。因此，總可能組合的數量為 16 (即 8×2)。

因此，四人能分出勝負的機率等於 8 (能分出勝負的組合) 除以 16 (總可能組合)，即 $\frac{8}{16} = 0.5$ (能分出勝負的機率)。

運用導出「包剪揼」公式的邏輯：「i」代表勝出的人數，「P」代表參與的人數， pC_i 可求得在「P」位玩家下，有「i」人勝出時有多少個組合。要分出勝負，最少多於一半的贏，最多「 $P - 1$ 」人贏，於是把「 $i =$ 多於一半的人數」至「 $i = P - 1$ 」全部以 pC_i 的函數加起，便得到能分出勝負的組合數。但由於勝利的一方可能出「包」或「揼」，所以真正能分出勝負的組合數需要乘二。

於是，我們歸納出隨著人數上升，「包揼」分出勝負的機會率變化的經驗公式。

設 P (雙數)為玩家的數量、Y 為分出勝負的機會率、 2^P 為所有可能組合的數量，則：

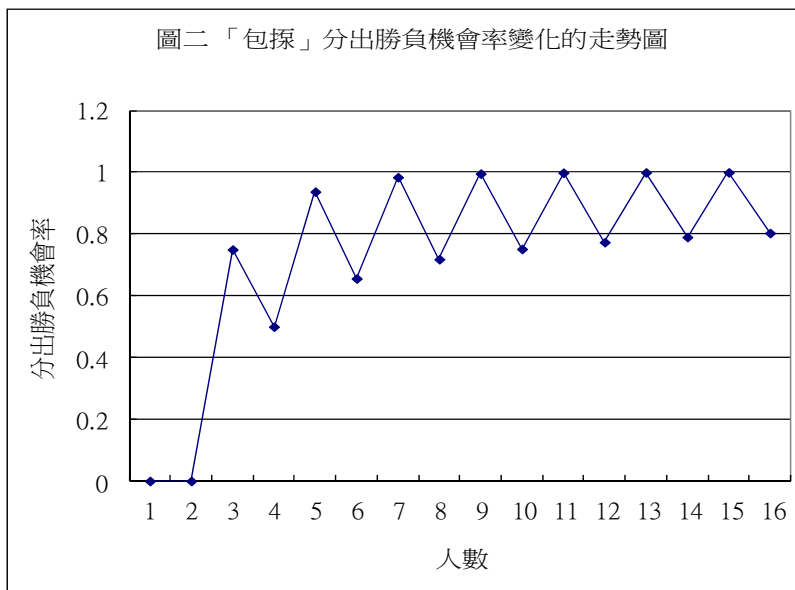
$$Y = 2 \sum_{i=\frac{P}{2}+1}^{P-1} \frac{{}^PC_i}{2^P}$$

但玩家數量 P 是單數時，最少有 $\frac{P}{2} + 0.5$ (多於一半的)

人勝，最多可以有 $P-1$ 個人勝，則：

$$Y = 2 \sum_{i=\frac{P}{2}+0.5}^{P-1} \frac{P C_i}{2^P}$$

根據兩條公式，我們找出了「包探」分出勝負機會率變化的走勢圖：



左圖顯示，玩家人數是單數時比雙數的機會率高。整體而言，隨著「包揀」玩家的人數增加，分出勝負的機會率亦愈大。因此，「包揀」跟「包剪揀」相反，人數愈多，愈容易分出勝負。然而，「包揀」所謂的「勝負」其實只是分出兩批人，一批多數；一批少數。

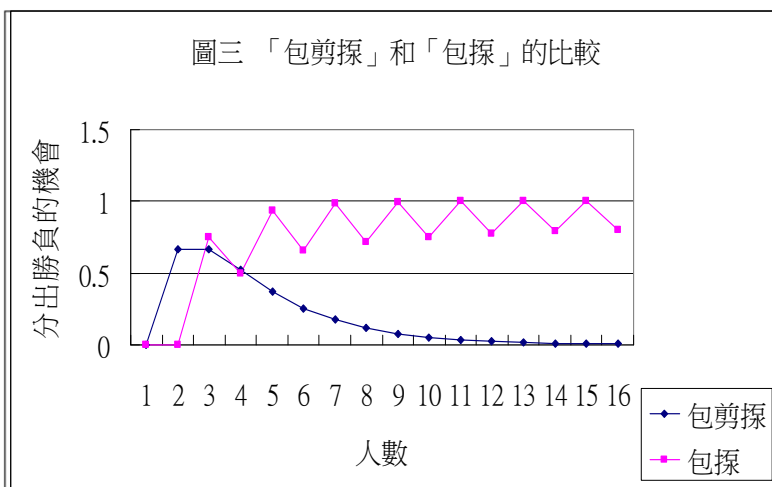
「包揀」的奧妙之處並不在於能夠在人多時分出勝負，而是可以有效地減少玩家的數量。試想想，一旦出動「包揀」，理論上兩盤之內就可以把玩家人數減半，例如現在有一百個女生，在「多贏少輸」的規則下，輸者要留下來。一盤後最多只會剩下四十九個女生，兩盤後最多剩下廿四個女生，三盤後最多剩下十一個女生，四盤後最多剩下五個女生，五盤後剩下兩個女生，然後便可以猜「包剪揀」來決定誰先拋球叫號數。使用「包揀」配合「包剪揀」，最多猜七盤便可在一百人中知道誰先拋球叫號數；相反，一百個女生猜「包剪揀」，能分出勝負的機率为：

$$Y = 3 \sum_{i=1}^{100-1} \frac{100 C_i}{3^{100}}$$

$$= 0.00000000000000000000738$$

相信要猜一星期才能找出誰先拋球叫號數。

現時我們人數眾多，應先以「包揀」減少玩家的數量，以「包揀少走」找出少(輸)的一方，在人數少時再以「包剪揀」來分出誰先拋球叫號數。但是，我們要留意，根據圖三顯示，原來三個人的時候「包揀」分出勝負是最快的；四個人的時候「包剪揀」又略勝一籌。



總結

我們發現「包剪揼」的實用性其實比想像中低，隨著玩家人數上升，「包剪揼」分出勝負的機會率越來越低，很快趨向零。相反，「包揼」的實用性比想象中高，我們平時如果有三個人都會以「包剪揼」分出勝負，然而，在三個人的情況，真正能最快找出勝負的其實是「包揼」，我們下次可以試一試。

總結，最有效率分出勝負之方法，是當玩家人數多於 4 人，應先以「包揼」減少人數，到剩下 4 人或以下時，即轉以「包剪揼」分勝負。

(字數：2859)

參考資料：

1. 國際「剪刀、石頭、布」協會

<http://www.worldrps.com/>

2. 維基百科「剪刀、石頭、布」

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8C%85%E5%89%AA%E8%B8%8F>

3. 維基百科「楊輝三角形」

<http://zh.wikipedia.org/zh-hk/%E6%9D%A8%E8%BE%89%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>

優異作品：「分」數陷阱

學校名稱：香港神託會培基書院

學生姓名：陳伊琳、練欣瑜

級別：中四

顧問老師：區松安

引言

在日常生活中，我們的學習每每充斥著一個又一個的測驗和考試，向來也認為一次失敗後，又有下一次機會。『源源不絕的機會』源於多次的測驗，但其實多做卷又是否對學生有利呢？就讓上帝、天使和他的子民向你們解釋吧！

在寂靜的晚上，醫院傳來陣陣哭泣聲，過了良久，傳進耳內的詩歌讓人平靜許多。兩人身穿白袍，呈透明狀的，來到了一座金碧輝煌的宮殿的大門前，大門頂部的牌匾上寫著「天堂」二字。天使把看守天堂大門專用的鑰匙遞給了A。

『甚麼？！我生前明明就是一個循規蹈矩的人，行事為人一向依聖經所說的，你告訴我，我為何當不了看守天堂守門員啊？？！沒可能的啊！！上帝，你告訴我，為甚麼呢？』上帝緩緩走來，B馬上激動地大喊大叫着。原來上帝要找一個人當天堂的守衛者，面試過後，他決定找A去做。由於上帝見B如此不甘，就顯現在他面前，說：『好，既然你有服侍我的心，我就給你機會……』

『既然你不服，我便讓你們做兩份測驗卷，看你們誰高分便能進來我的天堂當看守者。』『好！』二人齊聲道。

上帝分別給他們兩份卷子，題目是一模一樣的，各有10題題目，限時為一小時。兩人很努力去做，豈料B在回答兩題題目後，中途肚子不舒服，要到洗手間去。天父動了慈心，為免他不夠時間，決定把給B的試卷分作兩份卷，第一份卷有2題題目，第二份卷有8題題目。B肚痛後，回來繼續作答餘下第二份卷的8題題目。而A則維持一次過考核10題題目。

結果公佈了，A在10題裏總共做對了5題，B在10題裏一共做對了6題。結果如下：

	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題
A	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
B	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗

B滿心歡喜以為這次可以當上天堂看守者。沒多久，天使出來公佈分數：『A有50分，B有37.5分。換言之，A實至名歸，能當上天堂守門員。』

B立刻大呼不公平：『怎麼可能？我明明答對了6題，A才答對5題，怎麼說我也該比他高分吧！難道去廁所都要扣分？』天使心想：我只負責傳話而已，哪知道那麼多啊！說道：『這個...我也不太清楚。』

過了不久，上帝顯現在他們面前，道：『這個嘛.....很簡單!』

A	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題
	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓

由於A只是一次完成一份10題题目的試卷，答中5題：

A的得分： $5/10 \times 100\% = 50$ 分

但不幸地，B在中途去了洗手間，故得我的格外開恩，允許你把卷子一分为二，繼續完成測驗。

B	第一份試卷		第二份試卷							
	第 一 題	第 二 題	第 三 題	第 四 題	第 五 題	第 六 題	第 七 題	第 八 題	第 九 題	第 十 題
	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
	$\frac{0}{2} \times 100\%$ = 0 分		$\frac{6}{8} \times 100\%$ = 75 分							

兩份試卷獨立計算後的分數：

B 的得分： $(0 + 75) \div 2 = 37.5$ 分

所以，即使 B 答對的比 A 多，但總分會比 A 低。

B 聽後更加生氣，仰天道：『這個測驗不公平! 上帝分明作弄我，刻意把最難的題目設在首兩題題目。從表一得知，假設我們兩人都不能答對最難題目，而且答對的題數一樣，我的總分根本沒有機會比 A 高，無論如何，都沒有取勝的機會。從表二更加發現，即使我幸運地答中最難的兩題题目的其中一題，而我維持答對的總題數是 6 題，我的總分也會比 A 答對 5 題為低。除非我能答中最難的的兩題題目，才能反敗為勝。』

第一份試卷 (設有二題題目) 答中題數	第二份試卷 (設有八題題目) 答中題數	兩份試卷獨立 計算後的分數 (滿分為100分)	兩份試卷合併 計算後的分數 (滿分為100分)	不同計算方法 的分數相差
0	0	0	0	0
0	1	6.25	10	-3.75
0	2	12.5	20	-7.5
0	3	18.75	30	-11.25
0	4	25	40	-15
0	5	31.25	50	-18.75
0	6	37.5	60	-22.5
0	7	43.75	70	-26.25
0	8	50	80	-30

表一

第一份試卷 (設有二題題目) 答中題數	第二份試卷 (設有八題題目) 答中題數	兩份試卷獨立 計算後的分數 (滿分為100分)	兩份試卷合併 計算後的分數 (滿分為100分)	不同計算方法 的分數相差
0	6	37.5	60	-22.5
1	5	56.25	60	-3.75
2	4	75	60	+15

表二

A 反問 B 為何會出現這個現象。

B 回答：『出現這個怪現象，全怪上帝玩弄數字遊戲。從表三看見，A 所答的題目，無論是難的題目或是易的题目的比重都是均等，都是 10 分。而我所答的題目，在表四會發現每題的比重不是一樣，最難的題目值 25

分，最易的題目值 6.25 分。』

A	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題	總分
比重	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	100分

表三

B	第一份試卷		第二份試卷								總分
	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題	
比重	25分	25分	6.25分	6.25分	6.25分	6.25分	6.25分	6.25分	6.25分	6.25分	100分

表四

A 笑道：『如果你沒有在中途去洗手間，一氣呵成完成試卷，那你必定比我高分!甚或，要是你先完成 5 題後才肚痛，那分數亦已遠超越我了。我得 50 分，而你得 60 分，那便是最合理的結果了。』

B	第一份試卷					第二份試卷				
	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題
	✕	✕	✓	✕	✓	✓	✓	✓	✓	✕
	$\frac{2}{5} \times 100\% = 40 \text{ 分}$					$\frac{4}{5} \times 100\% = 80 \text{ 分}$				

兩份試卷獨立計算後的分數:

B 的得分： $(40 + 80) \div 2 = 60 \text{ 分}$

B 回答：『原來如此！從表五及表六分別可以發現無論一氣呵成完成試卷或完成 5 題後才肚痛，每題比重都是一樣，都是 10 分，與 A 作答試卷的比重都是一樣。原來作弄我的不是上帝，所有事情都是我咎由自取，早知我強忍肚痛也要完成試卷，便能當上天堂守門員。唉！』

B	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題	總分
比重	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	100分

表五

B	第一份試卷					第二份試卷					總分
	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	第七題	第八題	第九題	第十題	
比重	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	10分	100分

表六

如何計分，也是一個技巧，一個學問，同一份題目，不同的計分方法，有人會因為二八分帳、三七分帳、四六分帳的方法而失分或得益(詳見附錄一至附錄三)，關鍵之處是盡量在較小題目的卷答中最多題目，便能在比重較重的題目得分，從而在分數上得益。

而使用五五分帳的方法去計算得分會與答對的題數相乎(詳見附錄四)，比較上合理，那如何才是公平呢？

那麼把這例子套在我們的學習中。在各科中，老師教完一章時都會給我們一個小測驗，說是讓我們複習複習，重溫該章所學的。有時候，老師們會因為想把難易的題目分成數次小測驗。可是，這對成績是否真的有幫助？正如故事中的 A 和 B，他們完成同一份測驗，作答同樣的題目，卻因 B 分了兩份卷考的緣故，讓原本理應較高分的 B 比少答對一題的 A 還要低分。由此可見多次的小測驗的做法未必對學生有利，可能反而有機會把原本的高分都

拖垮了。究竟在完成一章安排一個小測驗或完成一課才安排一個測驗的做法比較公平呢？

其實，若能把平日的小測驗合併為一份試卷，那即使有某一章的表現未如理想，亦不至於拖垮整科分數。老師們亦可把每份小測驗的總分訂為一致的分數，這樣亦能使答對的題數與分數相符，與上述的合併卷子方法有異曲同工之效。

(字數：2389)

附錄一： 二八分帳計算方法的分數相差

第一份試卷 (設有兩題題目) 答中題數	第二份試卷 (設有八題題目) 答中題數	兩份試卷獨立 計算後的分數 (滿分為100分)	兩份試卷合併 計算後的分數 (滿分為100分)	不同計算方法的分數相差
0	0	0	0	0
0	1	6.25	10	-3.75
1	0	25	10	+15
0	2	12.5	20	-7.5
1	1	31.25	20	+11.25
2	0	50	20	+30
0	3	18.75	30	-11.25
1	2	37.5	30	+7.5
2	1	56.25	30	+26.25
0	4	25	40	-15
1	3	43.75	40	+3.75
2	2	62.5	40	+22.5
0	5	31.25	50	-18.75
1	4	50	50	0
2	3	68.75	50	+18.75
0	6	37.5	60	-22.5
1	5	56.25	60	-3.75
2	4	75	60	+15
0	7	43.75	70	-26.25
1	6	62.5	70	-7.5
2	5	81.25	70	+11.25
0	8	50	80	-30
1	7	68.75	80	-11.25
2	6	87.5	80	+7.5
1	8	75	90	-15
2	7	93.75	90	+3.75
2	8	100	100	0

附錄二： 三七分帳計算方法的分數相差

第一份試卷 (設有三題題目) 答中題數	第二份試卷 (設有七題題目) 答中題數	兩份試卷獨立 計算後的分數 (滿分為 100 分)	兩份試卷合併 計算後的分數 (滿分為 100 分)	不同計算方 法的分數相 差
0	0	0.00	0	0
0	1	7.14	10	-2.86
1	0	16.67	10	+6.67
0	2	14.29	20	-5.71
1	1	23.81	20	+3.81
2	0	33.33	20	+13.33
0	3	21.43	30	-8.57
1	2	30.95	30	+0.95
2	1	40.48	30	+10.48
3	0	50.00	30	+20.00
0	4	28.57	40	-11.43
1	3	38.10	40	-1.90
2	2	47.62	40	+7.62
3	1	57.14	40	+17.14
0	5	35.71	50	-14.29
1	4	45.24	50	-4.76
2	3	54.76	50	+4.76
3	2	64.29	50	+14.29
0	6	42.86	60	-17.14
1	5	52.38	60	-7.62
2	4	61.90	60	+1.90
3	3	71.43	60	+11.43
0	7	50.00	70	-20.00
1	6	59.52	70	-10.48
2	5	69.05	70	-0.95
3	4	78.57	70	+8.57
1	7	66.67	80	-13.33
2	6	76.19	80	-3.81
3	5	85.71	80	+5.71
2	7	83.33	90	-6.67
3	6	92.86	90	+2.86
3	7	100.00	100	0

附錄三： 四六分帳計算方法的分數相差

第一份試卷 (設有四題題目) 答中題數	第二份試卷 (設有六題題目) 答中題數	兩份試卷獨立 計算後的分數 (滿分為 100 分)	兩份試卷合併 計算後的分數 (滿分為 100 分)	不同計算 方法的分 數相差
0	0	0.00	0	0
0	1	8.33	10	-1.67
1	0	12.50	10	+2.50
0	2	16.67	20	-3.33
1	1	20.83	20	+0.83
2	0	25.00	20	+5.00
0	3	25.00	30	-5.00
1	2	29.17	30	-0.83
2	1	33.33	30	+3.33
3	0	37.50	30	+7.50
0	4	33.33	40	-6.67
1	3	37.50	40	-2.50
2	2	41.67	40	+1.67
3	1	45.83	40	+5.83
4	0	50.00	40	+10.00
0	5	41.67	50	-8.33
1	4	45.83	50	-4.17
2	3	50.00	50	0
3	2	54.17	50	+4.17
4	1	58.33	50	+8.33
0	6	50.00	60	-10.00
1	5	54.17	60	-5.83
2	4	58.33	60	-1.67
3	3	62.50	60	+2.50
4	2	66.67	60	+6.67
1	6	62.50	70	-7.50
2	5	66.67	70	-3.33
3	4	70.83	70	+0.83
4	3	75.00	70	+5.00
2	6	75.00	80	-5.00
3	5	79.17	80	-0.83
4	4	83.33	80	+3.33
3	6	87.50	90	-2.50
4	5	91.67	90	+1.67
4	6	100.00	100	0

附錄四： 五五分帳計算方法的分數相差

第一份試卷 (設有五題題目) 答中題數	第二份試卷 (設有五題題目) 答中題數	兩份試卷獨立 計算後的分數 (滿分為 100 分)	兩份試卷合併 計算後的分數 (滿分為 100 分)	不同計算 方法的分 數相差
0	0	0	0	0
1	0	10	10	0
0	1	10	10	0
2	0	20	20	0
1	1	20	20	0
0	2	20	20	0
3	0	30	30	0
2	1	30	30	0
1	2	30	30	0
0	3	30	30	0
4	0	40	40	0
3	1	40	40	0
2	2	40	40	0
1	3	40	40	0
0	4	40	40	0
5	0	50	50	0
4	1	50	50	0
3	2	50	50	0
2	3	50	50	0
1	4	50	50	0
0	5	50	50	0
5	1	60	60	0
4	2	60	60	0
3	3	60	60	0
2	4	60	60	0
1	5	60	60	0
5	2	70	70	0
4	3	70	70	0
3	4	70	70	0
2	5	70	70	0
5	3	80	80	0
4	4	80	80	0
3	5	80	80	0
5	4	90	90	0
4	5	90	90	0
5	5	100	100	0

優異作品：熱咖啡的統計學

學校名稱：香港神託會培基書院

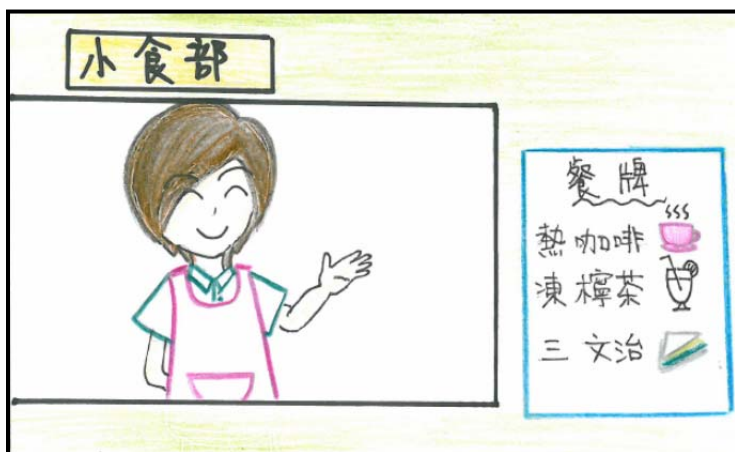
學生姓名：譚曉敏、杜展程、伍倚心

級別：中五

顧問老師：黃智君

引言

近日寒流襲港，不少學生都爭相走到學校小食部買一杯熱咖啡暖身。每當氣溫愈低，凍檸茶的銷量亦愈低，而熱咖啡則愈暢銷。由此可見，氣溫與飲品銷量之間必定存在特殊的關係。透過相關係數及迴歸分析的運用，筆者將為大家解釋一杯熱咖啡背後所隱藏的統計學。



(近日寒流襲港，氣溫不斷下降。因此，師生都紛紛到小食部購買熱飲，怎料到小程和譚老師的時候，只剩下一杯熱咖啡...)

小程： 譚老師，避免我在你的數學課裡打呼嚕，你還是把這杯熱咖啡留給我吧！

譚老師： 小程，喝咖啡並不像你的習慣，你是否因為天氣太冷才想喝杯熱飲呢？

小程： 對呀！那你就把這杯熱咖啡讓給我暖暖身吧！

(小食部的伍老闆看見兩位師生議論紛紛，便上前幫忙解決問題。)

伍老闆： 別著急！今天太多人來買熱飲了，再等一下便有新鮮的熱咖啡出爐！

小程： 伍老闆！今次的寒流必定令你發大財！氣溫愈低，熱咖啡必定愈暢銷。

伍老闆： 小程，你只是看到事實的一半呀！在這次寒流中，熱咖啡雖然很暢銷，但凍檸茶的銷量則不斷下降呀！來看看我的記錄，氣溫與銷售量之間是否有著一些特殊的關係呢？

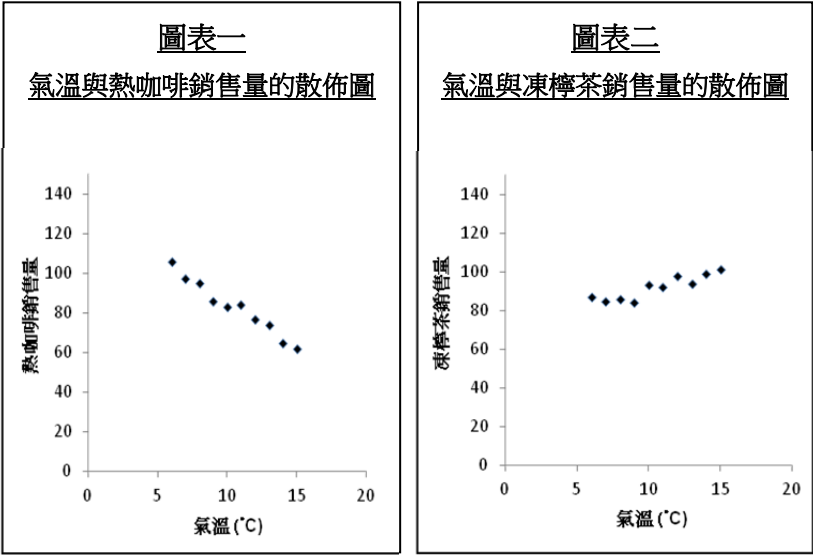
日期	氣溫 (°C)	銷售量		
		熱咖啡	凍檸茶	三文治
1	15	62	101	96
2	14	65	99	55
3	12	77	98	80
4	13	74	94	88
5	11	84	92	90
6	9	86	84	99
7	10	83	93	120
8	7	97	85	104
9	8	95	86	66
10	6	106	87	75

譚老師： 用以上的銷售記錄，伍老闆便可以運用散佈圖(Scatter Diagram)分析氣溫與銷售量的關係。

伍老闆： 甚麼是散佈圖呢？

小程： 我知道！那就是以原因作為 x 軸(x-axis)，以結果作為 y 軸(y-axis)，繪畫出來的點狀圖。因為現在天氣寒冷，熱咖啡才會熱賣，所以我們就會以氣溫為橫軸，並以熱咖啡銷售數量為縱軸，來畫一張散佈圖。

譚老師： 小程，你真聰明！其實，我們亦可用散佈圖來分析凍檸茶的銷售量。

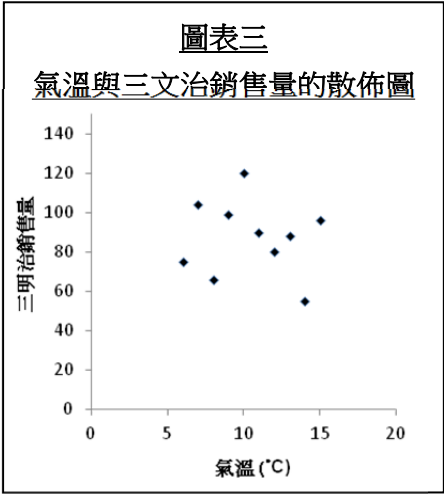


小程： 從散佈圖清楚看得到氣溫與飲品銷售量之間的特殊關係。在圖表一，我們可得知氣溫愈低，熱咖啡的銷售量愈好；相反地，從圖表二可看到氣溫愈高，凍檸茶的銷售量才會越好。

譚老師： 從氣溫與熱咖啡和凍檸茶銷售量的兩張散佈圖中，你們又能否看得出圖中黑點好像是沿著一條直線排列嗎？

伍老闆： 對呀！黑點的排列很像沿著一條隱形的直線！那又代表甚麼呢？

譚老師：散佈圖上的黑點愈是傾向直線狀排列，就表示兩個變數(variables)的關聯度愈強。但在以下氣溫與三文治銷售量的散佈圖中，數據分佈在圖中的不同位置，無法形成一條明顯的直線。換句話說，氣溫對三文治銷售量的影響不大。



小程：譚老師！在初中時，我已經學會了這簡單的統計圖表。除了散佈圖外，氣溫與熱咖啡銷售量的關聯性可否用一個具體的數值來表現呢？

譚老師：小程，你真好學啊！其實，只要我們學會相關係數(correlation coefficient)，就可以用一個數值來表現兩個變數之間的關聯性。

小程：那快些教我怎樣計算相關係數吧！

譚老師： 好吧！相關係數的計算對中學生來說有點困難！請留心聽呀！假設現在有兩種相互對應的 n 組資料： $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 這時相關係數 r 的定義如下：

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Σ (大寫的 SIGMA) 是代表「合計值」的符號，而 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 則分別代表兩種數據的平均數，即

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{和} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}。$$

小程： 相關係數的公式很複雜啊！我受不了啦！



譚老師： 小程，別灰心啊！只要我們以電腦作輔助，一步一步地計算，聰明的你一定能明白相關係數的計算。以氣溫與熱咖啡銷售量為例，我們可以利用電腦的試算表(Excel)計算出所需的合計值，然後...

日期	氣溫 (°C)	熱咖啡 銷售量
	x_i	y_i
1	15	62
2	14	65
3	12	77
4	13	74
5	11	84
6	9	86
7	10	83
8	7	97
9	8	95
10	6	106
合計值	105.0	829.0
平均數	10.50	82.90

日期	計算步驟				
	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	4.5	-20.9	20.25	436.81	-94.05
2	3.5	-17.9	12.25	320.41	-62.65
3	1.5	-5.9	2.25	34.81	-8.85
4	2.5	-8.9	6.25	79.21	-22.25
5	0.5	1.1	0.25	1.21	0.55
6	-1.5	3.1	2.25	9.61	-4.65
7	-0.5	0.1	0.25	0.01	-0.05
8	-3.5	14.1	12.25	198.81	-49.35
9	-2.5	12.1	6.25	146.41	-30.25
10	-4.5	23.1	20.25	533.61	-103.95
合計值	0.0	0.0	82.5	1760.9	-375.5

小程： 然後我們可將有關數值代入公式，便可計算出相關係數：

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-375.5}{\sqrt{82.5} \times \sqrt{1760.9}} = -0.985$$

譚老師： 小程，你真聰明啊！我們可以用相同的方法找出氣溫與凍檸茶及三文治與氣溫的相關係數。

	銷售量		
	熱咖啡	凍檸茶	三文治
與氣溫的 相關係數	-0.985	0.904	-0.126

小程： 那麼，相關係數的數值又代表甚麼呢？

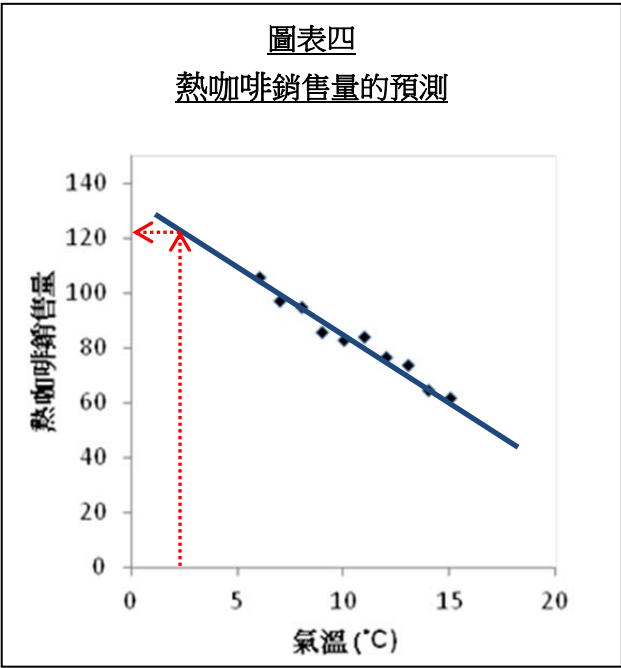
譚老師： 其實，相關係數的數值界乎-1至1之間。當兩者關聯性愈強，也就是散佈圖傾向線性分佈，相關係數的數值會愈接近-1或1。相反地，當相關係數會愈接近0，則表示兩個變數之間的關聯性愈弱。

完全負相關	無相關	完全正相關
-1	~ 0 ~	1

小程： 由於氣溫與熱咖啡銷售量的相關係數很接近-1，兩者的關聯性極強。相反地，氣溫與三文治銷售量的相關係數很接近0，即代表兩者的線性關係極低。

伍老闆：聽了譚老師這麼詳盡的解說，我們知道熱咖啡銷售量跟氣溫有很大的關係了。若果我們知道下週的氣溫，是否能夠預測熱咖啡的銷情呢？

譚老師：伍老闆，你真有商業頭腦啊！你說的一點也沒錯，銷售量是有預測的方法。從這張散佈圖中，我們知道熱咖啡銷售量跟氣溫有著一定的線性關係。在統計學上，這條「隱藏」的直線稱為「迴歸線」。只要我們知道這條「迴歸線」的畫法和其直線方程，就能用下週的氣溫預測熱咖啡的銷售量。在統計學上，這種預測的方法稱為「線性迴歸分析」。



小程： 直線方程？是否可以運用高中所學的數學知識？那麼，我們只要計算出方程中的 m 及 c 的數值便成了！

譚老師： 小程，我再考考你吧！你還記得 m 及 c 在圖中代表甚麼呢？

小程： 這個太簡單了！ m 代表直線的斜率(slope)，而 c 則代表直線的 y 軸截距(y-intercept)！對嗎？

譚老師： 全對！小程不愧是高材生！以剛才氣溫與熱咖啡銷售量的例子， m 及 c 的數值並不難計算！

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{-375.5}{82.5} \\ &= -4.55 \end{aligned}$$

現在有了 m 的數值，我們就能輕易地找出 c 的數值！因為數據的平均值在迴歸線上，所以我們可以得出以下算式：

$$\begin{aligned} c &= \bar{y} - m\bar{x} \\ &= 82.90 - (-4.55)(10.50) \\ &= 130.675 \end{aligned}$$

小程： 換句話說，氣溫(x)及熱咖啡銷售量(y)的關係就可用以下的直線方程表達：

$$y = -4.55x + 130.675$$

伍老闆： 等等！雖然我們找出了迴歸線的直線方程，怎樣才可以預測熱咖啡的銷情呢？天氣報告說下週氣溫可能急降至 2°C 呀！小食部應該準備多少杯熱咖啡呢？

譚老師： 我們只要將 $x = 2$ 代入迴歸線的直線方程，便能預測熱咖啡的銷售量(y)呀！

$$\begin{aligned} y &= -4.55(2) + 130.675 \\ &= 121.575 \end{aligned}$$

伍老闆！當氣溫只有 2°C 時，你大約準備 122 杯熱咖啡就可以了！

小程： 122 杯太多啦！我想一杯也不用準備吧！因為...

伍老闆： 因為天氣太凍，學校應該停課吧！哈哈...說了那麼久，就讓伍老闆請兩位飲杯「忘情熱咖啡」吧！

小程： 伍老闆，萬歲！



伍老闆： 譚老師！除了天氣外，還有甚麼因素會影響熱咖啡的銷售量呢？在寒流期間，本店為師生提供了熱飲的減價優惠，究竟售價又如何影響其銷售量呢？

日期	熱咖啡 銷售量	氣溫 (°C)	熱咖啡 售價 (\$)
1	62	15	7
2	65	14	7
3	77	12	6
4	74	13	6
5	84	11	6
6	86	9	6
7	83	10	6
8	97	7	5
9	95	8	5
10	106	6	5

小程： 伍老闆，這個問題不用勞煩譚老師吧！要研究熱咖啡的銷售量與售價的關係，只要計算出其相關係數便可以了！

	氣溫	售價
與熱咖啡銷售量的相關係數	-0.985	-0.948

伍老闆： 這相關係數是很接近 -1 ，即代表熱咖啡銷售量及售價有著很密切的關係。但是銷售量同時受到天氣及售價影響，這是否代表我們之前利用迴歸線的估計不正確呢？

譚老師： 這並不表示剛才的估計不正確呀！只是我們現在知道銷售量同時受到兩個自變數(independent variables)影響，利用「複迴歸分析」(multiple regression analysis)就能更準確地預測熱咖啡的銷售量。

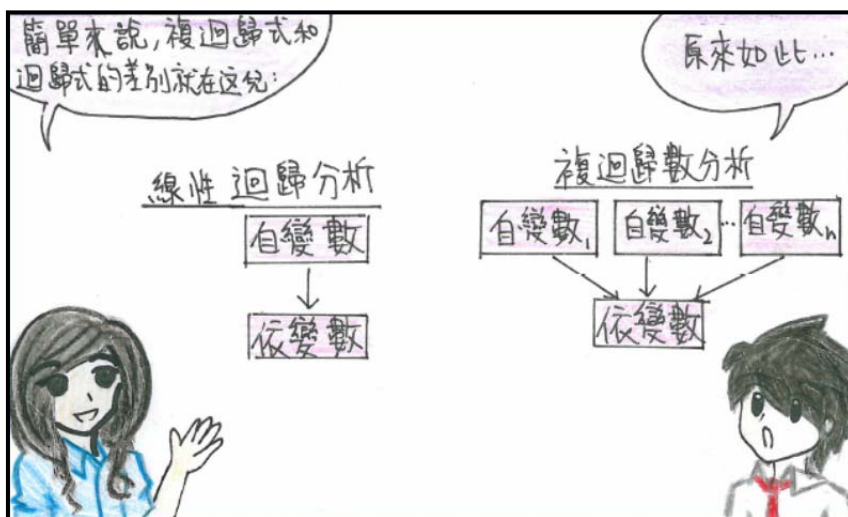
小程： 甚麼是「複迴歸分析」呢？

譚老師： 「複迴歸分析」是利用兩個或以上的因素去預測結果的方法。換句話說，我們現在可以利用氣溫及售價去預測熱咖啡的銷售量。

小程： 那麼，「複迴歸分析」的步驟跟之前的「線性迴歸分析」相似嗎？

譚老師：沒錯！唯一不同的是之前的「線性迴歸分析」只有氣溫一個自變數，而現在的「複迴歸分析」有氣溫及售價兩個自變數。我們可利用以下的方程代表依變數(y)與兩個自變數(x_1 及 x_2)的關係：

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ 當中 y 、 x_1 及 x_2 分別代表銷售量、氣溫及售價。



小程：但是，我們又怎可以找出方程中的三個係數 b_0 、 b_1 及 b_2 呢？這是否代表我們需要三條方程呢？

譚老師： 正確！只要善用 $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ 及數據的合計值就可得出以下的三元一次聯立方程組 (system of simultaneous linear equations in 3 unknowns)：

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot b_0 + b_1(\sum x_1) + b_2(\sum x_2) \\ \sum x_1 y = b_0(\sum x_1) + b_1(\sum x_1^2) + b_2(\sum x_1 x_2) \\ \sum x_2 y = b_0(\sum x_2) + b_1(\sum x_1 x_2) + b_2(\sum x_2^2) \end{cases}$$

小程： 那就好了！只要我們以電腦作輔助，便能得出這三條方程！

$$\begin{cases} 829 = 10b_0 + 105b_1 + 59b_2 \\ 8329 = 105b_0 + 1185b_1 + 638b_2 \\ 4803 = 59b_0 + 638b_1 + 353b_2 \end{cases}$$

然後，我們是否可以利用消除法(method of elimination)找出 b_0 、 b_1 及 b_2 的數值呢？

日期	銷售量	氣溫 (°C)	售價	計算步驟				
	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
1	62	15	7	225	49	105	930	434
2	65	14	7	196	49	98	910	455
3	77	12	6	144	36	72	924	462
4	74	13	6	169	36	78	962	444
5	84	11	6	121	36	66	924	504
6	86	9	6	81	36	54	774	516
7	83	10	6	100	36	60	830	498
8	97	7	5	49	25	35	679	485
9	95	8	5	64	25	40	760	475
10	106	6	5	36	25	30	636	530
合計值	829	105	59	1185	353	638	8329	4803

譚老師：沒錯！除了消除法外，我們亦可以利用電腦作計算：

$$b_0 = 149.06, b_1 = -3.39, b_2 = -5.19$$

換句話說，「複迴歸分析」得出的方程是：

$$y = 149.06 - 3.39x_1 - 5.19x_2$$

伍老闆： 根據這個「複迴歸分析」，我在下星期應該準備多少杯熱咖啡呢？

譚老師： 我們可先假設下週的氣溫是 2°C ，而售價維持在\$5 一杯，然後...

小程： 然後將 $x_1 = 2$ 及 $x_2 = 5$ 代入剛才的方程：

$$\begin{aligned}y &= 149.06 - 3.39(2) - 5.19(5) \\ &= 116.33\end{aligned}$$

伍老闆，你應該準備 116 杯熱咖啡！

譚老師： 全對！在氣溫及售價的影響下，我們可以運用「複迴歸分析」更準確地預測熱咖啡的銷售量。

伍老闆： 太好了！只要能預先知道需要的份量，小食部就能避免食物和飲料剩餘或短缺了！真想不到一杯熱咖啡背後所隱藏著那麼多的統計概念啊！

譚老師： 其實，相關係數及迴歸分析在商業、科學、工程等多個範疇都有廣泛的應用！小程，你要好好學習呀！

(字數：2476)

參考資料：

1. John E. Freund & Gary A. Simon (1952), Modern Elementary Statistics, Prentice-Hall, Inc.
2. 高橋信(2010)《世界第一簡單統計學 迴歸分析篇》，世茂出版有限公司
3. 菅民郎・土方裕子(2011)《真希望老師這樣教統計：了解到活用，公司只給你三天，想被重用嗎？》，大是文化有限公司
4. 今野紀雄(2010)《3 小時讀通統計(漫畫版)》，祥新印刷事業有限公司

邀請作品：從相關性走到因果關係

郭銘樂

引言

筆者由第一屆的統計創意寫作比賽開始便加入了籌備委員會，不經不覺已經是第三屆了。在此，感謝過去一同合作的統計處和教育局的同事，以及香港大學的老師。也感謝過去曾經參與的老師和同學，您的作品正是我們花心思、時間籌備的成果。說實的，同學們提交的作品，真的令我們感到很驚喜。因為，有時候連自己都沒想到，原來統計概念都可以這樣應用的。

適逢今屆增設最佳專題寫作獎，以「相關性」為專題題目。我亦藉此機會，引用生活上的例子深入淺出地講解一些相關性的知識，讓同學認識如何可以應用這看似簡單，但用法可以很深入的統計工具。

究竟甲和乙有很高的相關性，是否意味著他們真的很有關係呢？常說，相關性不能判定誰是因，誰是果。那麼有甚麼方法可以辨清因果？相關性就真的甚麼都不能嗎？本文引用了我在香港科技大學跟隨雷鼎鳴教授研究的時候，雷老師常提到的樓價與經濟有趣的關係，去一一解答以上的問題。

因與果

常記起雷老師提到的一個比喻。太陽升起來的時候，公雞就會叫了。好了，到了晚上，我們弄醒公雞，想辦法讓牠怪叫好了。可是，太陽還沒升起，為甚麼呢？相信這樣淺白的道理，每個人都明白吧。但套用在經濟層面上，弄錯因果關係的大有人在。

九十年代，香港經濟高速增長，樓市興旺，有些人總會提出，樓市好，經濟就好了。不是嗎，樓價升了，本地生產總值(GDP)也升了。要推動經濟，得先要推動樓市呀。打擊樓市，經濟也就沒了。相反，停止賣地，減少樓宇供應來推高樓價，經濟自然就會好了。是耶非耶？我們在晚上令公雞叫，太陽就會升上來的嗎？

單憑看見樓價升，GDP 升便作出樓市好，經濟就會好的結論，大有人在。但是，因果關係錯綜複雜，要得出結論就先得要有一套理據，並在理據的基礎上小心求證。

讓我簡單一點的去分析。經濟好，市民富裕了，買房子的需求大了，樓價也就升了。經濟增長引致樓市興旺，相信沒人會反對這套說法吧。至於一個地區的經濟則受多方面影響，房地產只是眾多經濟活動中的其中一環而已。樓市

好，經濟就會好的理論在本質上似乎是不能成立的。

當然，我們不能完全否定這套說法。經濟活動是一環緊接一環，互相影響的。假若樓市好了，其相關的服務支出也是會算入當地的生產總值中。至於市民從樓市交易中的獲利或會用於其他私人消費開支中，從而推高生產總值。在房地產的經濟學中，GDP 的升跌會影響樓價多少，而樓市又給經濟帶來多少的影響，都可以引用計量經濟模型去量度。

重要的是，那些基本因素決定經濟的起伏，那些基本因素決定樓市的波幅，我們絕不能弄錯，顛倒因果。

真相關，假相關

要弄清因果前，我們先會檢查兩組數據，看看他們是否相關吧。相關性低的也就是沒關係了。可是，有些時候，我們會發現兩組數據有很高的相關度，但這可能只是巧合而已。誰是因，誰是果，也不用去深究！

甚麼時候會發現兩組數據有高相關度，但卻應該是沒關係的呢？這通常會出現兩組有共同趨勢的數字上。比如說， X 是隨著時間，每個月都有固定 5% 的增長的數據；而 Y 則是隨著時間，每個月有不同高低的增長，或有時下跌，但

整體趨勢都是向上的數據。要把 X 和 Y 弄一個相關系數，不用計算，也知道一定是高到不得了。因為，他們整體趨勢都是向上走。可是，他們彼此應該是沒有關係的。因為，無論發生甚麼事都好， X 都是每個月有固定的增長。

那麼怎樣先可以正確說明他們的關係呢？很簡單，用上增長率就可以了。以 X 來說，其增長率不過是一條橫行的直線。而 Y 的增長率，每月都有不一樣的數字。一拼下來，不用計算，已知道相關系數是接近零的了。

說回樓價和 GDP 的例子，以我們熟識的香港為研究對象，我先用上由一九九零年到二零一二年第一季的按季數據快速做一個測試。簡單的透過 Excel 運算，樓價和 GDP 的相關系數是 0.569。看上去是很有關係的呢，正的相關系數亦符合經濟理論。至於樓價的變動和 GDP 的變動，其相關系數也不低，達到 0.522。

值得注意的是，這裡用的是經季節性調整的實質 GDP⁴。這是因為 GDP 受到季節性因素的影響，特別是

⁴可在政府統計處網頁下載經季節性調整的增長率；如要嘗試得出經季節性調整的實質 GDP 的時序，以其中一季的實質 GDP 為基準再引用經季節性調整的增長率便可；如有經濟模型軟件亦可自行調整數據的季節性，對於經濟實證研究中的結果分別不會太大。

處理按季升幅的時候，通常都需要撇除季節性效應才會在研究中得出可靠的結果。而引用實質經濟增長，平減了價格的影響會較有經濟意義；與樓價之間的比較中，共同趨勢也因此少了價格這個因素⁵。

好了，看來樓市和經濟是很有關係的了。那麼誰是因，誰是果，如何可以科學地驗證呢？

因果的驗證 – Granger Causality Test

要驗證因果，不得不提的是，我們可以應用由諾貝爾經濟學獎得主 Clive W. J. Granger 提出的 Granger Causality Test 去驗證。關於這個因果測試，詳細的解釋，讀者有興趣的話可以細閱參考書，或在網上找尋亦有充足的資料。這裡就簡單的解釋一下好了。Granger 提出的方法，是這樣的。

假設 Y 用其滯後值用迴歸分析(regression)作這樣的表達 [註:有多少的滯後值取決於其顯著水平(significance level)]:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1)$$

⁵樓價方面，其實也可考慮使用平減了價格影響後(通常透過撇除通脹)的實質樓價。簡單起見，這裡不為數據調整，就直接用上樓價(可在差餉物業估價署下載私人住宅的售價指數)。

然後我們在以上的方程式中加入 X 這項因素，看看 Y_t 會否受到 X 的滯後值用所影響[以方程式(2)表達，亦即 β_i 是否顯著]。如果是的話，加入了 X 會更好地解釋了 Y ，有證據顯示 X 是因， Y 是果⁶。

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2)$$

筆者曾為此題材進行多年的研究，亦參考過不同學者對此的分析，發現實證研究的結果，以香港來說，會受不同的條件影響，包括選擇的參數，研究的參考時段，以及滯後值的選擇等。概括而言，我們可以得出在香港這個市場中，經濟增長是決定樓價增長其中一個基本因素，而樓價增長亦會為經濟增長帶來一些影響(所謂的 *feedback effect*; 關係如理論的一樣，是正關係)。

說到這裡，不得不介紹另一個重要的經濟模型。記得開首提到我們可以引用計量經濟模型去量度 GDP 和樓市的相互影響。我們可以利用本年度諾貝爾經濟學獎得主，Christopher A. Sims，提出的 Vector autoregression (VAR)便可。在房地產的經濟學中亦有不少以此作研究。詳細的解說超越中學水平，留待讀者自行發掘吧。Grange Causality

⁶用上 F -Test 便可檢驗 X 的滯後值在整體上對模型提供的解釋性(即 β_i 是否大於零)，虛無假設(Null hypothesis)是 X 的滯後值沒有對模型提供解釋性(即 β_i 等於零)。

Test 看似複雜，假若對迴歸分析有基本的認識的話，其實也不難明白個中的道理。筆者當年也只是從雷老師指點後自行研習的。當然，如果不用上 Regression 的話，又有甚麼方法可以科學地引證因果關係呢？

引用相關性

簡單一點，我們也可以引用相關性去嘗試檢查兩組數據有沒有因果關係的。方法就是將其中一條數據的時序移前移後了。怎樣移動？其實很簡單。我們將樓價增長的時序向前一個季度($t-1$)移動。即是說，我們現在研究的是，一個季度前的樓價增長對現在的 GDP 增長有沒有關係⁷。如有的話，即是樓價增長領先著經濟增長，有證據顯示樓市會影響經濟。

另一方面，我們也可將樓價增長的時序向後一個季度($t+1$)移動。即是說，我們現在研究的是，一個季度後的樓價增長對現在的 GDP 增長有沒有關係⁸。如有的話，即是樓價增長滯後著經濟增長（或是經濟增長領先著樓價

⁷如研究的參考時段本為零二年第一季到一一年第四季，把樓價增長的時序移前一個季度即是指研究零一年第四季到一一年第三季的樓價增長與零二年第一季到一一年第四季的經濟增長的相關系數。

⁸把樓價增長的時序移後一個季度則是指研究零二年第二季到一二年第一季的樓價增長與零二年第一季到一一年第四季的經濟增長的相關系數；等同於把經濟增長的時序移前一個季度。

增長)，有證據顯示整體經濟才是影響樓市的原因。

表一：樓價增長與GDP增長的相關系數

	GDP 增長						
	$\gamma(-3)$	$\gamma(-2)$	$\gamma(-1)$	$\gamma(0)$	$\gamma(1)$	$\gamma(2)$	$\gamma(3)$
樓價增長	-0.071	0.099	0.339	0.522	0.417	0.272	0.067

這裡再用上由一九九零年到二零一二年第一季的按季數據快速做一個測試。簡單的透過 Excel 運算，結果可在表一中看到。0.522 這個數字是前文提過 GDP 與樓價增長同步的相關系數。這裡可見有些證據說明樓價增長是滯後著經濟增長，因為一個季度後的樓價增長對現在的 GDP 增長(0.417)比一個季度前的樓價增長對現在的 GDP 增長(0.339) 為高，以至兩個季度後的樓價增長對現在的 GDP 增長(0.272) 比兩個季度前的樓價增長對現在的 GDP 增長(0.099)都為高。當然，以時序差異去作相關性的分析中，發現一方領先或滯後另一方並不代表 Granger Causality Test 中就有 Granger causality 和相對應的結果。

科學精神 大膽假設 小心求證

以上提到的方法都是屬於時間序列分析(time series analysis)的一種，其結果會受不同的條件影響，我們需要

小心解讀每一個經濟模型背後的細節。就以研究的參考時段為例，選擇時段的不同也可會導致完全不同的研究結果。總的來說，利用數據進行研究工作，我們可以作出大膽的假設，但每一步都需要小心求證，並且需要知道每一種方法的局限性。另一方面，我們在研究中是要從雙方面的基本因素探究，而不是隨便找兩組數據來賣弄統計方法。這樣，得出來的結果才会有其涵意，而不是只會有奇怪意思的。有時候，為了好奇，或為了研究，說到兩者間的關係，我們會去為某些事物弄一些相關系數。天馬行空是可以的，特別是這項比賽，我們更鼓勵創意。但是，我們要確保方法用得正確，而關係的背後是有一些基本因素支持的。

同學也可見到，當年 Clive W. J. Granger 提出的方法來檢證因果，是很重要的結果，為學術界帶來很多的討論，後繼亦有很多相關的研究。現在看回頭，當中所用的技巧或許不是特別的深奧。當然，現在引用經濟模型的軟件，很快便可以得出結果，也不能與當時的情況相比。最重要的是，成為第一個發明家，引用科學的方法嘗試引證因果關係殊不容易。同學們在日常生活中多加思索，說不定你的創意一天會讓你得到意想不到的成就。

參考資料:

有關 GDP 的統計資料可在政府統計處網頁
(www.censtatd.gov.hk)下載

有關物業市場的統計資料可在差餉物業估價署
(www.rvd.gov.hk)下載

邀請作品：低糖誘惑 – 淺談假設檢定

香港人越來越重視食物健康，外出用膳或選購包裝食品和飲料時，會不時留意食物的營養價值，以確保均衡的營養吸收，例如避免吸收過多糖分、反式脂肪等。為了迎合市場需要，生產商推出了不少低糖食品，聲稱含糖量低，適合健康人士食用。

營養師 A 近日行經一間朱古力店。該朱古力店標榜生產低糖朱古力，特別針對愛吃甜點卻又怕變肥的顧客。該朱古力店標示：

**本店所有產品均屬低糖朱古力，
每 100 克朱古力含糖量只有 4.5 克，
適合愛吃甜點又怕肥的你。**

營養師 A 對此標示感到疑惑，希望藉著自己的專業知識去證實此標示的真偽。營養師 A 決定把朱古力買回自己的實驗室作詳細分析，但當他走到收銀處時，想到一個問題：「我是否需要檢測每一盒朱古力以確定此標示的真偽呢？這樣做成本未免太大了。或許我應該用一個低成本而且科學化的方法。沒錯，讓我先抽取其中十盒朱古力進行檢驗。」結果 10 盒朱古力測得的糖分含量分別為（單位：克 / 100 克朱古力）：

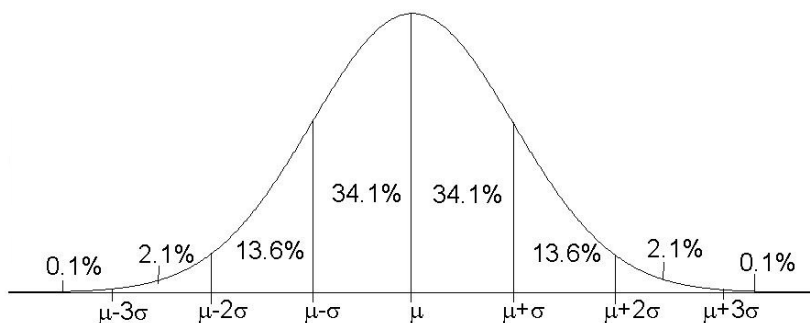
4.1、4.6、6.0、7.9、4.4、3.9、4.5、5.4、6.3、4.3

它們的糖分含量有的每 100 克多於 4.5 克，有的少於 4.5 克，只有一盒是準確地等於 4.5 克，平均每 100 克朱古力含有 5.14 克糖分而非包裝標籤顯示的 4.5 克。假設每 100 克的朱古力中糖分含量為 5 克以下就屬於低糖的話，其中也有幾盒不符合標準。這是否說明這批朱古力的品質不如生產商所保證的那樣，需要回收呢？

答案是否定的。首先，生產商保證的是這批朱古力全體的糖分平均含量是每 100 克有 4.5 克，而以上只是抽取其中 10 盒進行檢測，隨著所抽取的盒裝朱古力不同，檢測結果亦會有差別，檢測結果具有一定的偶然性，不能完全代表整批朱古力的品質。此外，由於生產機器或機器操作人員等各方面的原因，每一盒朱古力的糖分含量也不可能完全準確，因此，完全不犯錯是不可能的。生產商會盡量將錯誤的可能性和幅度減至最低，譬如控制在 10% 以內，這就需要利用到統計方法了。

根據以往經驗，這些朱古力的糖分含量大部分都應該非常接近一個平均水平，與平均值相差較大的只佔少數，在統計學上，這些朱古力的糖分含量近似正態分佈 (normal distribution)。呈現正態分佈的變數值會集中接近其平均值，變數值離開其平均值越遠出現的可能性會越趨下降，變數值大於或小於平均值的機會均等，所以其分佈

會呈鐘形：



由於飲品糖分含量近似正態分佈，我們便可根據所抽取的樣本推測「朱古力全體的糖分平均含量是每 100 克 4.5 克」這個假說檢定 (hypothesis) 是否在是次抽樣中 90%機會不被推翻。利用統計學上的假設 (hypothesis testing)，假設以上假說正確，那麼

$$\frac{|\text{樣本平均值} - \text{整體平均值}|}{\text{整體標準誤差}} < 1.65$$

1.65 為相應正態分佈鐘形曲綫下面積的臨界值。如果我們已知整體標準誤差為每 100 克 0.4 克，

$$\frac{|5.14 - 4.5|}{0.4} = 1.60 < 1.65$$

上述數學關係式成立，所以「朱古力全體的糖分平均含量是每 100 克 4.5 克」在是次抽樣中 90%機會不被推翻，即使糖分平均含量真的異於每 100 克 4.5 克，其可能性也是在是次抽樣中控制在 10%以內。

同樣道理，假設「朱古力整體屬於低糖」的假說正確，那麼

$$\frac{\text{樣本平均值} - \text{低糖臨界值}}{\text{整體標準誤差}} < 1.29$$

1.29 為相應正態分佈鐘形曲綫下面積的臨界值。如果我們已知整體標準誤差為每 100 克 0.4 克，

$$\frac{5.14 - 5.0}{0.4} = 0.35 < 1.29$$

上述數學關係式成立，所以「朱古力整體屬於低糖」在是次抽樣中 90%機會不被推翻，即使糖分含量真的大於每 100 克 5.0 克，其可能性也在是次抽樣中控制在 10%以內。所以我們仍不會推翻朱古力店標示上的糖分含量保證。

參考資料：

1. 商務印書館《十萬個為什麼——數學篇 II》第 21 及 22 章
2. 維基百科：<http://zh.wikipedia.org/wiki/正態分佈>

邀請作品：用心良苦的數學老師

學校名稱：屯門天主教中學

2011 至 2012 年度借調老師：馮穎蘭

吳高勛老師是一位相當有資歷的數學老師，在學校教授精英班多年，學生成績一直彪炳，在很多學生眼中，吳老師都被視為校內最好的數學老師，校長更準備推薦吳老師參選本年度的「全港優秀教師選舉」。

為了證明吳高勛老師除了能夠教導好學生，亦能將其他學生教好，校長特意安排吳老師今年度教授一班補底班，並相約吳老師商討這項安排。

校長： 吳老師，希望你能夠令這班從未試過合格的學生的成績有所提升。我的目標是，在第一次測驗中，你班至少有一個得到 80 分或以上的學生。

吳老師：(沉思了數十秒)校長，我認為凡事都不能太急進，不如將目標略為調整，改為至少有一個得到 70 分或以上的學生吧。對於從來未試過合格的學生來說，這已是很大的進步了。

校長見吳老師胸有成竹，便答應了他。同時他們亦達成了協議，如果補底班能夠達到目標，校長便要給予獎勵，否則，全班都要每天留校溫習數學。

吳老師返回班房向學生提出校長的要求，學生們都覺得這個目標太難達成了。

同學甲： 吳老師，我們一班 25 人，當中從來未曾有人試過取 50 分或以上，又怎能這麼突飛猛進，取得 70 分或以上呢？

吳老師： 請同學努力嘗試吧，下一次測驗會有 10 條是非題，每題 10 分。要達到目標，即至少有一位同學答對 7 條或以上就行了。

其實，吳老師深明這班學生的消極學習態度，他相信學生們都不會為測驗準備而只是靠胡亂猜答案的，但他仍滿有信心，相信目標很大機會可以達成的。結果，真的有學生答對 7 條或以上。吳老師於是請校長履行承諾，獎勵該班同學。

校長： 吳老師，你這也有點取巧了吧，只有 10 條是非題，胡亂猜答案也不難吧。

吳老師： 校長，我相信胡亂猜答案而得到高分的機會是很微的。10 條是非題的組合一共有 $2^{10} = 1024$

個，而答對 7 條或以上的組合只有

$${}_{10}C_7 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_{10} = 120 + 45 + 10 + 1 =$$

176，換句話說，每位同學要取得 70 分或以上的機率就只有大約 17%。

校長心想，既然吳老師當初在不夠兩成的機率下，仍然這麼有信心達到目標，相信他與學生們必定下過不少苦工，便欣然接受了吳老師的解釋，亦給予學生獎勵了。學生們收到成績及獎勵後，亦十分興奮。他們更有興趣知道老師是否一早已經預測到他們的成績？

同學乙：吳老師，坦白說，測驗的題目我們都不懂做，大家都是隨意猜答案的，真想不到我們可以達到目標。老師，為何你當初對我們有這麼大的期望及信心呢？

吳老師：這是一個秘密，我只能說這是一個數學的機率問題。

聽到吳老師這個回應之後，令同學們更加想知道這次達成目標的秘密，反而令他們的求知慾大增，罕有地回家自行溫習概率問題，希望從中得到答案。同學們更於翌日堂上與吳老師展開了討論。

同學丙：吳老師，對於我班達成目標的秘密，我有一個

想法。每位同學要取得 70 分或以上的機率只有大約 17%，換句話說，每位同學有大約 83% 的機率是不能達成目標的，為甚麼你仍是這麼樂觀？

吳老師：不要忘記班中共有 25 位同學，全部都不能達成目標的概率就大約是 $(0.83)^{25}$ ，機率小於 1%。

同學丁：我明白了，那麼至少有一位能取得 70 分或以上的機率就高於 99% 了，機率很高呢。

吳老師：完全正確，所以我才這麼有信心與校長達成協議。不過，同學們，你們剛才不就解決了一條數學問題嗎？其實只要你們肯努力嘗試，我相信不用靠猜，你們也可取得高分的。

吳老師雖然用了取巧的方法去達到目標，但既能通過校長的測試，亦能引起了學生的學習動機，這位老師果然是用心良苦呀！如果當初他答應完成校長至少有一個得 80 分或以上的要求，他成功的機率又會是多少呢？大家試想一想吧！

邀請作品：票房好的電影

李先生是一位補習教師，綽號「統計天王」。他最近於街上遇到朋友陳小姐。陳小姐的工作是幫助電影院線選購影片。天王偶遇她時，她好像有點心不在焉。

李先生：陳小姐，很久不見，近況好嗎？妳好像有點心事。

陳小姐：李先生，我的近況真的不太好。你知道我的工作性質，最近因為電影院線的營業額持續低迷，他們開始懷疑我的眼光，令我很擔心。我現在需要幫助他們選購影片於下年度播放，不知挑選哪一類影片才適合。我當然希望挑選的影片受歡迎。

李先生：你有時間嗎？不如大家往附近的快餐店一敘、坐下來談一談，看看有沒有甚麼解決方法。我不常看電影，但也約略知道香港電影業的境況。香港電影業自 1990 年代中期開始由盛轉衰，至今一直未能復甦。香港電影製作人近年已把市場重點放在國內，並依靠國內提供技術和資金，與內地合作拍片漸成主流。由於香港電影製作人所拍的電影要遷就國內各地觀眾的口味，未能顧及本港觀眾的需要。我也明白妳的難處，要揀選一套受歡迎的電影在香港影院上映，的

確很考功夫。妳可否說出上年度電影院播放了甚麼類型的電影，票房怎樣？讓我分析，提出解決方法。

陳小姐：謝謝你的幫忙！好吧，我給些相關資料讓你分析。以下是本影院上年度各片種的營業額：

片種題材	營業額 (萬元/年)
城市喜劇	700
古裝喜劇	1800
動作喜劇	600
動作	4000
社會奇情	1100
新派武打	1200
鬼怪	1000
科幻	5800
奇案	800
三級色情	1000
電腦動畫	5500
合計:	23500

陳小姐：片種題材那麼多，我該怎麼決定主打哪一個？我應該購買並更努力宣傳票房較差的「奇案」片，還是繼續購買並更努力宣傳比較受歡迎的「科幻」片呢？這真是個很難的抉擇啊。

李先生：依照一般人的想法，當然是後者的做法較佳。但有何理論根據呢？讓我解說一下吧。你聽說過 80/20 法則嗎？簡單來說，以妳的情況為例，就是 20% 的影片營業額佔整體影片營業額的 80%。我們可以從數據繪畫帕累托曲線圖(Pareto Chart)來幫助我們找出這可以影響 80%營業額的 20%片種題材。它的理論其實也很簡單，就是永遠只找出影響較大的前三項要素，或是 80%的要素，然後集中火力，針對這些要素對症下藥，不但節省資源，而且馬上見效，就像是擒賊先擒王的道理一樣。

陳小姐：聽起來也頗有趣，可否說多一些讓我多了解？

李先生：這個方法最初是由意大利的經濟學家 Pareto 所設計出來的，因此以他命名。利用帕累托曲線圖的分析手法，一般會將片種分為三類，妳可以因應分類結果擬定下一步行動。帕累托曲線圖的分析手法可以幫助我們找出問題的較大主要因素，每次改變只要針對這些貢獻度較大的主要因素來處理就可以了，其他的次要因素留待稍後再處理。理論上，帕累托曲線圖的分析應一直循環做下去，直到情況穩定下來。

陳小姐：究竟要怎樣做呢？請詳細說清楚！

李先生： 其實原理很簡單。首先妳要將各類片種題材的營業額的高低順序(遞降)重新排列。跟著計算營業額的累積比率。以橫軸為片種題材的名稱、縱軸為營業額，製作直方圖。在同一圖表上，將數據的累積比率作為第二縱軸，製作折線圖。妳懂嗎，不太難吧？

陳小姐： 當然會，這些技巧我於初中時已學會。

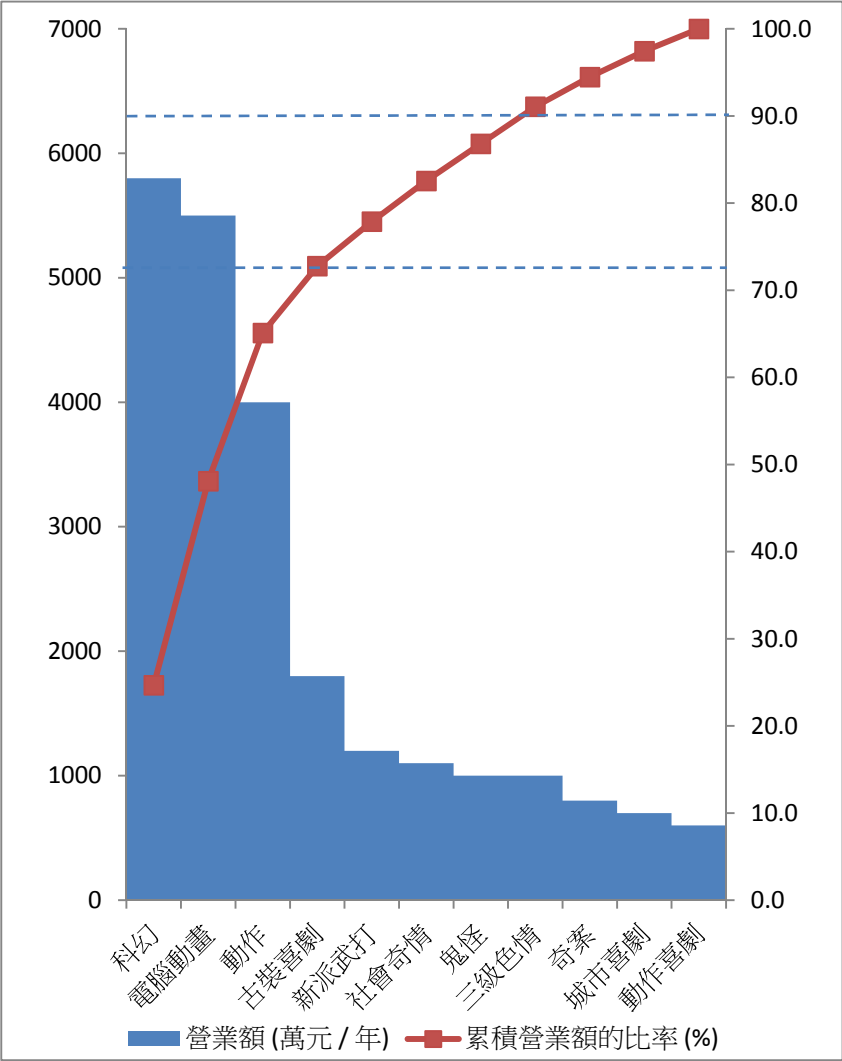
李先生： 那真好！讓我繼續說下去。完成圖表後，妳可將片種題材做 ABC 三種分類。營業額累積比率前 70% 的片種題材歸類為 A；70 ~ 90 % 的片種題材歸類為 B；其餘片種題材歸類為 C。妳可參考這些片種的分類結果，擬定對策。

陳小姐： 聽你這麼說，也不太難，讓我在手提電腦上試一試吧！

十五分鐘過後...

陳小姐: 完成了，你看一看，製成品是否這樣?

片種題材	營業額 (萬元 / 年)	累積營業額 (萬元 / 年)	累積營業額 的比率 (%)
科幻	5800	5800	24.7
電腦動畫	5500	11300	48.1
動作	4000	15300	65.1
古裝喜劇	1800	17100	72.8
新派武打	1200	18300	77.9
社會奇情	1100	19400	82.6
鬼怪	1000	20400	86.8
三級色情	1000	21400	91.1
奇案	800	22200	94.5
城市喜劇	700	22900	97.4
動作喜劇	600	23500	100.0



李先生：完全正確。妳真利害!

陳小姐：根據你的分析，我應該全力採購「科幻」、「電腦動畫」與「動作」的三類片種以增加電影院線的營業額，因它們的營業額佔總體的 65%。事不宜遲，我要馬上行動。

李先生正想回應時，有人致電給他。陳小姐藉此告別。

轉眼一年又過去了。有一天，陳小姐再次於街上遇見李天王。

陳小姐：喂，李天王，靠你的統計分析方法，好像不行。電影院線的營業額每況愈下，依然是慘淡經營，觀眾看戲的意欲並沒有提升。反而我發現競爭對手所選購的低成本、另類片種的營業額較大。為甚麼？是否我們的分析有錯？

李先生：陳小姐，其實當日我仍有話要說，但妳趕著走了，我又沒有妳的電話號碼，未能跟進。影響觀眾入場看戲有很多因素，那次只是初步的統計分析。妳的分析沒有錯，只是由於有其他因素影響。妳在這行也有十數年，知道若那類片種受歡迎，電影製作人便跟風拍攝、抄襲故事、起用當紅的明星而忽略劇本的質素。當同種類粗製濫拍的電影越來越多，均大大降低了這類型影片的整體質素。即使妳選購時很小心，但觀眾口味也會隨時間轉變。當相類似的電影氾濫，質素又難保證，觀眾

也會生厭。妳採購電影時必須掌握這點，否則很容易陷入困境。同時，隨著科技進步，很多時觀眾會在家中的電腦收看電影，不願再進入電影院。妳選購電影播放時，季節性的因素亦應考慮，假若妳的影片觀眾對象主要是中學生，如電腦動畫，妳最好避免在四、五或六月放映，因遇到考試季節，學生無暇往電影院。

陳小姐：你也說得頗有道理。那麼有沒有一些更好的統計分析方法讓我掌握香港電影觀眾的口味？

李先生：需要多些資料再作研究。有沒有電影院線每月播放影片的資料，如區域、營業額等，讓我再作分析？不過，妳也知道觀眾口味是變動的，時常跟潮流轉變，不是那麼易掌握。

Invited Article: Musical Dice Game

Nelly Mak Noi Lee & Kwok-fai Lam

Have you thought/dreamt of being a music composer? In fact, you can be an amateur composer even though you know nothing about music. This can be made possible because of a special relationship between Music and Statistics, or more precisely, randomness.



Like the pop music industry today, classical music industry was very popular in Europe in the 18th century that music publishing was a thriving trade. Publishers competed with one another to print the works of the popular composers. Many publishers looked for novel ways to entice new customers into their music shops and concert halls.

One such ploy was to publish systems that would allow any amateurs to compose music without having to know the techniques or rules of composition. The London music publisher Welcker, for example, issued “A Tabular System Whereby the Art of Composing Minuets is Made So Easy that Any Person, Without the Least Knowledge of Musick, may

Compose Ten Thousand, All Different, and in the Most Pleasing and Correct Manner” in 1763. Many of these schemes involved using dice or other randomizers to select musical fragments from an array of choices. Composer Johann Philipp Kirnberger (1721–1783), a former pupil of Johann Sebastian Bach (1685–1750), suggested the use of dice for this purpose in his book “The Ever-ready Composer of Polonaises and Minuets⁹” published in 1757¹⁰.

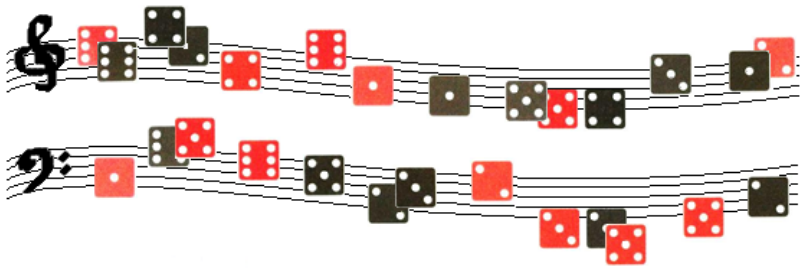
In fact, chance-determined music was once very popular in the second half of the 18th Century (1757-1812). An epidemic of musical dice-rolling games arose in Europe to allow anyone to write compositions based on the chance operators. Greatest music composers, like Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791), Joseph Haydn and many others, had ever composed musical scores for chance music machine through musical dice game before. The most well-known chance music machine would be Mozart’s *Musikalisches Würfelspiel*¹¹ K. 516f written in 1787, and was first published in 1792 in Berlin, the year after Mozart’s death.

What is Musical Dice Game?

⁹ **polonaises, minuets** in Chinese, 波蘭舞曲，小步舞。

¹⁰ <http://www.kempa.com/2004/04/08/probably-music/>

¹¹ ***Musikalisches Würfelspiel*** means Musical dice game.



Musical dice game is an interesting crossover between Music and Statistics, or more precisely, randomness. A musical dice game is a system for using dice to generate a random number to create musical compositions that *composers* do not have to be familiar with the techniques of composition such as the rules of cadence and harmony. In the majority of the musical dice games, the goal is to produce a uniform and periodically running off track. The resulting compositions are therefore mostly waltzes, polonaises or minuets¹² with very schematic harmonic structure. Several (say 11 for minuet and 6 for Trio¹³ as in Mozart's musical dice game described below) variations on a theme¹⁴ were composed for each bar¹⁵. A random number is then generated to determine the variation

¹² **waltzes, polonaises, minuets** in Chinese, 圓舞曲，波蘭舞曲，小步舞.

¹³ **Trio (music)** is the contrasting section (B) of a piece in ternary form (A-B-A). Minuet and trio is a longer structure of a musical form which is described by the term, minuet.

¹⁴ In music, a **theme** is the material, usually a recognizable melody.

¹⁵ In musical notation, a **bar** or **measure** is a segment of time defined by a given number of beats, in Chinese, 小節.

of each bar. The random numbers are generated mostly by rolling a die, a pair of dice, using playing cards or other suitable instruments.

In the days of Classical period of music (1750-1820), the musical dice games induced some treatises and criticisms which were filled with mathematical analyses of music. In fact, the 18th century's great public enthusiasm for mathematics in Europe was the incentive to create such unusual method of composing operation.

W.A. Mozart's Musikalisches Würfelspiel K. 516f

In 1787, Mozart wrote *Musikalisches Würfelspiel K. 516f*¹⁶, the most famous chance music machine among all. The idea of his *Musikalisches Würfelspiel K. 516f* is to cut and paste pre-composed variations bars of music together to create a minuet and trio¹⁷, depending upon the results of dice thrown. For minuet with 16 bars, the *composer* rolls a pair of six-sided

¹⁶ The instructions, number of plates and table of music of Mozart's *Musikalisches Würfelspiel K. 516f* can be downloaded from (the copyright is public domain):
http://erato.uvt.nl/files/imglnks/usimg/b/bc/IMSLP20432-PMLP47543-mozart_-_dice_waltz.pdf or
[http://imslp.org/wiki/Musikalisches_W%C3%BCrfelspiel,_K.516f_\(Mozart,_Wolfgang_Amadeus\)](http://imslp.org/wiki/Musikalisches_W%C3%BCrfelspiel,_K.516f_(Mozart,_Wolfgang_Amadeus))

¹⁷ **Trio (music)** is the contrasting section (B) of a piece in ternary form (A-B-A). Minuet and trio is a longer structure of a musical form which is described by the term, minuet.

dice repeatedly to select the pre-composed variations of each of the 16 bars. Then, for trio with 16 bars, the *composer* rolls a single die 16 times to select the 16 pre-composed variations in sequence. Putting the 32 pre-composed variations in sequence results in a complete composition. There are altogether 11^{16} different combinations of minuet bars and 6^{16} different combinations of trio bars. Hence, there are altogether $11^{16} \times 6^{16} = 1.30 \times 10^{29}$ possible compositions in total.

The pre-written variations are randomly distributed as shown in the table of figures below.

Minuet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Trio

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	<u>72</u>	<u>6</u>	<u>59</u>	<u>25</u>	<u>81</u>	<u>41</u>	<u>89</u>	<u>13</u>	<u>36</u>	<u>5</u>	<u>46</u>	<u>79</u>	<u>30</u>	<u>95</u>	<u>19</u>	<u>66</u>
2	<u>56</u>	<u>82</u>	<u>42</u>	<u>74</u>	<u>14</u>	<u>7</u>	<u>26</u>	<u>71</u>	<u>76</u>	<u>20</u>	<u>64</u>	<u>84</u>	<u>8</u>	<u>35</u>	<u>47</u>	<u>88</u>
3	<u>75</u>	<u>39</u>	<u>54</u>	<u>1</u>	<u>65</u>	<u>43</u>	<u>15</u>	<u>80</u>	<u>9</u>	<u>34</u>	<u>93</u>	<u>48</u>	<u>69</u>	<u>58</u>	<u>90</u>	<u>21</u>
4	<u>40</u>	<u>73</u>	<u>16</u>	<u>68</u>	<u>29</u>	<u>55</u>	<u>2</u>	<u>61</u>	<u>22</u>	<u>67</u>	<u>49</u>	<u>77</u>	<u>57</u>	<u>87</u>	<u>33</u>	<u>10</u>
5	<u>83</u>	<u>3</u>	<u>28</u>	<u>53</u>	<u>37</u>	<u>17</u>	<u>44</u>	<u>70</u>	<u>63</u>	<u>85</u>	<u>32</u>	<u>96</u>	<u>12</u>	<u>23</u>	<u>50</u>	<u>91</u>
6	<u>18</u>	<u>45</u>	<u>62</u>	<u>38</u>	<u>4</u>	<u>27</u>	<u>52</u>	<u>94</u>	<u>11</u>	<u>92</u>	<u>24</u>	<u>86</u>	<u>51</u>	<u>60</u>	<u>78</u>	<u>31</u>

The bar numbers are indicated on the first row as the bold digits¹⁸ in the number plates. And, the numbers on the left-hand column mean the outcome of the dice rolled.

In the trio section, the probability of each unique composition is $\left(\frac{1}{6}\right)^{16} = 3.54 \times 10^{-13}$. Obviously, the probability of a unique composition in the minuet section is even lower, but with unequal probabilities. It is almost impossible to make the same musical scores through this dice game, but they may be similar. However, it is interesting to note that *Musikalisches Würfelspiel K. 516f* is not included in the Mozart's “**catalogue of all my works**”. Nelly, as a piano learner, postulates that Mozart did not treat this work as his creation, nor as a piece of musical work.

¹⁸ In W.A. Mozart's manuscript, the bold digits on first row originally are the Latin alphabets.

The Influence of Musical Dice Games Nowadays



Musical dice games were still hit in the first half of the 19th Century mainly for publishing music. The epidemic of musical dice games in Europe faded out gradually. Only in the second half of the 20th Century was this composition system be reminisced or revived remembered due to the widespread use of mechanical music machines¹⁹ such as modern pianola²⁰. In other words, Musical dice games have an inspiration on the development of electronic music machines and entertainment. Electronic keyboard electronically produces sounds from the processes of pressing mechanical keys. However, the most important prerequisites for an electronic player's function are the ability to read musical notations²¹, and adequate control of the musical instruments. Imagine that when you play the digital keyboard, you can press the button on self-playing musical instruments without

¹⁹ **Mechanical music machines** in Chinese, 機械音樂機.

²⁰ **Modern pianola** or **autopiano** comes with an electronic device that can record and playback MIDI files on floppy disks and/or CD-ROMs, and a MIDI interface that enables computers to drive the piano directly for more advanced operations, in Chinese, 自動鋼琴.

²¹ **Musical notation** is the system that represents aurally perceived music, through the use of written symbols.

the performer to create music.



A Pianola and its electronic device

The ideas and concepts of chance-controlled musical operation are being adopted to the development of the newly emerging electronic computing technology which automatically generated music pieces.

In summary, musical dice games inspire the idea of random combinatorial techniques used in computer-generated composition. Nowadays, machines use computer algorithms to create improvisation²² based on pre-composed musical materials. As a result, some statisticians use statistical approaches and models to capture the musical data for analysis.

²² **Improvisation** in Chinese, 即興曲.

Last but not least, we were so fascinated when walking along the journey through history to explore the marriage of Music and Statistics when writing up this article, as there is so much to learn.

Further Readings

Go to the following websites, you can compose as Mozart.

Mozart's Musikalisches Würfelspiel. John Chuang. SunSITE Austria, University of Vienna, 1995.

<http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/>

You may compose a minuet and trio with the style of Mozart in this website. At the same time, you can select instruments before playing the MIDI player and get your scores.

Musikalisches Würfelspiel. Amaranth Publishing, 2003.

<http://www.amaranthpublishing.com/MozartDiceGame.htm>

You may download a ZIP file for extracting a free Window program. Then, you can use it to create zillions of minuets or trios with the Mozart's style.

Become Mozart and enjoy!

Invited Article: Dependence in the “Tail”

Ambrose LO

Department of Statistics and Actuarial Science
The University of Hong Kong

What is This Article About?

In this article, we study the concept of tail dependence and illustrate how it distinguishes itself from ordinary dependence by virtue of two instructive examples. To aid our study of tail dependence, a technical notion termed the coefficient of upper tail dependence will be introduced. Throughout this article, intuitions rather than theoretical derivations and practical computations will be emphasized.

1 Introduction

If one is asked to use a statistic to summarize the degree of dependence between two random variables, say X and Y , Pearson's correlation coefficient will spring to mind almost immediately. It is the most commonly used dependence measure that tells the strength as well as direction of a linear relationship between X and Y . It is defined as

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{(E[X^2] - E[X]^2)(E[Y^2] - E[Y]^2)}}.$$

It is well known that ρ is valued between -1 and 1. Roughly speaking, the higher the value of ρ , the more likely that X and Y move in the same direction. Note that in the definition of ρ , only the product moment $E[XY]$ depends on the dependence structure of the random vector (X, Y) ; all other quantities are fixed given the marginal distributions of X and Y . The investigation of the correlation between X and Y hence boils down to studying $E[XY]$. This point of view will be of paramount importance in the sequel.

Pearson's correlation coefficient measures the dependence of X and Y over their entire support. It is uncertain, however, whether it is also a good reflection of *tail dependence*, which is the degree of dependence between X and Y given that they are at their extreme values. Specifically, we let

$$\begin{aligned} X' &= X|(X > \text{some "large" value}), \quad Y' \\ &= Y|(Y > \text{some "large" value}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{and } \rho' = \frac{\text{Cov}(X', Y')}{\sqrt{\text{Var}(X')\text{Var}(Y')}}.$$

Our question is: can a large (resp. small) ρ co-exist with a small (resp. large) ρ' ? Such a question arouses considerable attention in the aftermath of the financial tsunami in 2008,

which drove many practitioners to attach greater importance to tail risk management, because it is the possibility that risks are simultaneously exceptionally large that jeopardizes the survival of a financial institution. It was observed that losses in investment plans, while correlated to some extent in normal market conditions (with ρ being small in magnitude), became extremely positively correlated when the market crashed, during which the losses attained extraordinarily large values and moved in line with one another (with ρ' being very close to 1).

To pursue an answer, let us examine the following daily-life examples:

Example 1. Since the implementation of the Early Admissions Scheme (EAS) in 2002, a number of high-school students with exceptional results in the HKCEE were admitted to university without sitting the HKALE. It is a peculiarity that many of these EAS students performed disappointingly poorly in their undergraduate years. This raised strong doubts as to whether admitting students solely on the basis of their HKCEE scores was an effective policy. To look more deeply into the matter, a bivariate normal distribution is used to model students' HKCEE scores (X) and their first-year GPA (Y) with the following parameters:

$$\mu_X = 24, \mu_Y = 2.5, \sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 0.25, \rho = 0.40.$$

100 sample “students” are generated²³ and the correlation coefficient between their HKCEE scores and first-year GPA is measured. The full data can be found in Appendix 1.

The sample correlation based on all 100 pairs is 0.4135, which seems to indicate that the HKCEE scores and first-year GPA are quite positively correlated. However, if the sample correlation is calculated based on the 10 pairs with the highest HKCEE scores, the measure not only reduces significantly in magnitude, but also changes in sign to -0.1186. How to reconcile the contradiction, if any, here?

Example 2. The following data that span 30 years are available for AYA Insurance Corp. They show the annual amounts of claims filed in two lines of business of the corporation.

Line A (X)	110	59	46	320	38	5	322	120	176	35
Line B (Y)	95	104	191	172	122	18	183	267	76	98

Line A (X)	51	300	108	234	362	334	282	348	174	37
Line B (Y)	170	271	302	66	252	56	54	133	68	215

²³ This can be achieved, for example, by the method of conditional sampling.

Line A (X)	133	130	477	17	116	501	591	600	705	804
Line B (Y)	26	64	104	272	141	340	365	399	420	510

In general, the losses in Lines A and B are positively correlated with a sample correlation coefficient of 0.6038. It is noticeable that the five largest losses (in bold) involve not only large magnitudes but also the *same directional movements* of X and Y . With X and Y moving in the same direction, the sample correlation coefficient of X and Y when restricted to these 5 biggest losses is alarmingly 0.9646.

These two examples highlight the substantive fact that strong dependence in general does not imply strong tail dependence, vice versa. In the next section, we will discuss issues related to the quantification of tail dependence and a notion known as the coefficient of upper tail dependence to more effectively investigate tail dependence. In particular, we will formalize the idea of “large” values in (1).

2 Tail Dependence

If we are interested in the general relationship between two quantities, e.g. the HKCEE score and first-year GPA for students as a whole, Pearson's correlation coefficient serves its purpose well. For more specialized purposes, such as investigating dependence in the upper tail, as in Examples 1 and 2, we may examine its conditional counterpart ρ' . As

mentioned before, if only the dependence structure of (X, Y) is of interest, it is sufficient to investigate the conditional product moment

$$E[X'Y'] = E[XY|X, Y > \text{some "large" values}].$$

In general, even when this conditional product moment can be computed explicitly, it is unclear as to how the “large” values should be selected. As a first step of our remedy, we will relate product moments to *tail probabilities*, which are the probabilities that a random variable is greater than some fixed large numbers. This approach is justified by Lemma 1 in Appendix 2, which shows the intimate relation between (conditional) product moments and tail probabilities. Although the lemma may look formidable, its key message is: **The greater is the tail probability, so is the (conditional) product moment, hence the (conditional) correlation coefficient.**

With tail probabilities being our current concern, we introduce a very useful tool known as the *coefficient of upper tail dependence* λ_U , defined mathematically as

$$\lambda_U := \lim_{\alpha \rightarrow 1} P(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)).$$

In this article, we shall not touch upon the computational

aspect²⁴ of λ_U . Roughly speaking, λ_U is the conditional probability that X takes a very large value given that Y is already unusually large. Here F_X^{-1} and F_Y^{-1} are the inverse distribution functions of X and Y respectively. If α is very close to 1, then $F_X^{-1}(\alpha)$ will return a very large value on X 's scale, i.e. X has a very high probability to be smaller than such a value (see Figure 1 for an illustration of the inverse distribution functions in Example 1 above). The use of seemingly complicated inverse distribution functions thus allows us to compare large values appropriately on the scales of X and Y . If $\lambda_U > 0$, then in accordance with Lemma 1 (b), (X, Y) will possess a higher conditional product moment than the case of $\lambda_U = 0$, thereby exhibiting stronger upper tail dependence.

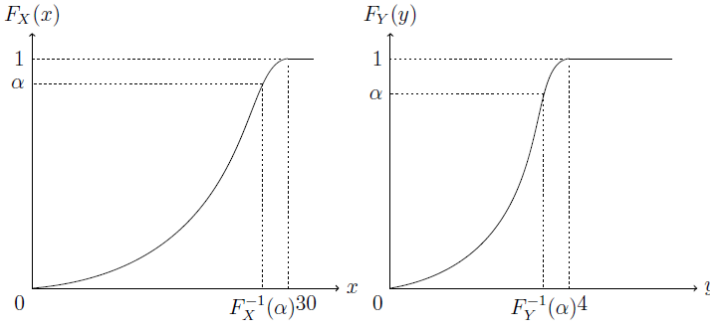


Figure 1: Illustration of the meanings of $F_X^{-1}(\alpha)$ and $F_Y^{-1}(\alpha)$ for a large value of α .

24 This involves the concept of copulas.

We now relate the notion of coefficient of upper tail dependence to the two examples in the previous section.

Example 1(Weak Tail Dependence). Although the correlation coefficient between X and Y is 0.40, a fairly high positive value, it turns out that for a bivariate normal random vector, the *coefficient of upper tail dependence is 0* (see Dhaene et al., 2005)²⁵. By Lemma 1 (b), this implies a relatively small conditional product moment, and by extension, weaker tail dependence. In other words, while the HKCEE score and first-year GPA of a randomly picked university student is fairly positive, this may not be the case for those academic achievers, contrary to conventional wisdom. If a university, in view of the positive correlation between HKCEE scores and first-year GPA, admits students solely on the basis of the former, such a policy may actually be counter-productive.

Example 2 (Strong Tail Dependence). In the second example, the losses in the two lines of business are positively correlated in their normal ranges of values, and become even almost perfectly correlated when they attain extreme values. An explanation for this phenomenon is that normally, the losses are linked through a nexus of complex socioeconomic factors. In catastrophic times, some underlying systemic risks in the

²⁵ Unless $\rho = 1$.

economy become so prevalent that the losses depend on the same sources of randomness when the markets are collapsing. In this case, we may write $X = F_X^{-1}(U)$ and $Y = F_Y^{-1}(U)$ for some uniform(0,1) random variable U to indicate that the randomness of X and Y can be captured by a single source. This means that when the value of Y is extremely large, X will follow suit automatically. As a result, the *coefficient of upper tail dependence is 1*.

3 Concluding Remarks

In this article, we introduce the concept of tail dependence and contrast it with ordinary dependence by means of two examples, in which the magnitudes of ρ and ρ' differ substantially. It is shown that strong dependence in an overall sense, as measured by a large correlation coefficient, does not imply the same dependence relationship in the tail. To examine tail dependence more easily, we also discuss the coefficient of upper tail dependence as a useful tool. Our key message is: the measurement of different types of dependence relations requires different sets of tools. In the domain of tail risk management, the coefficient of upper tail dependence is a particularly useful reflection of the strength of dependence in the upper tail and a quantity that should be examined carefully by risk managers who are especially concerned about tail risks.

Appendix 1: Data Used in Example 1

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
18.6	1.7	22.1	1.9	23.0	2.1	24.1	2.2	25.3	1.9
19.6	1.8	22.2	2.3	23.1	2.3	24.2	2.3	25.3	2.6
19.6	2.7	22.3	1.7	23.1	2.6	24.3	2.0	25.9	3.2
19.7	1.6	22.3	2.9	23.1	2.3	24.3	3.1	26.0	3.3
19.9	1.9	22.4	1.1	23.3	2.1	24.4	2.5	26.1	3.0
20.3	2.0	22.4	2.4	23.4	2.3	24.6	2.6	26.3	2.3
20.3	2.8	22.6	3.3	23.4	1.8	24.6	2.9	26.3	2.6
21.1	2.0	22.6	2.8	23.4	2.0	24.7	3.0	26.3	2.2
21.2	2.1	22.6	1.7	23.4	2.1	24.7	2.4	26.4	3.2
21.3	2.5	22.6	2.6	23.6	1.7	24.7	2.7	26.4	2.2
21.4	1.8	22.7	2.7	23.6	2.3	24.8	3.0	26.4	3.1
21.6	2.7	22.7	1.6	23.7	3.1	24.9	2.9	26.5	3.4
21.7	2.0	22.8	1.8	23.8	2.7	24.9	2.3	26.5	2.1
21.8	2.2	22.8	2.4	23.8	2.6	24.9	2.2	26.6	2.2
21.8	2.1	22.8	2.3	23.9	2.5	25.0	2.6	26.6	3.5
21.9	1.5	22.9	3.0	23.9	3.1	25.1	2.4	27.0	2.9
21.9	2.6	22.9	2.2	23.9	2.5	25.2	2.6	27.4	2.6
22.0	2.3	23.0	2.0	24.0	1.7	25.2	1.8	27.6	3.0
22.0	2.8	23.0	2.6	24.1	2.3	25.2	3.5	30.0	2.6
22.0	2.7	23.0	3.0	24.1	2.3	25.2	1.8	30.0	2.9

Appendix 2: Relationship between Product Moments and Tail Probabilities

Lemma 1. Let X and Y be two positive random variables and p, q be two fixed positive constants. Then

(a) $E[XY] = \int_0^\infty \int_0^\infty P(X > x, Y > y) dx dy;$

(b) $E[XY|X > p, Y > q]$ can be expressed as

$$pq + \frac{p \int_q^\infty P(X > p, Y > y) dy}{P(X > p, Y > q)} + \frac{q \int_p^\infty P(X > x, Y > q) dx}{P(X > p, Y > q)} + \frac{\int_q^\infty \int_p^\infty P(X > x, Y > y) dx dy}{P(X > p, Y > q)};$$

References

1. Cheung, K.C., 2009. Upper comonotonicity. *Insurance: Mathematics and Economics* 45, 35-40.
2. Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., 2005. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons, Inc.

二零一一至一二年度中學生統計創意寫作比賽的籌備委員會：

主席	楊良河博士，香港大學統計及精算學系
總評審主任	張家俊博士，香港大學統計及精算學系
籌委會成員	陳秀騰先生，教育局
	陳家豪先生，政府統計處
	蔡佩霖女士，政府統計處
	郭銘樂先生，政府統計處
	劉瑞琪女士，政府統計處

數學百子櫃系列

作者

- | | |
|-----------------------------|-------------|
| (一) 漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分 | 張家麟、黃毅英、韓藝詩 |
| (二) 漫談數學學與教新高中數學課程延伸部分單元一 | 韓藝詩、黃毅英、張家麟 |
| (三) 漫談數學學與教新高中數學課程延伸部分單元二 | 黃毅英、張家麟、韓藝詩 |
| (四) 談天說地話數學 | 梁子傑 |
| (五) 數學的應用: 區像處理—矩陣世紀 | 陳漢夫 |
| (六) 數學的應用: 投資組合及市場效率 | 楊良河 |
| (七) 數學的應用: 基因及蛋白的分析 | 徐國榮 |
| (八) 概率萬花筒 | 蕭文強、林建 |
| (九) 數學中年漢的自述 | 劉松基 |
| (十) 中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集 | |
| (十一) 從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀 | 張家麟、黃毅英 |
| (十二) 2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集 | |